MODUL 1

Pendahuluan Teori Peluang

R.K. Sembiring, Ph.D.

PENDAHULUAN

Asuransi berasal dari kata *assurance* atau *insurance*, yang berarti jaminan atau pertanggungan. Hidup penuh dengan ketidakpastian dan manusia selalu berusaha memperkecil atau meminimalkan ketidakpastian tersebut. Pendidikan yang Anda tempuh sekarang ini juga merupakan salah satu usaha Anda untuk memperkecil ketidakpastian dalam usaha Anda mendapatkan jaminan pekerjaan sesuai dengan keinginan Anda. Pendidikan yang makin tinggi merupakan jaminan atas lapangan pekerjaan yang makin luas.

Seorang kepala keluarga tentunya ingin berusaha menjamin kesejahteraan keluarganya. Kesejahteraan tersebut akan terganggu bila dia jatuh sakit, cacat ataupun dia meninggal. Sebagian dari jaminan kesejahteraan dapat diperoleh bila si kepala keluarga mengasuransikan dirinya; asuransi dapat berupa asuransi kesehatan, asuransi untuk biaya sekolah anak, ataupun santunan asuransi bila dia pensiun ataupun meninggal. Begitupun seorang pengusaha tentunya ingin memperkecil risiko kerugian dalam usahanya. Risiko seperti itu dapat diperkecil dengan mengasuransikan, misalnya gedung tempatnya berusaha, kendaraan yang dia pakai dalam usahanya, malahan bahan dagangannyapun dapat diasuransikan. Jadi banyak hal yang dapat diasuransikan. Dalam dunia yang makin maju, bidang asuransipun terlihat telah terlibat dalam banyak segi kehidupan . manusia. Perusahaan asuransipun telah tumbuh menjadi perusahaan besar di dunia dan bersamaan dengan itu permintaan akan tenaga ahli asuransi seperti aktuaris semakin meningkat pula. Di Indonesia sudah ada suatu ketentuan dari pemerintah dalam hal ini Departemen Keuangan, bahwa setiap perusahaan asuransi harus memiliki aktuaris sendiri. Peraturan ini masih lama, baru akan dapat dilaksanakan di Indonesia mengingat masih langkanya tenaga aktuaris.

Usaha asuransi, pada dasarnya, adalah usaha bersama, mirip koperasi. Dalam usaha ini, setiap anggota, disebut pemegang polis asuransi, menyetor sejumlah uang pada suatu dana yang akan digunakan untuk menolong anggotanya yang kena musibah yang diperkirakan akan terlalu berat dipikul oleh anggota yang kena musibah tersebut. Musibah tersebut dapat berupa penyakit, kecelakaan yang mengakibatkan cacat dan ataupun kematian terutama kepala keluarga sebagai pencari nafkah yang tentunya akan mengakibatkan penurunan penghasilan keluarga yang ditinggalkan.

Asuransi menjadi penting karena musibah yang dicakupnya tak dapat ditentukan dengan tepat kapan munculnya. Kita tahu, bahwa semua orang akan meninggal pada suatu ketika. Masalahnya ialah kapan seseorang itu akan meninggal. Orang akan sakit atau mendapat kecelakaan pada suatu ketika, tetapi kapan musibah itu muncul tak dapat ditentukan. Karena tak dapat ditentukan maka tentunya sulit mempersiapkan diri terhadap musibah yang akan mucul. Karena itu, sebaiknya siap-siap jauh sebelumnya, ibarat pepatah sedia payung sebelum hujan. Salah satu bentuk payung itu adalah asuransi.

Kendati kematian seseorang tak dapat diramalkan dengan tepat terjadinya, secara statistika peluang meninggalnya seseorang dapat dihitung dengan cukup tepat. Pengamatan menunjukkan bahwa. Pada umumnya, peluang meninggalnya seseorang naik bersama dengan makin tuanya orang tersebut. Dari sekelompok besar orang, secara statistika dapat ditentukan dengan cukup teliti, peluang seseorang berumur tertentu, yang dipilih secara acak, akan meninggal dalam waktu setahun, misalnya. Memang tidak dapat ditentukan siapa dari kelompok itu yang akan meninggal, tetapi jumlahnya yang akan meninggal dapat ditaksir dengan cukup tepat. Anda mungkin mengatakan, soal hidup matinya seseorang di tangan Tuhan. Baik, Tapi rupanya Tuhan juga menciptakan dunia ini dengan aturan tertentu, dan bila kita mampu membaca aturan tersebut maka kita dapat membuat perkiraan atau ramalan. Itulah tugas para ilmuwan, dalam hal ini statistikawan. Perkiraan atau ramalan tadi sayangnya (atau, barangkali, syukuri) jarang sekali tepat, tapi cukup mendekati keadaan sesungguhnya. Ini karena alam (Penciptanya) tidak membukakan semua rahasianya pada manusia ataupun manusia belum mampu membaca seluruh rahasia alam.

Pada pelajaran ini hanya akan dibicarakan asuransi jiwa; asuransi kerugian seperti kebakaran, kecelakaan lalu lintas dan sebagainya tidak dibahas di sini.

Pada dasarnya, asuransi jiwa dipengaruhi oleh tiga faktor yaitu:

1. peluang seseorang umur tertentu akan meninggal dalam jangka waktu tertentu;
2. bunga uang, yaitu tingkat bunga yang diperoleh oleh dana yang diinvestasikan;
3. yaitu biaya memasarkan polis dan biaya administrasi lainnya di kantor untuk mengurus polis tersebut.

