

# Matriks

Prof. Dr. Sri Haryatmi Kartiko, M.Sc.



## PENDAHULUAN

---

Perkembangan ilmu pengetahuan dewasa ini menjadi semakin kuantitatif. Data numerik dengan skala besar, hasil pengukuran berupa angka sering dijumpai oleh para ilmuwan sewaktu melakukan survei, penyelidikan, atau percobaan. Korelasi data tidak memberikan arti yang besar tanpa disertai dengan kegiatan menganalisa dan memberikan interpretasi padanya. Cabang matematika yang mendukung keperluan untuk hal-hal seperti ini adalah aljabar matriks. Aljabar matriks telah berusia lebih dari satu abad, dan penggunaannya sangat luas, termasuk dalam statistika.

Matriks adalah array (daftar) bilangan yang terdiri dari baris-baris dan kolom-kolom. Aljabar matriks adalah aljabar khusus untuk array tersebut. Setiap array diperlakukan sebagai satu entitas yang membuatnya sangat berguna dalam menganalisa data, terutama data yang multi variabel. Dengan demikian, materi dalam modul ini, yaitu matriks, merupakan hal utama yang harus diketahui dalam mata kuliah Metode Statistika Multivariat.

Secara umum setelah selesai mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mengenal dan menggunakan operasi-operasi vektor dan matriks.

Secara khusus setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menggambar dan menghitung panjang vektor;
2. menghitung hasil kali dalam (*inner product*) dua vektor;
3. menghitung penjumlahan dan perkalian matriks;
4. mengenal hukum aljabar matriks;
5. mengenal matriks khusus;
6. menghitung invers suatu matriks; dan
7. menghitung eigen value dan eigen vektor suatu matriks;
8. melakukan operasi aljabar matriks dengan software R.

## KEGIATAN BELAJAR 1

## Matriks

Sebagai ilustrasi diberikan hasil pengamatan berupa persentase jaringan steril pada 4 generasi dari 3 populasi organisme sebagai berikut.

Tabel 1.1.  
Persentase Jaringan Steril

Generasi	Populasi		
	1	2	3
1	18	17	11
2	19	13	6
3	6	14	9
4	9	11	4

Angka-angka dalam tabel di atas dapat ditulis dengan array bilangan

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 11 \\ 19 & 13 & 6 \\ 6 & 14 & 9 \\ 9 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

dimana posisi/letak bilangan memberikan arti, misalnya elemen pada baris dua kolom tiga, yaitu 6 adalah persentase jaringan steril pada generasi 2, populasi 3.

Dalam hal ini baris menunjuk pada persentase jaringan steril pada generasi yang sama. Untuk semua populasi, kolom memberikan representasi persentase jaringan steril untuk populasi yang sama pada semua generasi. Sebagai contoh, baris pertama merupakan persentase jaringan steril untuk generasi pertama semua populasi, dan kolom pertama menunjukkan hasil pengamatan untuk semua generasi pada populasi 1. Array bilangan ini disebut *matriks*.

**Definisi 1.1**

Matriks  $\underline{A}$  bertipe  $r \times c$  adalah array (daftar) bilangan yang terdiri dari  $r$  baris dan  $c$  kolom, ditulis

$$\underline{A} = (a_{ij}) \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, r, \text{ dan } j = 1, 2, \dots, c.$$

atau

$$\underline{A}_{r \times c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1c} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ic} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rc} \end{bmatrix}$$

**Contoh**

$$\underline{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -7 & 2,73 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}, r = c = 4$$

$\underline{B}$  disebut matriks bujur sangkar.

Matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen “*off diagonal*” sama dengan nol, disebut **matriks diagonal**, misalnya

$$\underline{C}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 99 \end{bmatrix}$$

Dengan perkataan lain, matriks diagonal adalah matriks yang elemen-elemen bukan diagonalnya bernilai nol. Matriks diagonal dengan elemen

diagonal  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sering ditulis sebagai  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \text{diag} \{a_1, \dots, a_n\}$  atau  $\text{diag} (a_i)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Matriks bujur sangkar dengan elemen di atas atau di bawah diagonal bernilai nol disebut *matriks segitiga*, misal

$$\underline{B}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ disebut } \textit{matriks segitiga atas}.$$

$$\underline{E}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ disebut } \textit{matriks segitiga bawah}.$$

## A. NOTASI JUMLAHAN

Perhatikan beberapa notasi jumlahan berikut di bawah ini.

$$a_{\bullet j} = \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

$$a_{j\bullet} = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$a_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^m a_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n a_{j\bullet} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

### Definisi 1.2

Dimensi matriks  $r \times c$  adalah pasangan bilangan  $(r, c)$ ;  $r$  adalah dimensi baris dan  $c$  adalah dimensi kolom.

### Definisi 1.3

Dua matriks  $\underline{A}_{m \times k} = \{a_{ij}\}$  dan  $\underline{B}_{m \times k} = \{b_{ij}\}$  disebut sama, ditulis  $\underline{A} = \underline{B}$  bila dan hanya bila  $a_{ij} = b_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ .

Jadi, dua matriks disebut sama bila:

1. Dimensinya sama
2. Setiap elemen-elemen yang berkorespondensi sama

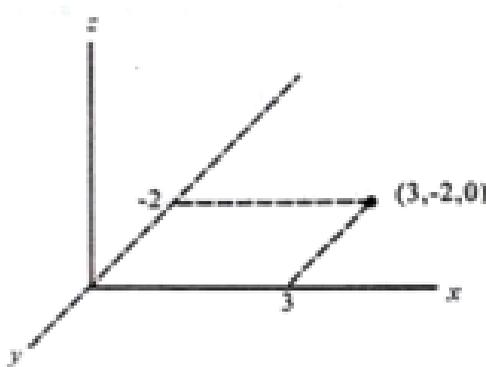
## B. VEKTOR DAN SKALAR

Matriks yang terdiri atas 1 kolom disebut vektor kolom dan matriks yang terdiri dari 1 baris disebut vektor baris.

Contoh vektor kolom berdimensi 3,

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang bila digambar dalam ruang berdimensi 3 adalah sebagai berikut



Gambar 1.1.

### Definisi 1.4

Barisan  $n$  bilangan riil  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dituliskan dalam 1 kolom disebut vektor kolom diberi notasi huruf tebal atau tanda  $\sim$  dibawahnya.

Contoh

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{atau}$$

$\underline{\underline{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  dengan vektor  $\underline{\underline{X}}'$  adalah transpose dari vektor  $\underline{\underline{X}}$ .

### Definisi 1.5

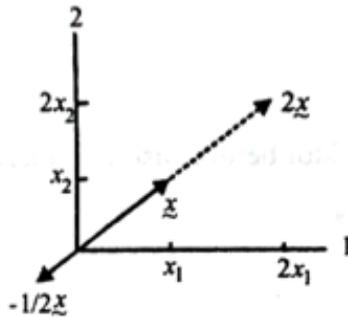
Kesamaan vektor

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ disebut sama dengan } \underline{\underline{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

bila dan hanya bila  $x_i = y_i$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

### Definisi 1.6

Perkalian dengan skalar. Misalkan  $c$  skalar sembarang,  $c\underline{\underline{x}}$  adalah vektor yang diperoleh dari perkalian setiap elemen  $\underline{\underline{x}}$  dengan skalar  $c$ .



Gambar 1.2

**Definisi 1.7**

Jumlah 2 vektor  $\tilde{x}$  dan  $\tilde{y}$  ditulis dengan  $\tilde{x} + \tilde{y}$  adalah vektor dengan elemen-elemennya  $x_i + y_i, i = 1, \dots, m$ .

**Definisi 1.8**

Ruang (*space*) dari semua  $m$  barisan bilangan riil dengan perkalian skalar dan penjumlahan vektor disebut *ruang vektor* berdimensi  $m$ .

**Definisi 1.9**

$\tilde{Y} = a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_2 + \dots + a_k \tilde{x}_k$  adalah kombinasi linear dari vektor-vektor  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ .

Himpunan semua kombinasi linear dari  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  disebut perluasan linear dari  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ .

**Definisi 1.10**

Himpunan vektor  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  disebut dependen linear bila terdapat  $k$  skalar  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  yang tidak semuanya nol demikian sehingga  $a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_2 + \dots + a_k \tilde{x}_k = 0$ . Apabila tidak demikian, himpunan vektor tersebut dikatakan independen linear.

**Definisi 1.11**

Panjang vektor kolom  $\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$  adalah

$$L_{\tilde{x}} = \|\tilde{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

Hal di atas juga berlaku untuk vektor baris, misalnya

$$\tilde{Y} = [4 \quad 6 \quad 7]$$

$$L_{\tilde{Y}} = \|\tilde{Y}\| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-7)^2}$$

**Definisi 1.12**

Sudut  $\theta$  antara 2 vektor  $\tilde{x}$  dan  $\tilde{y}$  yang masing-masing berdimensi  $m$  memenuhi

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m}{L_{\tilde{x}} L_{\tilde{y}}}$$

**Definisi 1.13**

Inner product (*dot product*) 2 vektor berdimensi  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  adalah

$$\tilde{x}'\tilde{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

$$\tilde{x}'\tilde{y} = \tilde{y}'\tilde{x}$$

$$L_{\tilde{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = \sqrt{\tilde{x}'\tilde{x}}$$

$$\cos \theta = \frac{\tilde{x}'\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{x}'\tilde{x}} \sqrt{\tilde{y}'\tilde{y}}}$$

$\tilde{x}$  dan  $\tilde{y}$  saling tegak lurus ( $\tilde{x} \perp \tilde{y}$ ) bila dan hanya bila  $\tilde{x}'\tilde{y} = 0$ .

**C. OPERASI MATRIKS****Definisi 1.14**

$$A_{m \times k} = \{a_{ij}\}$$

Transpose dari matriks  $A$ , diberi notasi  $A'$  adalah matriks berdimensi  $k \times m$  dengan elemen-elemennya adalah  $a_{ji}$

$$A'_{k \times m} = \{a_{ij}\}$$

*Catatan:*

$A'$  didapat dari  $A$  dengan menukar baris dengan kolom.

**1. Sifat-sifat Transpose**

a.  $(A')' = A$

b. Transpose vektor kolom adalah vektor baris dan sebaliknya

**Definisi 1.15**

Penjumlahan matriks

$$\underline{A} = \{a_{ij}\}, \underline{B} = \{b_{ij}\}, i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c$$

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = \{c_{ij}\}, \quad \text{dengan } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Definisi 1.16**

Pengurangan matriks

$$\underline{A}_{r \times c} = \{a_{ij}\}, \underline{B}_{r \times c} = \{b_{ij}\}$$

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-1)\underline{B} = \underline{C} = (c_{ij}) \text{ dengan}$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

**Definisi 1.16**

Trace suatu matriks bujur sangkar  $A = \{a_{ij}\}, ij = 1, 2, \dots, m$  adalah

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Sifat-sifat**

1.  $tr(A') = tr(A)$
2.  $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

**D. MATRIKS PARTISI**

$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ - & - & - & - & - & - \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \text{ disebut partisi dari matriks } \underline{B}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_{22} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ , dan  $B_{22}$  disebut submatriks dari  $B$ .

## E. TRANSPOSE MATRIKS PARTISI

$$[XY]' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A' & D' \\ B' & E' \\ C' & F' \end{bmatrix}$$

### 1. Teorema 1.1

Untuk sebarang matriks  $A, B, C$  dengan dimensi sama dengan skalar sebarang  $c$  dan  $d$  berlaku:

- $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$
- $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$
- $c(\underline{A} + \underline{B}) = c\underline{A} + c\underline{B}$
- $(c + d)\underline{A} = c\underline{A} + d\underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}'$
- $(cd)\underline{A} = c(d\underline{A})$
- $(c\underline{A})' = c\underline{A}'$

### Definisi 1.18

Matriks  $A$  dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya disebut dengan matriks bujur sangkar.

