STAT4434

MATERI POKOK 1

FUNGSI KEHIDUPAN KONTINU

Indra Catarya, M.Sc.
Aktuaris

DAFTAR ISI

FUNGSI KEHIDUPAN KONTINU

1. Pengantar

Sebelumnya para pembaca telah mempelajari fungsi kehidupan diskrit, dimana usia x dianggap bulat. Pada modul pertama ini, usia x dianggap dapat mencapai setiap nilai dari 0 sampai dengan w. Itulah sebabnya bahwa orang hidup l_x sebagai fungsi kontinu.

2. Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari modul tersebut para mahasiswa diharapkan memahami kegunaan konsep kontinu pada fungsi-fungsi anuitas, asuransi dan cadangan.

3. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari modul ini para mahasiswa diharapkan mampu menurunkan dan menjelaskan relasi l_x dengan μ_x ataupun fungsi-fungsi asuransi lainnya.

4. Kegiatan Belajar

4.1 Kegiatan Belajar 1

TINGKAT KEMATIAN SESAAT

4.1.1 Uraian dan Contoh

Tingkat kematian sesaat (force of mortality, Panitia Istilah Dewan Asuransi Indonesia menterjemahkan menjadi Laju kematian), adalah tingkat kematian sesaat pada usia tertentu dan diberi simbol μ_x

Bila kita nyatakan bahwa l_x adalah fungsi kontinu maka (baca Matematika Asuransi I, modul 9 oleh R.K. Sembiring Ph.D) tingkat kematian sesaat.

$$\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}$$

$$= -\frac{1}{l_x}\ \frac{l_x}{dx}$$

$$= - \frac{d}{dx} (\ln l_x)$$

atau $\dfrac{dl_x}{dx} = - l_x . \mu_x$ .... (1)

Dari persamaan (1), dengan teori integral kita dapat

$$\int_0^x \frac{dl_t}{l_t dt} = \int_0^x - \mu_t \, dt$$

$$\int_0^x d\ln l_t = - \int_0^x \mu_t \, dt$$

$$\ln l_t \Big]_0^x = - \int_0^x \mu_t \, dt$$

$$\ln l_x = - \int_0^x \mu_t \, dt$$

atau $l_x = l_0 . e^{-\int_0^x \mu_t dt}$

Jika kita integrasikan persamaan (1) dari α ke batas usia tabel mortalitas, yang mana x adalah $\alpha + t$, maka

$$\int_0^{w-\alpha} \frac{dl_{\alpha+t}}{dt} dt = \int_0^{w-\alpha} - l_{\alpha+t} . \mu_{\alpha+t} \, dt$$

$$[l_{\alpha+t}]_0^{w-\alpha} = - \int_0^{w-\alpha} l_{\alpha+t} . \mu_{\alpha+t} dt$$

$$l_w - l_0 = - \int_0^{w-\alpha} l_{\alpha+t} . \mu_{\alpha+t} \, dt$$

Karena w adalah usia tertinggi dari tabel mortalitas maka $l_w = 0$, sehingga

$$l_\alpha = \int_0^{w-\alpha} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t}\, dt$$

atau

$$l_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t}\, dt \text{ .... (2)}$$

Pandang bahwa $d_x = l_x - l_{x+1}$ (ingat d_x adalah jumlah orang yang meninggal dari l_x orang sebelum mencapai usia (x + 1) tahun).

$$[l_{\alpha+1}]_0^1 = - \int_0^1 l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t}\, dt$$

$$l_{\alpha+1} - l_\alpha = - \int_0^1 l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t}\, dt$$

Jika kita gantikan x dengan α maka $l_{x+1} - l_x = -d_x$, yang mengakibatkan

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

Jika pada persamaan (1), kita integralkan dari α sampai $\alpha + n$ yang mana x adalah $\alpha + t$, maka

$$x = (\alpha + t)$$
$$dx = d(\alpha + t)$$
$$= dt$$

$$x = \alpha \longrightarrow t = 0$$
$$x = \alpha + n \longrightarrow t = n$$

$$\int_0^n \mu_{\alpha+t}\, dt = - \int_0^n \frac{d}{dt} \ln (l_{\alpha+t})\, dt$$

$$= -\left[\ln(l_{\alpha+t})\right]_0^n$$

$$= -\ln\frac{l_{\alpha+n}}{l_\alpha}$$

$$\frac{l_{\alpha+n}}{l_\alpha} = e^{-\int_0^n \mu_{\alpha+t}\,dt}$$

Bila perubah acak α kita ganti dengan x, akan didapat

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt} \quad \text{..........} \ (3)$$

Dari persamaan (3) didapatlah

$${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt}$$

Peluang ${}_nq_x$ dapat dinyatakan

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

$$= 1 - e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt}$$

Pandang persamaan sebelumnya bahwa,

$$\frac{dl_x}{dx} = -\,l_x\,\mu_x$$

$$dl_x = -\,l_x\,\mu_x\,dx$$

Jika diambil perubah acak $x = \alpha + t$ dan integrasikan dari α sampai $\alpha + n$,

$x = (\alpha + t)$
$dx = dt$
$x = \alpha$ ----> $t = 0$
$x = \alpha + n$ ----> $t = n$