Ketiga faktor tersebut di atas akan melibatkan perhitungan matematika yang cukup banyak dan karenanya hanya dapat dipahami oleh orang yang memiliki latar belakang matematika yang lumayan.

Setelah memelajari modul. ini para mahasiswa dapat memahami tujuan dan dasar asuransi serta dasar-dasar teori peluang yang diperlukan.

Setelah memelajari modul ini para mahasiswa diharapkan dapat menjelaskan dengan kata-kata sendiri tujuan dan faktor-faktor yang mendasari perhitungan asuransi jiwa. Begitupun, para mahasiswa diharapkan dapat menggunakan pengertian peluang, nilai harapan, dan teorema peluang yang dibahas dalam modul ini.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian Peluang

Teori peluang (probabilitas) sesungguhnya lahir dari meja judi, karena itu tidaklah heran bila contoh yang sering dipakai juga berasal dari meja judi, seperti dadu, kartu bridge, atau malahan rolet.

Contoh 1

Ambil satu mata uang logam yang setangkup, salah satu sisinya sebut muka (M), dan sisi yang lain sebut belakang (B). Bila uang logam tersebut dilantunkan maka hampir pasti salah satu dari kedua sisi M atau B akan terletak sebelah atas (muncul). (Pada pelajaran ini kita akan menganggap hanya M atau B yang dapat muncul). Kita katakan bahwa peluang muncul M atau B adalah setengah, dalam lambang matematika, $P(M)=P(B) = \frac{1}{2}$ .Dalam penulisan ini P menyatakan peluang.

Contoh 2

Misalkan suatu dadu yang berisi enam, masing-masing sisinya diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Bila dadu itu setangkup maka peluang muncul, salah satu bilangan di atas adalah $\frac{1}{6}$ ditulis $P(1) = \ldots = P(6)\ \frac{1}{6}$

Contoh 3

Sekarang masalahnya dibuat sedikit lebih rumit. Misalkan satu uang logam dilantunkan dua kali, berapakah peluangnya ke dua lantunan menghasilkan M? Masalahnya akan lebih mudah dipahami bila hasil ke dua lantunan dituliskan: MM, MB, BM, BB; huruf pertama menyatakan hasil lantunan pertama sedangkan yang ke dua menyatakan hasil lanturan ke dua. Bila uang tersebut setangkup maka keempat hal di atas mempunyai peluang muncul yang sama, yaitu $\frac{1}{4}$ (atau, $\frac{1}{2} . \frac{1}{2}$). Jadi peluang ke dua lantunan muncul M, $P(MM) = \frac{1}{4}$

Contoh4

Dengan jalan yang mirip sama dapat dihitung peluang hasil satu dadu di Lantun dua kali sebagai berikut. Pasangan hasil ke dua lanturan adalah: (1,1), (1,2),…, (1,6), (2,1), (2,2),…(2,6),…(6,1), (6,2),(6,3)…(6,6). Jumlah tiap pasangan: 2, 3,4, 5, 6, 7, 3,4, 5, 6, 7, 8,4, 5, 6, 7, 8, 9, 5, 6, 7, 8, 9 10, 6, 7, 8, 9 , 10 , 11 , 7, 8, 9, 10, 11, 12. Cara lebih sederhana menyajikan hasil ini ialah dalam bentuk apa yang disebut distribusi frekuensi, sebagai berikut:

Jumlah	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Frekuensi muncul	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

Jumlah seluruh frekuensi 36 (= 6 x 6), yaitu ada 36 cara (pasangan) yang dapat muncul bila satu dadu di lantun dua kali berturutan. Tiap pasangan muncul. dengan peluang yang sama. Jumlah pasangan sebesar 5, misalnya, dihasilkan oleh pasangan (1,4), (2,3), (3,2), dan (4,1), jadi oleh empat pasangan. Karena itu, peluang mendapat jumlah 5 bila satu dadu dilantunkan dua kali adalah $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Dengan jalan yang sama, peluang mendapat jumlah 10 adalah $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, dan seterusnya.

Uraian di atas mengantar kita pada perumusan pengertian peluang yang lebih umum. Jadi peluang jumlah 10 muncul adalah $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Pengertian peluang di atas didefinisikan sebagai nisbah (hasil bagi) banyaknya cara suatu kejadian dapat muncul dengan banyaknya cara seluruh kejadian (dari suatu percobaan, misalnya, lantunan dua dadu sekaligus) yang dapat muncul. Sayangnya, pengertian peluang seperti ini sulit sekali diterapkan pada banyaknya masalah yang lebih rumit, khususnya dalam menghitung peluang meninggal seseorang. Untuk itu dibutuhkan definisi yang lebih luas cakupannya. Definisi ini bersifat empiris sedangkan yang sebelumnya bersifat a priori.

Misalkan, suatu uang logam di lantunkan 100 kali (ini sama saja dengan 100 uang yang persis sama dilantunkan sekali). Sebutlah pelantunan mata uang ini sebagai suatu percobaan. Jadi percobaan ini terdiri atas lantunan suatu uang logam 100 kali, ataupun seratus uang logam dilantunkan sekali.