**Definisi 1.19**

Matriks bujur sangkar  $A$  disebut simetris bila  $A' = A$  atau  $\{a_{ij}\} = \{a_{ji}\}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ .

Contoh matriks simetris

$$\underline{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \underline{A}'$$

$$\underline{B}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a & c & e & f \\ c & b & g & d \\ e & g & c & a \\ f & d & a & d \end{bmatrix} = \underline{B}'$$

**Definisi 1.20**

Matriks identitas bertipe  $k \times k$  adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal sama dengan 1 dan elemen-elemen bukan diagonalnya sama dengan 0, diberi notasi  $\underline{I}_{k \times k}$ .

**Contoh**

$$\underline{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definisi 1.21**

Perkalian matriks

Hasil kali matriks  $\underline{A}_{m \times n} = \{a_{ij}\}$  dan  $\underline{B}_{n \times k} = \{b_{ij}\}$  adalah  $\underline{AB} = \{c_{ij}\}$  dengan

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj} \text{ dengan}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

**Catatan:**

Hasil kali  $\underline{AB}$  ada atau  $\underline{A}$  dan  $\underline{B}$  disebut konformabel bila jumlah kolom matriks  $\underline{A}$  = jumlah baris matriks  $\underline{B}$ .

Jadi, banyaknya baris matriks  $\underline{AB}$  = banyaknya baris  $\underline{A}$  dan banyaknya kolom matriks  $\underline{AB}$  = banyaknya kolom matriks  $\underline{B}$ .

## 2. Teorema 1.2

- a.  $c(\underline{AB}) = (c\underline{A})\underline{B}$
- b.  $\underline{A}(\underline{BC}) = (\underline{AB})\underline{C}$
- c.  $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$
- d.  $(\underline{B} + \underline{C})\underline{A} = \underline{BA} + \underline{CA}$
- e.  $(\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}'$
- f.  $\underline{AB}$  tidak selalu sama dengan  $\underline{BA}$
- g.  $\underline{AB} = \underline{0}$  tidak berarti  $\underline{A} = \underline{0}$  atau  $\underline{B} = \underline{0}$

Contoh untuk bagian g adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Contoh 1.1

*Gross Income* beberapa Negara tahun 1981 dan 1982 adalah sebagai berikut.

Tahun	United States	Canada	Australia	United Kingdom
1981	27	15	18	21
1982	32	14	21	30

*Gross Income* dalam bentuk matriks

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 27 & 15 & 18 & 21 \\ 32 & 14 & 21 & 30 \end{bmatrix}$$

Misal matriks pengeluaran adalah sebagai berikut

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 19 & 9 & 11 & 17 \\ 22 & 10 & 13 & 24 \end{bmatrix}$$

*Gross Profit* tahun 1981 untuk US adalah  $27 - 19 = 8$ , untuk Canada adalah  $15 - 9 = 6$ .

Matriks  $\underline{A} - \underline{B} = \{a_{ij} - b_{ij}\} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 4 \\ 10 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$  adalah *Gross Profit* dalam tahun 1981 dan 1982 untuk keempat negara.

**Contoh 1.2**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{O}_{2 \times 3} \text{ disebut matriks null.}$$

**Contoh 1.3**

Perhitungan jumlah uang yang diperlukan dalam masalah pembelian tikus, tikus putih, dan kelinci untuk percobaan di departemen A, dapat digunakan perkalian matriks.

Harga hewan berturut-turut 3, 1, dan 10 ribu rupiah. Banyak hewan yang diperlukan berturut-turut 50, 100, dan 30 ekor.

$$\underline{a}' = [3 \quad 1 \quad 10] \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Jumlah uang yang diperlukan =  $\underline{a}'\underline{x}$

$$= [3 \quad 1 \quad 10] \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 30 \end{bmatrix} = 3.50 + 1.100 + 10.30$$

$$= 550$$

**Contoh 1.4**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitung  $A + B$ ,  $2A+B$ ,  $A-B$ ,  $AB$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\underline{A} + \underline{B} &= \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2\underline{A} + \underline{B} &= \begin{bmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 10 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \underline{A} - \underline{B} &= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\underline{A}$  tidak bisa dikalikan dengan  $\underline{B}$  karena banyak baris pada matriks  $\underline{A}$  tidak sama dengan banyak kolom pada matriks  $\underline{B}$ .