α

$$\int_0^n dl_{\alpha+t} = -\int_0^n l_{\alpha+t}\,\mu_{\alpha+t}\,dt$$

$$[l_{\alpha+t}]_0^n = -\int_0^n l_{\alpha+t}\,\mu_{\alpha+t}\,dt$$

$$l_{\alpha+n} - l_{\alpha} = -\int_0^n l_{\alpha+t}\,\mu_{\alpha+t}\,dt$$

atau

$$l_{x+n} - l_x = -\int_0^n l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$$

Jika dibagi dengan l_x, maka didapatlah ${}_nq_x$, yaitu

$$\frac{l_{x+n} - l_x}{l_x} = -\frac{1}{l_x}\int_0^n l_{x+t}\cdot\mu_{x+t}.dt$$

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_0^n l_{x+t}\cdot\mu_{x+t}.dt$$

$$= \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\,\mu_{x+t}.\,dt \;.......\; (4)$$

Bila untuk persamaan (4) diambil n = 1, maka

$${}_1q_x = \int_0^n {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,.\,dt$$

$$q_x = \int_0^n {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,.\,dt$$

Untuk peluang ${}_{n|m}q_x$, pembaca (para mahasiswa) dapat menurunkan, yang mana

$$ {}_{n|m}q_x = \int_0^{n+m} {}_tp_x \quad \mu_{x+t}\, dt \; .... (5) $$

<u>Hampiran Tingkat Kematian Sesaat</u>

Dalam praktek kadang-kadang tingkat kematian sesaat μ sukar dihitung, rumus yang biasanya ditempuh adalah sebagai berikut:

pandang $\quad {}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}.dt}$

untuk $\quad n = 1$, maka didapat

$$ p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}.dt} $$

atau

$$ -\ln p_x = \int_0^1 \mu_{x+t}.dt $$

Integral ($\int_0^1 \mu_{x+t}.dt$) adalah merupakan pertengahan harga (mean value) tingkat kematian sesaat μ_{x+t} antara x dan x + 1, yang mana diasumsikan sama dengan $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, sehingga kita peroleh

$$ \mu_{x+\frac{1}{2}} \doteq -\ln p_x $$

Tidak berbeda dengan soal tersebut, untuk ${}_2p_{x-1}$ pandang

$$ {}_2p_{x-1} = e^{-\int_{-1}^1 \mu_{x+t}\, dt} $$

maka

$$ \int_{-1}^1 \mu_{x+1} = -\ln(p_{x-1} \cdot p_x) $$

ini disebabkan bahwa

$$\int_{-1}^{1} \mu_{x+t}\,dt = \int_{-1}^{o} \mu_{x+t}\,dt + \int_{o}^{1} \mu_{x+t}\,dt$$

$$\doteqdot -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

dan $\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} = 2\,\mu_x$

oleh sebab itu

$$2\,\mu_x \doteqdot -(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

$$\mu_x \doteqdot -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \ln p_{x-1} \cdot p_x$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \cdot \left(\frac{l_x}{l_{x-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{l_{x+1}}{l_{x-1}}$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln l_{x+1} - \ln l_{x-1})$$

Hampiran lain (misalnya l_x fungsi polinom berderajat 2), didapat dengan mempergunakan deret Taylor.

Dengan menggantikan $\frac{dl_x}{dx}$ (atau l'_x) pada persamaan (1) tingkat kematian sesaat μ_x

Pandanglah suatu fungsi polinom berderajat 2 maka:

$$l_{x+h} = l_x + hl'_x + \frac{h^2}{2!} l''_x$$

untuk $h = 1, \; l_{x+1} = l_x + l'_x + \frac{1}{2} l''_x$

$h = -1, \; l_{x-1} = l_x - l'_x + \frac{1}{2} l''_x$

Dari persamaan h = 1 dan h = -1, apabila dikurangkan untuk kedua persamaan tersebut, didapat

$$l_{x+1} - l_{x-1} = l'_x + l'_x$$

$$l'_x = \frac{1}{2} (l_{x+1} - l_{x-1})$$

$$\frac{dl_x}{dx} = \frac{1}{2} (l_{x+1} - l_{x-1})$$

Jadi untuk tingkat kematian sesaat μ_x, yang mana $\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$, dapat didekati dengan hampiran yaitu:

$$\mu_x = -\frac{1}{2l_x} (l_{x+1} - l_{x-1})$$

Cara pendekatan lain, dapat dilakukan dengan memakai relasi diferensial D dan beda operator Δ .

$$D = \log(1 + \Delta)$$

$$= \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots\ldots..$$

Sehingga tingkat kematian sesaat

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$$

$$= -\frac{1}{l_x} Dl_x$$

$$= -\frac{1}{l_x} \left(\Delta l_x - \frac{1}{2} \Delta^2 l_x + \frac{1}{3} \Delta^3 l_x \ldots.. \right)$$

$$= -\frac{1}{l_x} \left(d_x - \frac{1}{2} \Delta d_x + \frac{1}{3} \Delta^2 d_x \ldots.. \right)$$

Contoh:

Carilah hampiran tingkat kematian sesaat μ_x, yang mana l_x adalah fungsi polinom berderajat 4.