Kendatipun uang logam tersebut bila munculnya M atau B dalam lantunan suatu uang logam, atau munculnya jumlah 11 sebagai hasil lantunan dua dadu sekaligus kita namakan sebagai suatu kejadian, maka pada setiap kejadian dapat dikaitkan suatu bilangan yang disebut peluang sebagai berikut. Misalkan suatu kejadian dapat muncul dalam m cara dan gagal muncul dalam n cara maka peluang munculnya kejadian tersebut adalah:

$$p = \frac{m}{m+n}\bullet$$

dan peluang gagalnya muncul kejadian tersebut adalah:

$$q = \frac{m}{m+n}$$

Perhatikan bahwa p + q = 1.

Contoh 5.

Kejadian munculnya jumlah 10 bila dua dadu dilantunkan sekali bersama-sama, dapat muncul dalam 3 cara; jadi m untuk kejadian tersebut 3, sedangkan n, banyaknya cara 10 gagal muncul., adalah 33 (= 36 - 3) betul-betul setangkup, sukar diharapkan dalam 100 lanturan menghasilkan 50 M (atau 50 B). Hasilnya akan berkisar atau bervariasi sekitar 50 M. Artinya kalau percobaan itu kita ulangi berkali-kali, dan tiap percobaan terdiri atas 100 lantunan, maka sebagian dari hasilnya akan memberikan lebih sedikit dari 50 M dan sebagian lagi lebih banyak dari 50 M. Bila dalam suatu percobaan dengan 100 lanturan uang tadi 45 kali muncul muka, maka taksiran peluang muncul muka pada satu lanturan uang tadi adalah $\frac{45}{100}$ atau dengan lambang, taksiran P(M) = 0,45. Bila pada percobaan berikutnya ternyata muncul muka sebanyak 52 kali, maka taksiran P(M) dari percobaan kedua ini adalah 0,52. Setiap percobaan akan memberikan taksiran P(M) yang agak berlainan, tapi tiap taksiran akan berkisar pada bilangan 0,5. Bila percobaan tersebut dilakukan tak terhingga kali banyaknya, maka dalam keadaan P(M) = 0,5.

Secara umum bila dalam percobaan ke i, di lakukan n_i kali usaha (suatu usaha, misalnya, melantun satu uang logam sekali) dan kejadian A muncul m_i kali (jadi, gagal sebanyak n_i – m_i kali) maka taksiran terjadinya A pada percobaan ke i , nyatakan dengan p_i, adalah:

$$p_i = \frac{m}{n\bullet}$$

Menurut definisi empiris,

$$P\ (A) = \lim_{i \to \infty} p_i. = \lim_{i \to \infty} m_i\ /n_i$$

Dalam praktik, tentunya, p(A) tak dapat dihitung, karena tak mungkin melakukan percobaan tak terhingga kali banyaknya. Karena itu, kita harus merasa puas dengan taksirannya saja. Taksirannya akan makin lebih baik bila banyaknya usaha n makin besar.

Contoh 6

Misalkan, dari satu juta penduduk yang tepat berumur 20 tahun, sebanyak 996.500 yang mencapai 21 tahun setahun kemudian. Suatu taksiran peluang seseorang dari kelompok tersebut akan mencapai usia 21 tahun adalah:

$$\frac{996.500}{1.000.000} = 0,9665$$

Taksiran ini tentunya cukup baik karena didasarkan atas n = 1.000.000, suatu bilangan yang besar. Peluang ini berlaku untuk sembarang anggota ke lompok tadi, tanpa memperhatikan siapa orangnya dan keadaan kesehatannya.

Contoh 7

Misalkan, pada contoh 6 di atas terdapat keterangan lebih lanjut bahwa 100 dari ke 3500 yang meninggal sebelum mencapai usia 21 tahun adalah karena kecelakaan lalu lintas, 50 orang karena sakit paru-paru, 20 karena narkotik. Sekarang kita dapat menyatakan bahwa peluang seseorang yang berusia 20 tahun akan meninggal sebelum usia 21 tahun adalah:

$\frac{100}{1.000.000} = 0,0001$ karena kecelakaan lalu lintas, $\frac{50}{1.000.000} = 0,00005$

karena sakit paru-paru, dan $\frac{20}{1.000.000} = 0,00002$ karena narkotik.

Bila p menyatakan peluang terjadinya suatu kejadian dan q menyatakan peluangnya kejadian tersebut tidak terjadi, maka selalu berlaku p + q = 1, dan $0 \leq p \leq 1$. Bila p = 0 (q = 1) maka dikatakan bahwa kejadian tersebut tidak mungkin terjadi sedangkan bila p = 1 (q = 0) dikatakan bahwa kejadian itu pasti terjadi.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Satu uang logam dilantunkan empat kali, tuliskan semua cara dan peluangnya yang mungkin muncul!
2) Satu kantong berisi 5 kelereng putih, 6 kelereng merah, dan 4 kelereng hitam. Bila satu kelereng diambil secara acak, berapakah peluangnya kelereng itu berwarna putih?
   berwarna putih atau merah?
3) Apakah bedanya kedua pengertian peluang cara apriori dan empiris?
4) Dari 100.000 yang baru lahir pada waktu yang bersamaan, 85.000 mencapai usia 20 tahun dan 40.000 mencapai usia 60 tahun. Hitunglah peluang seorang bayi .yang baru lahir akan meninggal, sebelum usia 20 tahun, Berapakah peluang seseorang berusia 20 tahun akan meninggal sebelum usia 60tahun.
5) Di suatu kota terdapat 10 dari 3000 rumah musnah karena api tiap tahun. Berapakah peluang suatu rumah di kota itu tidak musnah karena api selama setahun?
6) Tiga dadu dilatun sekaligus. Berapakah peluangnya jumlah bilangan yang muncul 9?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Nyatakan, misalnya, muka dan belakang dengan M dan B. Tuliskan semua kombinasi M dan B yang mungkin muncul dan anggap tiap Lantunan bebas satu sama lain.