### Contoh 1.5

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung  $\underline{A} + \underline{B}$ ,  $\underline{A}' + \underline{B}$ ,  $\underline{AB}$ ,  $\underline{BA}$ ,  $\underline{A}'\underline{B}$ ,  $5\underline{AB}$

Penyelesaian:

$\underline{A}$  dan  $\underline{B}$  tidak mempunyai dimensi sama maka  $\underline{A}$ , tidak dapat dijumlahkan dengan  $\underline{B}$ .

$$\begin{aligned}A' + B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$c_{11} = 3.3 + (-1)6 + 2.4 = 11$$

$$c_{12} = 3.4 + (-1).(-2) + 2.3 = 20$$

$$c_{21} = 4.3 + 0.6 + 5.4 = 32$$

$$c_{22} = 4.4 + 0.(-2) + 5.3 = 31$$

Jadi,  $AB = \begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 32 & 31 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -3 & 26 \\ 10 & -6 & 2 \\ 24 & -4 & 25 \end{bmatrix}$$

$A'B$  tidak konformabel karena  $\underline{A}_{3 \times 2}$  dan  $\underline{B}_{3 \times 2}$

$$5AB = \begin{bmatrix} 55 & 100 \\ 160 & 155 \end{bmatrix}$$

**Contoh 1.6**

$$\underline{A}'\underline{A} - \underline{A} = (\underline{A}' - I)\underline{A}$$

$$\underline{A}'\underline{B}\underline{A} - \underline{A}'\underline{A} = \underline{A}'(\underline{B} - I)\underline{A}$$

$$(\underline{A}\underline{B} - \underline{A})' = \underline{B}'\underline{A}' - \underline{A}' = (\underline{B}' - I)\underline{A}'$$

$$(c\underline{A}\underline{B} - \underline{A}c)' = c(\underline{A}\underline{B} - \underline{A})' = c(\underline{B}' - I)\underline{A}'$$

$$\begin{aligned} (\underline{A}\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{B} - \underline{A})' &= \underline{C}'\underline{B}'\underline{A}' - \underline{B}'\underline{A}' - \underline{A}' \\ &= (\underline{C}'\underline{B}' - \underline{B}' - I)\underline{A}' \end{aligned}$$

**Contoh 1.7**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung  $tr(\underline{A}\underline{B}), tr(\underline{B}\underline{A})$

**Penyelesaian:**

$$tr(\underline{A}\underline{B}) = tr \begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 32 & 31 \end{bmatrix} = 11 + 31 = 42$$

$$tr(\underline{B}\underline{A}) = \begin{bmatrix} 25 & -3 & 26 \\ 10 & -6 & 2 \\ 24 & -4 & 23 \end{bmatrix} = 25 - 6 + 23 = 42$$

**Contoh 1.8**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitung  $tr(\underline{A})$  dan  $tr(\underline{A}\underline{A}')$

Penyelesaian:

$$tr(\underline{A}) = 2 + 7 + 4 = 13$$

$$tr(\underline{A}\underline{A}') = tr \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr \begin{bmatrix} 21 & 35 & 18 \\ 35 & 89 & 38 \\ 18 & 38 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= 21 + 89 + 20 = 130$$