Jawab:

Dengan deret Taylor, untuk polinom berderajat 4

$$l_{x+h} = l_x + hl'_x + \frac{h^2}{2!} l''_x + \frac{h^3}{3!} l'''_x + \frac{h^4}{4!} l^{iv}_x$$

Untuk

$$h = -2 \text{ ----> } l_{x-2} = l_x - 2l'_x + 2l''_x - \frac{4}{3} l'''_x + \frac{2}{3} l^{iv}_x$$

$$h = -1 \text{ ----> } l_{x-1} = l_x - l'_x + \frac{1}{2} l''_x - \frac{1}{6} l'''_x + \frac{1}{24} l^{iv}_x$$

$$h = 1 \text{ ----> } l_{x+1} = l_x + l'_x + \frac{1}{2} l''_x + \frac{1}{6} l'''_x + \frac{1}{24} l^{iv}_x$$

$$h = 2 \text{ ----> } l_{x+2} = l_x + 2l'_x + 2l''_x + \frac{4}{3} l'''_x + \frac{2}{3} l^{iv}_x$$

Dari keempat persamaan tersebut didapat bahwa

$$l_{x-2} - l_{x+2} = -(4l'_x + \frac{8}{3} l'''_x)$$

$$l_{x-1} - l_{x+1} = -(2l'_x + \frac{1}{3} l'''_x)$$

$$\text{Akhirnya } l'_x = \frac{l_{x-2} - l_{x+2} - 8(l_{x-1} - l_{x+1})}{12}$$

maka

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{d_x}$$

$$= -\frac{1}{l_x} l'_x$$

$$= -\frac{l_{x-2} - l_{x+2} - 8(l_{x-1} - l_{x+1})}{12 l_x}$$

atau

$$\mu_x = \frac{1}{12l_x}\left(8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})\right)$$

$$= \frac{1}{12l_x}\left(7(d_{x-1} + d_x) - (d_{x-2} + d_{x+1})\right)$$

Contoh:
Dengan memakai hampiran dari fungsi polinom berderajat 2 dan 4, hitunglah μ_{40}, dimana l_x mengikuti tabel mortalitas CSO 1941.

Jawab:
Untuk l_x fungsi polinom berderajat 2.

$$\mu_x = -\frac{1}{2l_x}(l_{x+1} - l_{x-1})$$

$$\mu_{40} = -\frac{1}{2l_{40}}(l_{41} - l_{39})$$

$$= \frac{(l_{39} - l_{41})}{2l_{40}}$$

$$= -\frac{888504 - 877883}{2.883342}$$

$$= 0{,}006011$$

Untuk l_x fungsi polinom berderajat 4.

$$\mu_x = \frac{1}{12l_x}[8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})]$$

$$\mu_{40} = \frac{8(l_{39} - l_{41}) - (l_{38} - l_{42})}{12l_{40}}$$

$$= \frac{8(888504 - 877883) - (893382 - 872098)}{12.883342}$$

$$= 0{,}006007$$

Interpolasi Usia Pecahan

Pada umumnya usia x yang kita bicarakan, selalu dengan bilangan bulat, misalnya l_{43} (ingat l_{43} adalah jumlah orang yang hidup tepat berusia 43 tahun).
Sebagai pembaca (mahasiswa) tentunya saudara bertanya bagaimana jika usia itu pecahan?
Usia pecahan tersebut, pada prakteknya dapat diketahui dengan mempergunakan interpolasi linear.

Pandang l_x adalah jumlah orang yang hidup tepat berusia x tahun.
Untuk usia pecahan,

$$l_{x+t} \doteqdot (1-t).l_x + t.l_{x+1}$$

$$= l_x - t.l_x + t.l_{x+1}$$

$$= l_x - t(l_x - l_{x+1})$$

$$= l_x - t.d_x$$

dimana $0 \leqslant t \leqslant 1$ dan x usia bulat.

Dari persamaan tersebut ($0 \leqslant t \leqslant 1$), dapatlah diketahui ${}_tp_x$ dan ${}_tq_x$ yang mana sebagai berikut:

untuk $0 \leqslant t \leqslant 1$

maka $${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= \frac{l_x - t.d_x}{l_x}$$

$$= 1 - t \, . \, \frac{d_x}{l_x}$$

$$= 1 - t \, . \, q_x$$

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$$

$$= 1 - (1 - t \, . \, q_x)$$

$$= t \, . \, q_x$$

untuk tingkat kematian sesaat,

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{l_{x+t}} \quad \frac{dl_{x+t}}{d(x+t)}$$

sedangkan $\dfrac{dl_{x+t}}{d(x+t)} = \dfrac{dl_{x+t}}{dt}$

$$= \frac{d(l_x - t\,d_x)}{dt}$$

$$= -d_x$$

Jadi

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \quad \frac{dl_{x+t}}{d(x+t)}$$

$$= \frac{d_x}{l_{x+t}}$$

$$= \frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{l_x}{l_{x+t}}$$

$$= \frac{q_x}{t q_x}$$

$$= \frac{q_x}{1-t.q_x}$$

Contoh:

Buktikan bahwa $d_{x+t} = (1 - t)d_x + t \ . \ d_{x+1}$

Jawab:

$$d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}$$

$$= (1-t)l_x + t.l_{x+1} - (1-t).l_{x+1} - t.l_{x+2}$$

$$= (1-t)(l_x - l_{x+1}) + t(l_{x+1} - l_{x+2})$$

$$= (1-t).d_x + t.d_{x+1}$$

Jika ${}_tq_x = t.q_x$, $0 < t < 1$

buktikan bahwa

a. $\mu_{x+t} = \dfrac{q_x}{1-t.q_x}$

b. ${}_tp_x . \mu_{x+t} = q_x$

Jawab:

a. ${}_tq_x = t.q_x$ maka $l_{x+t} = l_x - t.d_x$

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= \frac{l_x - t.d_x}{l_x}$$

$$= 1 - t.q_x$$

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$$

$$= t . q_x$$

$$\mu_{x+t} = - \frac{1}{l_{x+t}} \frac{d(l_{x+t})}{d(x+t)}$$

$$= \frac{d_x}{l_x - t.d_x}$$

$$= \frac{q_x}{1-t.q_x}$$

b. $_tp_x \cdot \mu_{x+t} = (1 - t.q_x)(\frac{q_x}{1 - t.q_x})$

$= q_x$

Hukum Mortalitas

Hukum Mortalitas Gompertz

Pada tahun 1825, Gompertz menyatakan bahwa tingkat kematian sesaat

$$\mu_x = B\, c^x$$

dimana B dan c adalah tetapan positip.
Dari persamaan Gompertz itu, bila diintegralkan bahwa

$$\int_0^x \mu_t \, dt = \int_0^x B\, c^t \, dt$$

$$= [\frac{B\, c^t}{\ln c}]_0^x$$

$$= \frac{B\, c^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c}$$

$$= -(c^x - 1) \ln g$$

yang mana diambil $\ln g = \frac{-B}{\ln c}$

Jadi

$$\int_0^x \mu_t \, dt = \ln g^{c^x - 1}$$

oleh sebab itu $l_x = l_o . e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$

$$= l_o \cdot e^{\ln g^{(c^x - 1)}}$$

$$= l_o \cdot g^{(c^x - 1)}$$

$$= k\, g^{c^x}$$

untuk mana diambil $k = \frac{l_o}{g}$

Dengan adanya hukum mortalitas Gompertz, para pembaca (mahasiswa) dapat menurunkan bahwa

$${}_tp_x = g^{c^x(c^t - 1)}$$

<u>Hukum Mortalitas Makeham</u>

Hukum mortalitas, yang dinyatakan oleh Makeham tahun 1860 bahwa tingkat kematian sesaat

$$\mu_x = A + B\, c^x$$

sama seperti hukum mortalitas Gompertz, maka

$$\int_o^x \mu_t \, dt = \int_o^x (A + B\, c^x)\, dt$$

$$= Ax + \frac{B\, c^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c}$$

$$= -\ln s^x - \ln g^{c^x - 1}$$

yang mana diambil $-\frac{B}{\ln c} = \ln g$ dan

$$-A = \ln s$$

sehingga $l_x = l_o\, e^{-\int_o^x \mu_t \, dt}$

$$= l_o \cdot e^{\ln s^x + \ln g^{c^x - 1}}$$

$$= l_o \cdot s^x \cdot g^{c^x - 1}$$

atau

$$l_x = k\, s^x g^{c^x}$$

yang mana diambil $k = \dfrac{l_o}{g}$

untuk hukum mortalitas Makeham, peluang hidup

$${}_tp_x = s^t\, g^{c^x(c^t - 1)}$$

Perlu pembaca ketahui tetapan positif tersebut di atas besarnya adalah

$$0{,}001 < A < 0{,}003$$

$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1{,}08 < c < 1{,}12$$

Beberapa hukum mortalitas yang lain dan perlu diketahui oleh pembaca adalah sebagai berikut:

1. Hukum mortalitas Abraham de Moivre yang dinyatakan pada tahun 1825 bahwa

   $$l_x - k(w - x)$$

2. Hukum mortalitas deret ukur ganda (tahun 1867), bahwa tingkat kematian sesaat

   $$\mu_x = A + B\,c^x + M\,n^x$$

3. Hukum mortalitas Makeham II, dinyatakan pada tahun 1889, bahwa tingkat kematian

   $$\mu_x = A + H_x + B\,c^x$$

4. Hukum mortalitas Perk, dinyatakan pada tahun 1931, bahwa tingkat kematian sesaat

$$\mu_x = \frac{A + B\,c^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}$$

Contoh:

Carilah μ_x, jika diketahui $l_x = k\, s^x\, w^{x^2}\, g^{c^x}$

Jawab:

$$l_x = k\, s^x\, w^{x^2} \cdot g^{c^x}$$

$$\ln l_x = \ln k + x \ln s + x^2 \ln w + c^x \ln g$$

$$\frac{d(\ln l_x)}{dx} = \ln s + 2x \ln w + c^x \ln c \ln g$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\,\frac{dl_x}{dx}$$

$$= -\frac{d}{dx}(\ln l_x)$$

$$= -\ln s - 2x \ln w - c^x \ln c \ln g$$

Bila kita ambil $A = -\ln s$, $H = -2 \ln w$ dan $B = -\ln gc$

maka $\mu_x = A + Hx + Bc^x$

Persamaan tingkat kematian sesaat μ_x dalam contoh ini mengingatkan kita pada hukum mortalitas Makeham II.

4.1.2 Latihan 1

1. Jika diketahui ${}_np_x = \dfrac{x}{x + n}$

   carilah tingkat kematian sesaat μ_x.