2) Tiap kelereng berpeluang sama untuk terambil dan peluang tiap warna. sebanding dengan banyaknya kelereng warna tersebut.
3) Gunakan cara pada contoh 6 dan 7
4) Tuliskan semua kejadian yang memberikan jumlah 9 dan kemudian hitung jumlah semua kejadian yang dapat muncul

RANGKUMAN

Telah dijelaskan dua pendekatan mendefinisikan pengertian peluang: cara a priori dan empiris. Dalam pelajaran ini cara empiris akan digunakan untuk seterusnya. Dalam lantunan sebuah uang logam, P(M) = P(B) = $\frac{1}{2}$ ditentukan berdasarkan anggapan bahwa uang logam tersebut betul-betul setangkup sehingga wajarlah bila peluang mendapat muka dan belakang sama. Dalam praktiknya tentunya sulit sekali memperoleh uang logam, seperti itu sehingga anggapan bahwa P(M) = P(B) = 1, mungkin tidak lagi cocok, Lantas bagaimana harus menentukan P(M) dan P(B)? Kita hanya dapat menaksirkannya dengan menggunakan pendekatan empiris

Namanya juga taksiran, jadi tentunya tak dapat diharapkan tepat sekali sama dengan nilai sesungguhnya, Nilai sesungguhnya jarang akan kita tahu persis, hal itu merupakan rahasia alam. Apa dapat kita kerjakan ialah menghampiri nilai tersebut (aproksimasi). Hal ini mungkin mengecewakan banyak pembaca yang selalu menuntut jawaban yang tepat untuk semua pertanyaan. Jawaban yang tepat jarang ada di alam (paling-paling di kepala orang) dan karena itu belajarlah puas dengan aproksimasi.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Tiga uang logam dilantunkan bersama-sama. Berapakah peluang mendapat paling sedikit 2 M….

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{2}$

2) Tiga dadu dilantunkan bersama-sama. Berapakah peluang mendapat jumlah muka 5?

A. $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

B. $\frac{3}{6^3}$

C. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{13}{16}$

3) Lima uang logam dilantunkan bersama-sama. Berapakah peluang mendapat tak lebih dari 3M?

A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{5}{16}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{13}{16}$

4) Dari 80.000 orang yang berusia 25 tahun, 300 meninggal karena sakit dan 10 diantaranya karena kecelakaan dalam setahun. Berapakah peluang seorang anggota kelompok tersebut meninggal dalam kecelakaan setahun….

A. 0,000125
B. 0,00375
C. 0,03333
D. 0,999875

5) Dua dadu dilantunkan dua kali. Berapakah peluang muncul 4 pada lantunan pertama dan 3 pada lantunan ke dua….

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{6}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Nilai Harapan

Misalkanlah si Ali dan si Badu bertaruh dengan melantunkan sebuah uang logam. (Di Indonesia berjudi dilarang pemerintah. Judi dalam contoh ini hanyalah khayalan, jadi penulis yakin tidak melanggar peraturan). Bila M muncul Badu membayar Ali Rp10, sedangkan bila B muncul, Badu menerima Rp 5 dari Ali. Misalkan, uang logam itu tidak setangkup dan P(A) = 0,4, sedangkan P(B) = 0,6. Dalam sekali lantunan si Ali dapat mengharapkan menang Rp10 dengan peluang 0,4 dan sekali Rp5 dengan peluang 0,6. Jadi, dalam sekali lantunan si Ali dapat mengharapkan menang rata-rata sebanyak

$$(10)(0,4) + (-5)(0,6) = 4 - 3 = 1 \text{ rupiah}.$$

Dalam contoh ini menang diberi tanda +, sedangkan kalah -. Begitu pula, si Badu rata-rata menang sebesar

$$(-10)(0,4) + (5)(0,6) = - 4 + 3 = - 1 \text{ rupiah}.$$

Kita katakan bahwa si Ali mempunyai harapan menang sebesar + 1rupiah, sedangkan si Badu mempunyai harapan menang sebesar - 1 rupiah (kalah 1 rupiah), Kita dapat memandang judi di atas secara sepihak saja, misalnya dari pihak si Ali saja. Jadi bila M muncul maka si Ali mendapat 10 rupiah, sedangkan bila B muncul dia mendapat -5 rupiah. Secara lebih umum, bila M muncul dengan peluang p maka si Ali mendapat m rupiah sedangkan bila sebaliknya dia mendapat n rupiah, jadi si Ali mempunyai harapan menang sebesar

$$pm + (1 - p)n$$

Bilangan ini sering pula disebut sebagai nilai harapan.