**LATIHAN**

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Untuk elemen matrik

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 & 3 \\ 3 & 13 & 10 & 2 & 6 \\ 11 & -9 & 0 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}$$

$$i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Tunjukkan bahwa

a)  $a_{\bullet 3} = 20$

b)  $a_{1\bullet} = 26$

$$c) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^4 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 4}}^5 a_{ij} = 20$$

$$d) \prod_{i=1}^3 a_{i4} = 12$$

2) Dari soal 1 tulis matriks tersebut

$$\underline{B} = \{a_{i+1, j+2}\} \text{ untuk } i = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, 3$$

$$\underline{C} = \{a_{2i, 2j-1}\} \quad i = 1, 2 \text{ dan } j = 1, 2, 3$$

$$\underline{D} = \{a_{i, j+i-j}\} \quad i = 2, 3 \text{ dan } j = 1, \dots, 4$$

3) Buktikan rumus di bawah ini dan tunjukkan kebenarannya dengan matriks dalam soal 1

$$a) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n 4a_{ij} = 4a..$$

$$b) \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2$$

4) Tulis matriks

$$\underline{D}_1 = \underline{D}\{1, 2, 3, 4\}$$

$$\underline{D}_2 = \underline{D}\{3^{i-2}\}, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\underline{D}_3 = \underline{D}\{i + 3^{i-2}\}, i = 1, 2, 3, 4$$

5) Untuk matriks  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung  $\underline{A}\underline{B}, \underline{A}'\underline{B}, (\underline{A} + \underline{A}')\underline{B}, tr(\underline{B}\underline{B}'), tr(\underline{B}'\underline{B})$

6) Apakah transpose dari

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Hitung  $\underline{A} + \underline{B}'$  dan  $\underline{A}' + \underline{B}$

Terangkanlah hubungan antara keduanya.

$$7) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buat partisi  $\underline{A}$  dan  $\underline{B}$  sebagai

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan  $\underline{A}_{21}$  dan  $\underline{B}_{21}$  mempunyai order  $1 \times 2$ .

Hitung  $\underline{A}\underline{B}$  dengan partisi dan tanpa partisi.

*Petunjuk Jawaban Latihan*

$$1) \quad \text{a) } a_{\bullet 3} = \sum_{i=1}^4 a_{i3} \rightarrow \text{jumlah dari kolom 3} \\ = 20$$

$$\text{d) } \prod_{i=1}^3 a_{i4} = (-2)(2)(-3) = 12$$

$$2) \quad \underline{B} = \{a_{i+1, j+2}\} \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3,$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \text{a) } \sum \sum 4a_{ij} = 4 \sum \sum a_{ij} = 4a..$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m a_i^2$$

Cocokkan dengan hitungan untuk A dalam soal 1.

$$4) \quad \underline{D} = D\{1, 2, 3, 4\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5) \quad \underline{A}\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B}' = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 12 & 17 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{A}' + \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 10 & 17 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}') = \underline{A}' + \underline{B}$$

7) Hitung  $\underline{A}\underline{B}$  tanpa partisi.

Dengan partisi

$$\underline{A}\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{12} & \underline{A}_{11}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{22} \\ \underline{A}_{21}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{21} & \underline{A}_{21}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Hasilnya perhitungan  $\underline{A}\underline{B}$  dengan atau tanpa partisi haruslah sama.



## RANGKUMAN

Sifat-sifat operasi matriks. Misalkan  $\underline{A}_{r \times c} = \{a_{ij}\}, i = 1, \dots, r; \quad j =$

$1, \dots, c$  dan  $\underline{B}_{r+c} = \{b_{ij}\}$ .

1.  $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$

$$\underline{C} = \{c_{ij}\} \text{ dengan } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2.  $\underline{A}_{r \times c} \underline{B}_{c \times s} = \underline{C}$

$$\underline{C} = \{c_{ij}\} \text{ dengan } c_{ij} = \sum_{e=1}^c a_{ie} b_{ej}$$

$$i = 1 \dots r$$

$$j = 1, \dots, s$$

$$l = 1, \dots, c$$

$$3. (\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}', (\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}'$$

$$4. \operatorname{tr}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{untuk } \underline{A} = \{a_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n.$$



### TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Untuk pertanyaan no. 1-5.  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$   $\underline{B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\underline{a}' = [1 \quad 5] \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1)  $\underline{a}'\underline{b} = \dots$

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10

2)  $\underline{b}\underline{a}' = \dots$

- A. 8
- B.  $\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
- C.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
- D. A, B, C tidak benar

3)  $\underline{A}\underline{b} = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$
- B.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