2. Bila diketahui $\mu_x = ab^x + c\,d^x$
   Carilah l_x

3. Carilah l_x, bila $\mu_x = A \ln x$.

4. Jika diketahui $l_{40} = 7746$ dan $l_{41} = 7681$, hitunglah $\mu_{40\frac{1}{4}}$, dengan asumsi bahwa ${}_tq_x = t \cdot q_x$

5. Hitunglah $\mu_{40\frac{1}{4}}$, bila diketahui $l_x = 1000\sqrt{100-x}$.

4.1.2 Rangkuman

Pada bagian pertama modul ini, telah kita pelajari tingkat kematian sesaat μ_x, yang mana diasumsikan bahwa l_x kontinu.

Jadi jelaslah yang dimaksud dengan μ_x adalah tingkat kematian (peluang) pada saat tertentu yang amat pendek.

Dalam modul ini juga telah kita bahas apabila usia x adalah pecahan dan hubungannya dengan serta tingkat kematian μ_{x+t}.

4.1.3 Tes Formatif 1

1. Dengan memakai tabel mortalitas CSO 1941, hitunglah $\mu_{70\frac{1}{2}}$

   A. 0,05930
   B. 0,97035
   C. 0,06111
   D. 0,79835

2. Jika $l_x = 100\sqrt{(100-x)}$, hitunglah nilai hampiran dari μ_{84}.

   A. 0,0423
   B. 0,01327
   C. 0,7012
   D. 0,03127

3. Bila diketahui $l_{x+t} \doteq l_x - t.d_x$ untuk $0 \leqslant t \leqslant 1$, hitunglah ${}_{\frac{1}{4}}q_{25}$ dimana $l_{26} = 94957$, $l_{25} = 95106$ dan $l_{24} = 95263$.

   A. $\frac{1}{4}\left(\frac{149}{95106}\right)$

   B. $\frac{1}{4}\left(\frac{149}{94957}\right)$

C. $\frac{1}{4}\left(\frac{157}{95106}\right)$

D. $\frac{1}{4}\left(\frac{157}{95263}\right)$

4. Hitunglah sampai lima angka dibelakang koma dengan memakai tabel CSO 1941, $2\frac{1}{2}$ % tingkat kematian sesaat μ_{60}, bila l_x fungsi polinom berderajat dua.

A. 0,11724
B. 0,17821
C. 0,03451
D. 0,02589

5. Carilah l_x, jika diketahui $\mu_x = \frac{1}{100-x}$ dan ambil $k = \frac{l_o}{100}$

A. $\frac{k(100 - x)}{100}$

B. $k(100 - x)$

C. $k(1000 - 10x)$

D. $k(10x - 1000)$

4.1.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang ada di bagian belakang modul ini. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai:

90% - 100% = baik sekali
80% - 89% = baik
70% - 79% = cukup
- 69% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80% , Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

4.2 Kegiatan Belajar 2

ANUITAS KONTINU

4.2.1 Uraian dan Contoh

Sebelumnya RK.Sembiring Ph.D dalam modul Matematika Asuransi I, menyatakan bahwa anuitas yang pembayarannya m kali setahun diberi simbol $\ddot{a}^{(m)}$ atau $a^{(m)}$.

Bila anuitas tersebut dapat dibayarkan setiap saat dan jumlah pembayaran setahun adalah 1 maka kita berhadapan dengan apa yang disebut anuitas kontinu.

Simbol anuitas kontinu untuk berusia x adalah $\bar{a}_x$. Karena m dibayar setiap saat atau $m \longrightarrow \infty$ maka

$$\bar{a}_x \doteq a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta) \quad \ldots\ldots (6)$$

dan

$$\bar{a}_x \doteq a_x + \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

(biasanya yang sering dipakai adalah persamaan (7)).

Formula yang akurat (tepat) anuitas kontinu bila dinyatakan dalam bentuk integral adalah

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \; {}_tp_x \, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{D_{x+t}}{D_x} \, dt \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Selanjutnya kita definisikan simbol komutasi kontinu

$$\bar{D}_x = \int_0^1 D_{x+t} \, dt$$

dan

$$\bar{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}_{x+t}$$

$$= \int_0^\infty D_{x+t} \, dt$$

Maka dari persamaan (8) anuitas kontinu $\bar{a}_x$ dinyatakan dengan lambang komutasi kontinu,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{D_{x+t}}{D_x}\, dt$$

$$= \frac{\int_0^\infty D_{x+t}\, dt}{D_x}$$

$$= \frac{\bar{N}_x}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Sekarang pandang bahwa fungsi t yaitu D_{x+t} adalah linear untuk $0 \leqslant t \leqslant 1$, maka

$$\int_0^1 D_{x+t}\,.\, dt \doteq \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1})$$

$$= D_x + \frac{1}{2}$$

dan

$$\bar{D}_x \doteq \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1})$$

oleh sebab itu $\bar{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}_{x+t}$

$$= \int_0^\infty D_{x+t}\,.\,dt$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2}(D_{x+t} + D_{x+t+1})$$

$$= \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2} D_x + N_{x+1}$$

$$= N_x - \frac{1}{2} D_x$$

$$= \frac{1}{2} (N_x + N_{x+1})$$

Sama seperti di atas (analog), para pembaca dapat menurunkan untuk anuitas-anuitas

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt$$

$$= \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt$$

$$= \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}$$

Dengan adanya relasi-relasi di atas, yaitu

$$\bar{N}_x = \frac{1}{2} D_x + N_{x+1}$$

$$= N_x - \frac{1}{2} D_x$$

maka para pembaca (mahasiswa) dapat membuktikan formula hampiran untuk $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, yang mana sering digunakan dalam praktek adalah:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{1}{2} (a_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|})$$

Contoh:
Hitunglah $\bar{a}_{47}$ dengan mempergunakan tabel mortalitas CSO 1941.