Selanjutnya, misalkan dari suatu peristiwa peluang mendapatkan nilai-nilai n_1, n_2, n_3, … masing-masing adalah P_1' P_2' P_2' P_3 … maka nilai harapan peristiwa tersebut adalah n_1

$p_1 n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 \ldots$

$$= \sum_{i=1} p_i n_i$$

Contoh 1

Misalkan, dalam lantunan sebuah dadu si Ali mendapat 10 rupiah bila bilangan 1 muncul, sebelah atas dan mendapat - 3 rupiah (membayar 3 rupiah) bila bilangan lainnya sebelah atas, berapakah nilai harapannya bila dadu dimisalkan setangkup?

Peluang si Ali mendapat 10 rupiah i, sedangkan peluang kalah 3 - rupiah sebesar %', jadi nilai harapannya adalah (10)(* + (-3)(6) = - %.

Contoh 2

Ambil sekotak kartu bridge yang berisi 52 kartu yang terkocok secara sempurna. Si Ali menarik sebuah kartu dan mendapat:

100 rupiah bila dia mendapat Ace,

10 rupiah bila dia mendapat King, dan

-10 rupiah bila dia mendapat kartu lainnya.

Berapakah nilai harapannya?

Dalam sekotak kartu bridge terdapat 4 Ace (*spade*, *heart*, *diamond*, dan *club*) dan juga 4 King dengan warna yang sama. Jadi, peluang menarik Ace $\frac{4}{52}$ dan peluang menarik King juga $\frac{4}{52}$ peluang menarik kartu lainnya

(52 - 8)/52 = $\frac{44}{52}$

Jadi, nilai harapan si Ali

$$(100)\left(\frac{4}{52}\right) + (10)\left(\frac{4}{52}\right) + (-10)\left(\frac{44}{52}\right) = 0.$$

Suatu judi dengan nilai harapan nol dianggap judi yang jujur, umumnya judi tidak jujur, artinya nilai harapan bandar selalu lebih besar dari nol, karena itu bandar jarang sekali kalah.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Si Ali dan Badu melantun dua uang logam sekaligus. Bila yang muncul keduanya muka atau keduanya belakang maka Ali menerima Rp 100 dari si Badu, sebaliknya maka si Ali membayar Rp100 pada si Badu. Hitunglah nilai harapan keduanya!
2) Sebuah dadu 9 di lantun 100 kali, berapakah nilai harapan mendapat bilangan 57?
3) Bila si Ali hidup sampai akhir tahun maka dia membayar Rp110 pada p suatu perusahaan asuransi, sedangkan bila dia meninggal perusahaan akan membayar pewarisnya Rp95 pada akhir tahun tersebut. Bila peluang si Ali meninggal sebelum akhir tahun 0,1, berapakah nilai harapan si Ali dan perusahaan asuransi?
4) Suatu dadu dilantunkan, berapakah nilai harapan dari bilangan yang muncul.
5) Sepuluh potong kertas diberi nomor dari 1 sampai 10 kemudian digulung dan dimasukkan dalam satu kantong. Tiga orang bernama A, B, dan C secara bergantian menarik satu gulungan kertas secara acak dan orang yang mendapat bilangan terbesar menerima Rp10,80. Si A mengambil gulungan terlebih dahulu dan ternyata mendapat bilangan 6. Berapa nilai harapan tiap orang?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Tuliskan ke dua kejadian yang membuat si Ali menang dan hitung peluangnya, kemudian gunakan pengertian nilai harapan.
2) Pertanyaan ini sama saja dengan berapa kalikah Anda mengharapkan bilangan 5 muncul, dalam 100 kali lantunan?
3) Bila pembayaran Rp.110,- dianggap bernilai negatif maka yang Rp. 95,- menjadi positif dan sebaliknya.
4) Bilangan (nilai) pada sisi dadu adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, masing-masing bilangan mempunyai peluang untuk muncul.

5) A mendapat Rp10,80 bila B dan C keduanya mendapat gulungan bertuliskan bilangan antara 1 dan 5. Cari peluang B dan C mendapat bilangan lebih kecil dari 6. Begitu pula, agar si B dia harus

RANGKUMAN

Nilai harapan menyangkut apa yang disebut distribusi peluang, yang tentunya sudah Anda pelajari dalam pelajaran Statistika. Jumlah seluruh peluang dalam suatu distribusi adalah 1. Sesungguhnya, nilai harapan adalah jumlah seluruh hasil kali peluang dengan nilai yang diperolehnya.

Bila suatu peristiwa memberikan nilai:

n_1 Dengan peluang p_1
n_2 Dengan peluang p_2
. .
. .
. .
n_K dengan peluang $\frac{P_k}{1}$

maka nilai harapan peristiwa tersebut adalah $n_1p_1+n_2p_2+n_kp_k$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_1 p_j$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Si Ali melantunkan sebuah uang logam dua kali. Bila dalam ke dua lantunan muncul M dia mendapat 10 rupiah, bila dalam lantunan pertama muncul M dan lantunan kedua B dia mendapat 5 rupiah dalam hal lainnya dia tidak mendapat apa-apa. Berapakah nilai harapannya?
   A. 0
   B. 1,25
   C. 2,5
   D. 3,75

2) Sepuluh orang ibu melakukan arisan bersama. Tiap ibu menyetor 10 rupiah dan seluruh uang yang terkumpul kemudian diundi sehingga setiap orang mempunyai peluang yang sama untuk menang. Ibu yang menang mendapat seluruh uang. Berapakah nilai harapan tiap orang?
   A. -10 + (0,1)(100) = 0
   B. (- 10)(0,9) + (90)(0,1) = 0
   C. 10 - (0,1)(100) = 0
   D. (10)(0,9) - (90)(0,1) = 0