4)  $\vec{a}'\vec{B} = \dots$

A.  $[1 \ 13 \ 26]$

B.  $[1 \ 18 \ 2]$

C.  $\begin{bmatrix} 16 & 35 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$

D. A, B, C tidak benar

5) Tulis matriksa  $\vec{B} = \{b_{kt}\}$

$b_{kt} = k^{t-1}$   $k=1,2,3,4$  dan  $t=1,2,3$

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 27 \\ 1 & 16 & 64 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 4 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$

II. Untuk pertanyaan no. 6-8.  $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$   $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6)  $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}' = \dots$

A.  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})'$

B.  $(\underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}})'$

C.  $\underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}$

D. A, B, C tidak benar

7)  $tr(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = \dots$

A. -2

B. 8

C. 2

D. 3

8)  $tr(\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}') = \dots$

A. -2

B. 8

C. 2

D. 3

III. Untuk pertanyaan no. 9-10.  $\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{bmatrix}$

dengan  $p+q=1$

$$\underline{\underline{1}}' = [1 \quad 1 \quad 1]$$

9)  $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{1}} = \dots$

A.  $\underline{\underline{p}}$

B.  $\underline{\underline{1}}$

C.  $\underline{\underline{0}}$

D. A, B, C tidak benar

- 10)  $\tilde{P}^2 = \dots$
- A.  $p$
  - B.  $\tilde{P}\tilde{1}$
  - C.  $\tilde{p}^3$
  - D. A, B, C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
80 - 89% = baik  
70 - 79% = cukup  
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

## KEGIATAN BELAJAR 2

## Matriks Invers

Operasi aritmatik, yaitu jumlahan, pengurangan, dan perkalian dalam aljabar matriks telah Anda pelajari, tetapi pembagian belum. Sebagaimana Anda simak, perkalian matriks lebih kompleks dibanding perkalian skalar, demikian pula dengan operasi kebalikannya, yaitu pembagian.

Sebenarnya pembagian tidak ada dalam aljabar matriks. Konsep “membagi” dengan  $\underline{A}$  diganti menjadi konsep mengalikan dengan matriks yang disebut  $\underline{A}$  invers. Invers dari matriks bujur sangkar  $\underline{A}$  adalah matriks yang hasil kalinya dengan  $\underline{A}$  adalah matriks identitas. Matriks invers dari  $\underline{A}$  diberi simbol  $\underline{A}^{-1}$  dibaca sebagai invers dari  $\underline{A}$  atau  $\underline{A}$  invers. Ide tentang invers akan diperlihatkan dengan memperhatikan penggunaannya dalam menyelesaikan persamaan linear.

## A. ILUSTRASI

Diketahui persamaan linear nonhomogen

$$m + a = 14$$

$$m + d = 12$$

$$m - a = 6$$

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Bila kedua ruas digandakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

akan didapat hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dengan kata lain  $m = 10$ ,  $a = 4$  dan  $d = 2$ .

Terlihat bahwa persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian

$$\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I}_{3 \times 3}$$

$$\text{atau} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Untuk perhitungan matriks invers diperlukan *determinan* yang akan dibicarakan di bawah ini.

### Definisi 1.21

Determinan matriks bujur sangkar  $\underline{A}_{k \times k} = \{a_{ij}\}$  yang diberi notasi  $|\underline{A}|$  adalah bilangan skalar dengan

$$|\underline{A}| = \begin{cases} a_{11} & , k = 1 \\ \sum a_{1j} |\underline{A}_{1j}| (-1)^{1+j} & , k > 1 \end{cases}$$

Catatan:

$\underline{A}_{ij}$  adalah matriks bertipe  $(k-1) \times (k-1)$  yang didapat dari matriks  $\underline{A}$  dengan menghilangkan baris ke-1 kolom ke  $-j$  yang disebut ekspansi menggunakan baris 1.

Secara umum:

$|\underline{A}| = \sum a_{ij} |\underline{A}_{ij}| (-1)^{1+j}$  yang merupakan baris ke- $i$ .  $\underline{A}_{ij}$  didapat dari matriks  $\underline{A}$  dengan menghilangkan baris ke- $i$  kolom ke- $j$  (minor berisi kolom  $j$ ).