Jawab:
Dari persamaan (9) dinyatakan bahwa

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}$$

dan $\bar{N}_x = N_x - \frac{1}{2} D_x$

maka dari tabel mortalitas CSO 1941

$D_{40} = 328983,61$

$N_{40} = 6708572,66$

sehingga

$$\bar{a}_{40} = \frac{6708572,66 - \frac{1}{2}(328983,61)}{328983,61}$$

$$= 19,89181$$

Asuransi Kontinu

Dalam asuransi kita asumsikan bahwa uang pertanggungan (uang asuransi) dibayar pada akhir tahun polis. Akan tetapi dalam prakteknya pembayaran uang asuransi tersebut tidaklah demikian, pembayaran tidak dilakukan pada akhir tahun kematian polis.

Simbol yang diberikan, dimana asuransi dibayarkan pada saat meninggal adalah $\bar{A}_x$.

Peluang dari sesorang berusia x yang meninggal diantara usia x + t dan x + t δt adalah ${}_tp_x\ \mu_{x+t}\,\delta t$, dengan mendiskontokan, didapat

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

Jadi jelaslah bahwa nilai tunai ataupun premi tunggal bersih $\bar{A}_x$ didapat dengan mengalikan faktor diskonto v^t (ingat $v = \frac{1}{1+i}$), kemudian diintegralkan atas t dari 0 sampai ∞

Para pembaca diharapkan membuka kembali modul sebelumnya misalnya apa yang diartikan dengan ${}_tP_x \cdot \mu_{x+t}$

Untuk simbol komutasi kontinu

$$\bar{C}_x = \int_0^1 D_{x+t}\ \mu_{x+t}\, dt$$

$$\bar{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}_{x+t}$$

maka didapat bahwa

$$\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ (10)$$

tidak berbeda dengan cara di atas, pembaca dapat menurunkan untuk

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{n|}\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

Jika kita asumsikan bahwa ${}_tq_x = t \cdot q_x$ maka ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t} = q_x$, yang mana mengakibatkan

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|} \doteq q_x \int_0^1 v^t\, dt$$

$$= q_x \cdot \frac{iv}{\delta}$$

$$= \frac{i}{\delta} A^{\,1}_{x:\overline{1}|}$$

Hampiran lain didapatkan dengan mengasumsikan bahwa pembayaran asuransi dilakukan pada pertengahan tahun sehingga

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|} \doteq (1+i)^{\frac{1}{2}} A^{\,1}_{x:\overline{1}|} \quad \text{atau} \quad \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|} \doteq \left(1+\frac{i}{2}\right) A^{\,1}_{x:\overline{1}|}$$

Bentuk umum dari hampiran tersebut adalah

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{i}{\delta}\, A^{\,1}_{x:\overline{n}|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

atau

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \doteq (1+i)^{\frac{1}{2}}\, A^{\,1}_{x:\overline{n}|} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

atau

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \doteq \left(1+\frac{i}{2}\right) A^{\,1}_{x:\overline{n}|} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dari beberapa hampiran tersebut, yang sering dipakai dalam praktek adalah persamaan (13).

Perlu untuk pembaca ketahui (dan turunkan) bahwa

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \neq \left(1+\frac{i}{2}\right) A_{x:\overline{n}|}$$

akan tetapi

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + \bar{D}_{x+n}}{D_x}$$

atau

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \doteq \left(1+\frac{i}{2}\right) A^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Contoh:

Dengan mengikuti hukum mortalitas Gompertz, buktikan bahwa $\bar{A}_x = \mu_x \bar{a}'_x$, dimana $\bar{a}'_x$ adalah anuitas kontinu dengan $i' = \frac{1+i}{c} - 1$.

Jawab:

Asuransi kontinu $\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \; {}_tp_x \cdot \; \mu_{x+t} \; dt$

$$= \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x \cdot B\, c^{x+t}\; dt$$

dimana menurut Gompertz $\mu_x = B\, c^x$

sehingga $\bar{A}_x = B\, c^x \int_0^{\infty} (vc)^t \; {}_tp_x \; dt$

Jika diambil vc = v', maka asuransi kontinu

$$\bar{A}_x = \mu_x \bar{a}'_x$$

Pengambilan vc = v' mengakibatkan

$$vc = v'$$

$$\frac{1}{1+i} \cdot c = \frac{1}{1+i'}$$

$$1 + i' = \frac{1+i}{c}$$

yang mana $i' = \dfrac{1+i}{c} - 1$

Contoh:
Buktikan bahwa $\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x$, dimana $\delta = \ln (1+i)$

Jawab:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \frac{d}{dt} (-{}_tp_x) \, dt$$