3) Si Ali membuat perjanjian dengan suatu perusahaan asuransi sebagai berikut:
   Bila dia tidak sakit sampai akhir tahun maka dia membayar Rp10 pada perusahaan sedangkan bila dia sakit perusahaan akan membayarnya Rp1000 sebagai biaya pengobatan. Peluangnya sakit, sampai akhir tahun di perkirakan 0,01. Berapakah nilai harapannya?
   A. -10 + (0,01)(1000) = 0
   B. (- 10)(0,99) + (0,01)(1000) = 0,1
   C. 10 - (0,01) (1000) = 0
   D. 10(0,99) - (0,0l) (1000) = 9,8

4) Sebuah dadu dilantun. Bila bilangan genap yang muncul si Ali mendapat Rpl0.,bila bilangan 6 yang muncul dia mendapat tambahan Rp60. Berapakah dia harus membayar bila bilangan ganjil yang muncul agar judi tersebut adil (nilai harapan 0)?
   A. Rp15
   B. Rp30
   C. Rp45
   D. Rp90

5) Dari pengalaman yang lalu, dari 10 perlombaan kuda A menang 2 kali. Si Ali membeli lotere Rp10 dan memegang kuda A. Berapakah hadiahnya paling sedikit, agar nilai harapan si A positif?
   A. Rp 8
   B. Rp 16
   C. Rp 40
   D. Rp 80

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Peluang Lanjutan

Berikut ini akan dibicarakan tiga teorema mengenai peluang tanpa bukti. Teorema ini akan di pakai dalam modul selanjutnya dan buktinya dapat Anda peroleh dalam pelajaran statistika.

Dua kejadian atau lebih dikatakan saling meniadakan bila tidak lebih dari satu daripadanya yang dapat terjadi dalam satu peristiwa. Sebagai contoh. terjadinya muka dan belakang dalam satu lantunan uang logam adalah saling meniadakan. karena hanya salah satu dari keduanya yang dapat muncul dalam suatu lantunan, Begitupun kejadian munculnya salah satu sisi dalam suatu lantunan dadu saling meniadakan.

Dua kejadian dikatakan saling bebas bila terjadinya salah satu tidak memengaruhi terjadi tidaknya kejadian yang lainnya. Sebagai contoh, satu uang logam dilantunkan dua berturutan. Bila tiap lantunan dipandang sebagai suatu kejadian maka kedua kejadian tersebut saling bebas , karena apa yang muncul pada lantunan pertama sama sekali tidak memengaruhi apa yang muncul pada lantunan yang ke dua.

Kejadian yang saling meniadakan tentunya tidak bebas satu sama lain karena bila salah satu terjadi maka yang lainnya pasti tidak terjadi

Teorema 1

Bila P_1, P_2, P_3, …., Pn merupakan peluang terjadinya n kejadian yang saling meniadakan. Maka peluang salah satu dari padanya akan terjadi adalah:

$$p_1+p_2+p_3 \dots +p_n$$

Contoh 1

Pandanglah percobaan melantun sebuah dadu sekali. Kejadian munculnya sisi bernomor 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 saling meniadakan. Peluang terjadinya salah satu adalah:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

Jadi, salah satu daripadanya pasti terjadi.

Kita tentunya juga dapat hanya memandang kejadian munculnya bilangan 2, 4,dan 6 dalam contoh ini tadi. Ketiga kejadian terakhir inipun saling meniadakan, jadi peluang terjadinya salah satu diantaranya adalah:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Sesungguhnya ini sama saja dengan peluang munculnya bilangan genap dalam lantunan sebuah dadu.

Teorema 2

Bila P_1, P_2, P_3, … , P_n merupakan peluang terjadinya n kejadian yang saling bebas, maka peluang terjadinya seluruh kejadian tersebut adalah:

$$P_1 \,.\, P_2 \,.\, P_3 \,.\, \ldots \,.\, P_n$$

Contoh 2

Misalkan dua dadu dilantunkan, Misalkan A kejadian muncul, bilangan genap pada dadu pertama dan B kejadian muncul, bilangan yang lebih dari 5. Maka P(A) = $\frac{3}{6}$ dan P(B) = 4/6. Kedua kejadian saling bebas, sehingga

$$P(A.B)= P(A)\ .\ P(B)= \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Contoh3

Misalkan peluang si Ali dan si Badu hidup paling sedikit setahun lagi, masing-masing, 0,8 dan 0,9. Berapakah peluangnya

a) keduanya hidup paling sedikit setahun lagi?
b) paling sedikit seorang akan meninggal?

Jawab

a) Misalkan kejadian meninggalnya si Ali dan si Badu merupakan dua kejadian yang saling bebas, Jadi peluang keduanya akan hidup paling sedikit setahun lagi adalah (0,8)(0,9) = 0,72.
b) Paling sedikit seorang meninggal berarti salah seorang atau keduanya mereka meninggal dan keduanya merupakan kejadian yang saling meniadakan. Sekarang pandanglah kejadian berikut:

   si Ali hidup 0,8, si Ali meninggal 0,2,
   si Badu hidup 0,9, si Badu meninggal 0,1,

   P (Ali hidup dan Badu meninggal) = (0,8)(0,1) = 0,08

P (Ali meninggal dan Badu hidup)	= (0,2)(0,9) =	0,18
P (keduanya meninggal)	= (0,2)(0,1) =	0,02
P (keduanya hidup)	= (0,8)(0,9) =	0,72
		1,00

Sekarang terlihat bahwa jawaban untuk soal b) dapat diperoleh dengan dua cara. Cara pertama dengan menjumlahkan ketiga peluang pertama di atas (ke tiga kejadian tersebut saling meniadakan):

$$0{,}08 + 0{,}18 + 0{,}02 = 0{,}28.$$

Cara ke dua, dengan memandang kejadian di a) dan di b) saling meniadakan dan jumlahnya terlihat sama dengan 1. Jadi, jawab untuk b) adalah :

$$1 - 0{,}72 = 0{,}28$$

Teorema 3

Bila peluang terjadinya kejadian pertama p_1 dan peluang terjadinya kejadian ke dua setelah kejadian pertama terjadi adalah p_2 maka peluang terjadinya kejadian pertama dan ke dua dalam urutan seperti itu adalah. $p_1 . p_2$.

Contoh 4

Si Ali dan si Badu melantun suatu uang logam secara bergantian dan yang mendapat muka terlebih dahulu dinyatakan menang. Bila Ali mendapat giliran pertama, berapakah peluang Badu menang?

Jawab

Ada bermacam-macam cara bagi si Badu untuk menang. Dia menang bila pada giliran pertama si Ali mendapat B dan Badu mendapat M, atau pada giliran pertama keduanya mendapat dan pada giliran ke dua si Ali masih mendapat B tapi Badu mendapat M, dan seterusnya. Kalau digambarkan maka kejadian yang memberikan Badu menang adalah:

Urutan	Peluang
1) BM	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
1) BB.BM	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
1) BB.BB.BM	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$
1) BB.BB.BB.BM	$\left(\frac{1}{2}\right)^8$

Semua kejadian ini saling meniadakan, jadi peluangnya dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

Peluang si Ali menang, tentunya, 1 - $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Hasil ini dapat pula Anda periksa sendiri dengan bekerja seperti di atas

Contoh 5

Peluang seseorang berusia 20 tahun dan seorang lainnya berusia 40 tahun keduanya akan hidup 20 tahun lagi adalah 0,6. Dari 50.000 orang yang hidup pada usia 20 tahun, 3000 diantaranya akan meninggal sebelum berusia 25 tahun. Hitunglah peluang seseorang yang sekarang berusia 25 tahun akan meninggal sebelum mencapai usia 60 tahun.

Jawab

Untuk menyingkat penulisan, misalkan 1_x = jumlah orang yang tepat berusia x. Jadi diketahui 1_{20} = 50.000 orang dan 1_{25}= 50.000 - 3000 = 47.000

orang. Untuk menghitung peluang seseorang yang (tepat) berusia 25 tahun akan meninggal sebelum usia 60 tahun, kita memerlukan data mengenai jumlah orang yang berusia 25 tahun (1_{25}) dan jumlah orang yang meninggal dari 125 sebelum berusia 60 tahun, yaitu 125 – 160. Peluang yang ingin dicari adalah:

$$(1_{25}\text{-}1_{60})/1_{25}$$

yaitu banyaknya yang meninggal dari orang yang berusia 25 tahun sebelum mencapai 60 tahun dibagi dengan banyaknya orang yang berusia 25 tahun. Kita masih perlu menghitung 1_{60}. Misalkan lagi ${}_{n}P_{x}$ = peluang seseorang (tepat) berusia x akan hidup mencapai usia x + n, maka diketahui

$${}_{20}P_{20} \;.\; {}_{20}P_{40} = 0{,}6.$$

Perhatikan, kedua peluang ini dikalikan karena kejadian seseorang berusia 20 tahun akan hidup 20 tahun lagi dan seseorang lainnya berusia 40 tahun akan hidup 20 tahun lagi dianggap merupakan kejadian yang saling bebas. Tapi kita juga dapat memandangnya sebagai: peluang seseorang berusia 20 tahun akan hidup dua puluh tahun lagi (jadi mencapai usia 40 tahun) adalah ${}_{20}P_{20}$ dan peluang orang tersebut akan mencapai usia 60 tahun bila dia mencapai usia 40 tahun adalah ${}_{20}P_{40}$, jadi menurut teorema 3, peluang seseorang berusia 20 tahun akan mencapai usia 60 tahun adalah:

$$40P20 = 20P20 \;.\; 20P40 = 0{,}6.$$

Jadi, 160 = 120 . 40p20 = (50.000)(0,6) = 30.000. Peluang yang dicari adalah:

$$\frac{47.000-30.000}{47.000} = \frac{17}{47}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tiga dadu dilantunkan sekaligus. Carilah peluangnya jumlah bilangan yang muncul paling banyak 9.