Dengan memakai teori integral parsial

$$\bar{A}_x = [-v^t \cdot {}_tp_x]_0^\infty - \int_0^\infty (-{}_tp_x) \, v^t \ln v \, dt$$

$$= 1 - \delta \bar{a}_x$$

dimana $-\ln v = \ln (1+i) = \delta$

Cadangan Kontinu

Cadangan premi untuk asuransi kontinu, penulisannya tidak berbeda, bila kita bandingkan dengan cadangan premi asuransi tidak kontinu. Misalkan untuk asuransi seumur hidup (whole life policy), cadangan prospektif asuransi seumur hidup tidak kontinu adalah

$${}_t V(A_x) = A_{x+t} - P(A_x) \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

sedang untuk asuransi seumur hidup kontinu, cadangan kontinu adalah

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{x+t}$$

$$= \left[\frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}} - \bar{P}(\bar{A}_x) \right] \cdot \bar{a}_{x+t}$$

$$= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)] \cdot \bar{a}_{x+t}$$

Perlu diingatkan cadangan retrospektif untuk asuransi seumur hidup

$${}_t V(A_x) = P(A_x) \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

atau

$${}_t V_x = P_x \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

Cadangan retrospektif dari asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi setiap saat (kontinu) $\bar{P}(\bar{A}_x)$ adalah

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = P \cdot \frac{(\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t})}{D_{x+t}}$$

Selanjutnya saudara mahasiswa dapat menurunkan cadangan kontinu dari beberapa jenis asuransi, misalnya:

Asuransi Dwiguna

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}_{x+n:\overline{n-t|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\, \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, \qquad t < n$$

$$= 1 \qquad , t = n$$

Asuransi berjangka

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}'_{x+n:\overline{n-t|}} - \bar{P}(\bar{A}'_{x:\overline{n|}})\, \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, \qquad t < n$$

$$= 1 \qquad , t = n$$

Contoh:

Hitunglah ${}_{20}V(\bar{A}_{50})$ dengan memakai tabel mortalitas CSO 1941 dan tingkat bunga aktuaria 2,5%

Jawab

$${}_{t}V(\bar{A}_{x}) \doteq (1 + \frac{i}{2})\ {}_{t}V_{x}$$

$${}_{20}V(\bar{A}_{50}) \doteq (1 + 0{,}0125)\ {}_{20}V_{50}$$

$$= 1{,}0125\ (1 - \frac{\ddot{a}_{70}}{\ddot{a}_{50}})$$

$$= 0{,}502164$$

Premi Kontinu

Tarip premi asuransi jiwa dibayarkan sesuai dengan keinginan sipemegang polis (sitertanggung), yang mana dapat dibayarkan dalam tahunan, enambulanan (semesteran), bulanan ataupun mingguan.

Pandang simbol dibawah ini,

$\bar{P}_{x}$ = Premi bersih kontinu asuransi seumur hidup. Uang asuransi (uang pertanggungan) dibayarkan pada akhir tahun polis.

$\bar{P}(\bar{A}_{x})$ = Premi bersih kontinu asuransi seumur hidup. Santunan (uang asuransi ataupun uang pertanggungan) dibayarkan segera pada saat tertanggung meninggal dunia.

Dari dua penulisan yang berbeda tersebut, dapatlah dikatakan pembayaran premi keduanya kontinu, yang mana dalam prakteknya tidak dilakukan.

Dari modul sebelumnya, kita ketahui bahwa

$$P(A_{x}) = P_{x}$$

$$= \frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x}}$$

$$= \frac{M_x}{N_x}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_x} - d$$

maka

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

$$= \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$$

$$= \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}$$

Tentunya pembaca masih ingat, bahwa $\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x$ tidak berbeda (selaras) dengan

$$A_x = 1 - d\, \ddot{a}_x$$

atau

$$A_x^{(m)} = 1 - d^{(m)}\, \ddot{a}_x^{(m)}$$

Untuk asuransi dwiguna, premi bersih kontinu diberi simbol $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, yang mana

$$\bar{P}(A_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{1 - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta$$

Nyatalah bahwa persamaan $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ menunjukkan penulisan yang tidak berbeda (selaras), antara

$$P(A_x) = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \quad \text{dengan} \quad \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta$$

atau secara umum penulisan $P = \frac{1}{\ddot{a}} - d$ dengan $\bar{P}(A) = \frac{1}{\bar{a}} - \delta$

Catatan

Beberapa perumusan premi kontinu dan diskrit yang perlu diketahui oleh para pembaca (mahasiswa) adalah sebagai berikut:

Jenis Asuransi	Kontinu (Fully Continuous)	Diskrit (Fully Discrete)	Semi Kontinu
Dwiguna	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$	$P_{x:\overline{n}|}$	$\bar{P}_{x:\overline{n}|}$
Seumur Hidup	$\bar{P}(\bar{A}_x)$	P_x	$\bar{P}_x$
Berjangka	$\bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|})$	$P^{\,1}_{x:\overline{n}|}$	$P^{\,1}_{x:\overline{n}|}$

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}$$

$$\bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - M_{x+n}}$$

$$\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$\overline{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$\overline{P}_x = \frac{A_x}{\bar{a}_x}$$

$$= \frac{M_x}{\bar{N}_x}$$

4.2.2 <u>Latihan 2</u>

1. Buktikan bahwa

$$\overline{C}_x + \delta \overline{D}_x = D_x - D_{x+1}$$

Petunjuk:
Gunakan perumusan untuk $\overline{C}_x$ dan $\overline{D}_x$,
Serta jangan lupa δ

2. Buktikan

$$\left(1 + \frac{d\bar{a}_x}{dx}\right) \overline{P}(\bar{A}_x) - \frac{d\bar{A}_x}{dx} = \mu_x$$

Petunjuk:
Carilah dulu $\dfrac{d\bar{a}_x}{dx}$ serta $\dfrac{d\bar{A}_x}{dx}$

3. Buktikan bahwa

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \doteq (1 + \tfrac{i}{2})\, A^{\,1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

Petunjuk:
Gunakan relasi $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A$ dan ingat bahwa

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

4. Hitunglah $\bar{A}_{x:\overline{1}|}$

5. Dengan mengikuti hukum mortalitas Makeham ($\mu_x = A + Bc^x$) maka $\bar{A}_x$ dan tingkat bunga aktuaria baru i' berturut-turut adalah sama dengan

$$A\bar{a}_x + (\mu_x - A)\bar{a}'_x \quad \text{dan} \quad \frac{1+i}{c} - 1$$

Catatan: Untuk soal no. 5, Latihan 2 $\bar{a}'_x$ adalah anuitas kontinu dengan tingkat bunga aktuaria baru i'.

4.2.3 Rangkuman

Dari bagian terakhir modul ini terlihat bahwa anuitas kontinu maupun asuransi kontinu misalnya mempunyai rumus yang sepadan dengan bentuk diskrit.

Adanya kesepadanan tersebut, diharapkan kepada pembaca (mahasiswa) untuk membuka kembali bentuk diskrit dari Matematika Asuransi I, yang mana untuk menguasi pelajaran tersebut.

4.2.4 Tes Formatif 2

1. Nyatakanlah dalam simbol komutasi

$${}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$$

A. $\dfrac{\bar{M}_x + \bar{M}_{x+30} + \bar{D}_{x+30}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+30}}$

B. $\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+30} + \bar{D}_{x+30}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+20}}$

C. $\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+20} + \bar{D}_{x+20}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+30}}$

D. $\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+20} + \bar{D}_{x+20}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+20}}$

2. Nyatakanlah dalam simbol komutasi

$\bar{A}_{35:\overline{20|}}$

A. $\dfrac{\bar{M}_{35} - \bar{M}_{45} + \bar{D}_{45}}{D_{35}}$

B. $\dfrac{\bar{M}_{35} - \bar{M}_{45} + \bar{D}_{45}}{D_{35}}$

C. $\dfrac{(1 + \frac{i}{2})(M_{35} - M_{45}) + \frac{1}{2} D_{45}}{D_{35}}$

C. $\dfrac{(1 + \frac{i}{2})(M_{35} - M_{45}) + D_{45}}{D_{35}}$

3. Jika diasumsikan $l_x = (100 - x)$ untuk $0 \leqslant x \leqslant 100$. Hitunglah $\bar{A}^{\;1}_{40:\overline{25|}}$. Bila tingkat bunga sesaat $\delta = 0{,}05$.

A. 0,237832
B. 0,416667
C. 0,092099
D. 0,055321

4. $_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})$ adalah sama dengan

A. $\bar{A}_{50}$

B. $\bar{A}_{50:\overline{10|}} - \bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{10|}}) \cdot \bar{a}_{50:\overline{10|}}$

B. $\bar{A}_{50:\overline{10|}} - P(\bar{A}_{40:\overline{20|}}) \cdot \bar{a}_{50:\overline{10|}}$

D. $\bar{A}_{50:\overline{10|}}$

5. Premi bersih tahunan yang dibayarkan kontinu selama 20 tahun, yang mana menyediakan santunan asuransi sampai usia 60 tahun dari seseorang yang berusia 25 tahun.

A. $_{20}\bar{P}\,^{1}_{25:\overline{35|}} = \dfrac{M_{25} - M_{60}}{\bar{N}_{25} - \bar{N}_{45}}$

B. $_{20}P\,^{1}_{25:\overline{35|}} = \dfrac{M_{25} - M_{60}}{N_{25} - N_{45}}$

C. $_{20}P\,^{1}_{25:\overline{35|}} = \dfrac{\bar{M}_{25} - \bar{M}_{60} + D_{60}}{\bar{N}_{25} - \bar{N}_{45}}$

D. $\dfrac{\bar{M}_{60}}{\bar{N}_{60}}$

4.2.5 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang ada di bagian akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100% = baik sekali
80% - 89% = baik
70% - 79% = cukup
- 69% = kurang

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih Anda dapat melanjutkan Modul berikutnya. **Bagus!** Tetapi kalau kurang dari 80% Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

5. Kunci Jawaban Tes Formatif

5. Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1. C
2. D
3. A
4. D
5. B

5. Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. B
2. D
3. A
4. C
5. A

6. Referensi

Jordan Jr, Chester, Wallace. Life Contingencies.,Published by The Society of Actuaries., 1975.

Hooker, P.F. dan Longley Cook, L.H., Life and Other Contingencies., Published for the Institute of Actuaries and the Faculty of actuaries., 1973.