2) Dua kartu diambil dari sekotak kartu bridge. Berapakah peluang paling sedikit satu kartu adalah ace? Paling sedikit satu kartu heart? Paling satu kartu berwarna merah?
3) Tiga kartu diambil dari sekotak kartu bridge. Berapakah peluang ketiganya ace? Salah satu ace, salah satu lagi King dan satunya lagi 10?
4) Si Ali dan Badu bermain catur, Dari data mengenai permainan mereka di waktu lalu, 3 dari 5 papan yang tidak remis dimenangkan si Ali Berapakah peluang si Badu menang paling sedikit 2 dari 3 papan berturutan bila remis tidak dihitung?
5) Dari catatan administrasi suatu universitas, 5% mahasiswa tidak lulus suatu pelajaran tertentu. Bila 6 mahasiswa pengikut kuliah tadi diambil secara acak, berapakah peluangnya tepat dua orang tidak lulus?
6) Peluang tepat satu dari tiga orang yang masing-masing berusia 20, 35, dan 50 tahun akan hidup 15 tahun lagi ialah 0,092, peluang ketiganya akan meninggal dalam waktu 15 tahun adalah 0,006. Bila peluang seseorang berusia 20 tahun akan meninggal sebelum usia 35 tahun adalah 0,1, hitunglah peluang bahwa orang itu akan hidup mencapai usia 65 tahun.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Hitung peluang jumlah bilangan yang muncul tepat 3, tepat 4,dan seterusnya. Semua kejadian ini saling meniadakan.
2) Tiap kotak kartu bridge berisi 4 ace, 13 heart dan setengahnya berwarna merah, sedangkan setengahnya lagi berwarna hitam.
3) Ambillah kartu secara berurutan, kemudian gunakan teorema 3.
4) Tuliskan semua kejadian yang memberikan semua si Badu menang tepat 2 kali dan 3 kali, kemudian peluang seluruh kejadian jumlahkan.
5) Tuliskan semua kombinasi dari 6 mahasiswa dengan dua diantaranya tidak lulus dan cari peluang tiap kombinasi.
6) Gunakan lambang seperti pada contoh 14, kemudian gunakan ke tiga teorema yang telah dibahas (Jawab: 0,504).

RANGKUMAN

Inti dari Kegiatan Belajar 3 ini adalah ketiga teorema dalam bagian ini, Teorema 1 menjelaskan sifat kejadian yang saling meniadakan (*mutually exclusive*), teorema 2 mengenai kejadian yang saling bebas dan teorema 3 mengenai kejadian yang bersyarat. Teorema 3 sering ditulis sebagai:

$$P\left(A.\,B\right) = p(A)\ .\ P(B|A),$$

A.B menyatakan kejadian A dan B terjadi bersama-sama, sedangkan $B|A$ berarti -terjadinya kejadian B bila diketahui A telah terjadi. Dalam teorema 3, P_1 = P(A) dan p2 = P$\left(B|A\right)$. Perhatikan bahwa bila A dan B saling bebas maka P$\left(B|A\right)$= P(B) sehingga P(A.B) =P(A).P(B), jadi sesuai dengan teorema 2.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Lima kartu diambil dari sekotak kartu bridge. Berapakah peluang kelimanya heart?

   A. $\frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{50}.\frac{10}{49}.\frac{9}{48}$

   B. $\left(\frac{13}{52}\right)^5$

   C. $\left(\frac{1}{13}\right)^5$

   D. $\frac{5}{13}$

2) Peluang seseorang berusia 18 tahun akan hidup 10 tahun 0,95 dan peluangnya akan hidup 30 tahun 0,75. Carilah peluang seseorang berusia 28 tahun akan meninggal sebelum berusia 48 tahun….
   A. $\frac{4}{19}$
   B. $\frac{4}{25}$
   C. $\frac{57}{80}$
   D. $\frac{15}{19}$

3) Peluang seseorang berusia 20 tahun akan hidup 20 tahun lagi 0,9 dan peluang seseorang berusia 40 tahun akan hidup 10 tahun lagi 0,8. Berapakah peluang seseorang berusia 20 tahun akan hidup 30 tahun lagi?
   A. 0,09
   B. 0,18
   C. 0, 72
   D. 0,8

4) Pada soal nomor 3, berapakah peluang seseorang berusia 20 tahun akan meninggal antara usia 40 dan 50 tahun?
   A. 0,08
   B. 0, 18
   C. 0,72
   D. 0,8

5) Enam orang melantun suatu uang logam. secara berturutan. Yang pertama mendapat muka memperoleh suatu hadiah. Berapakah peluang orang keempat menang?
   A. $\frac{1}{16}$
   B. $\frac{4}{63}$
   C. $\frac{16}{63}$
   D. $\frac{32}{63}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D (Tuliskan semua cara yang mungkin yang dihasilkan 2 M dan 3 M)
2) C (Tuliskan semua kombinasi ketiga dadu yang menghasilkan jumlah 5)
3) D
4) A
5) A

Tes Formatif 2

1) D (Cari peluang mendapat 10 rupiah, peluang mendapat 5 rupiah dan peluang mendapat 0 rupiah),
2) B (Cari peluang membayar 10 rupiah dan ingat bahwa pemenang sesungguhnya tidak mendapat 100 rupiah, tapi 100 - 10 = 90 rupiah)
3) B (Sama dengan 2)
4) B (Misalkan, x yang di bayarkan si Ali bila bilangan ganjil yang muncul, hitunglah peluangnya membayar x).
5) C (Sama dengan 4)

Tes Formatif 3

1) A (Gunakan teorema 3).
2) A (Gunakan teorema 3).
3) C (Idem soal 2).
4) B
5) B (Perhatikan contoh 13).