### Contoh 1.9

$$\begin{aligned} 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}(-1)^2 + a_{12}a_{21}(-1)^3 \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

$$2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan ekspansi baris 1 determinan matriks ini akan menjadi

$$\begin{aligned} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^2 + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^3 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} (-1)^4 \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

Khusus untuk matriks bertipe  $3 \times 3$  determinannya dapat dihitung dengan cara:

Menjumlah elemen-elemen matrik sepanjang garis lurus ( — ) kemudian mengurangi dengan hasil kali elemen-elemen matriks sepanjang garis putus-putus ( - - - )

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

yang dapat Anda lihat sama dengan hasil sebelumnya.

$$3) \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}_{2 \times 2}$$

**Definisi 1.22**

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{A} \text{adj } \underline{A}$$

$\text{adj } \underline{A} = [A$  dengan setiap elemen diganti dengan kofaktornya]

$$= [(-1)^{i+j} A_{ji}]'$$

$A_{ij}$  matriks bagian dari  $A$  tanpa baris ke- $i$  dan tanpa kolom ke- $j$ .

Catatan:

Minor dan kofaktor dapat Anda baca lebih jelas pada modul tentang aljabar linear.

### Teorema 1.3

$\underline{A}, \underline{B}$  matriks bujur sangkar  $k \times k$

1.  $|\underline{A}| = |\underline{A}'|$
2. Bila tiap-tiap elemen dalam suatu baris atau kolom sama dengan nol maka  $|\underline{A}| = 0$
3. Bila sembarang 2 baris/kolom identik maka  $|\underline{A}| = 0$
4. Bila  $\underline{A}$  nonsingular maka  $|\underline{A}| = \frac{1}{|\underline{A}^{-1}|}$  atau  $|\underline{A}| |\underline{A}^{-1}| = 1$
5.  $|\underline{AB}| = |\underline{A}| |\underline{B}|$
6.  $|\underline{cA}| = c^k |\underline{A}|$ ,  $c$  scalar

### Definisi 1.23

1. Rank baris suatu matriks adalah banyaknya maksimum baris yang independen linear.
2. Rank kolom suatu matriks adalah banyaknya maksimum kolom yang independen linear.

Catatan:

Rank baris suatu matriks = rank kolomnya

### Definisi 1.24

Matriks bujur sangkar  $\underline{A}_{k \times k}$  disebut nonsingular bila  $\underline{AX} = 0$  mengakibatkan  $\underline{X} = 0$ .

Catatan:

1. Suatu matriks bujur sangkar yang tidak nonsingular disebut singular.
2. Matriks bujur sangkar disebut nonsingular bila rank matriks = banyaknya baris atau banyaknya kolom.

**Teorema 1.4**

Bila  $\underline{A}$  matriks nonsingular bertipe  $k \times k$  maka terdapat dengan tunggal matriks  $\underline{B}$  sedemikian hingga  $\underline{AB} = \underline{BA} = \underline{I}_{k \times k}$ .

**Definisi 1.25**

Matriks  $\underline{B}$  sedemikian hingga  $\underline{AB} = \underline{BA} = \underline{I}$  disebut invers dari matriks  $\underline{A}$ , dan diberi notasi  $\underline{A}^{-1}$ .

**Teorema 1.5**

$\underline{M}$  dapat ditulis sebagai

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$$

dimensi  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  lebih kecil daripada dimensi  $\underline{M}$  dan disebut partisi dari  $\underline{M}$ .

$$\underline{P} = \underline{A} - \underline{B}\underline{D}^{-1}\underline{C}$$

$$\underline{Q} = \underline{D} - \underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}$$

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{P}^{-1} & \underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{Q}^{-1} \\ -\underline{D}^{-1}\underline{C}\underline{P}^{-1} & \underline{Q}^{-1} \end{bmatrix}$$

semua matriks yang diambil inversnya adalah nonsingular.

**Teorema 1.6**

$\underline{A}, \underline{B}$  matriks bertipe  $k \times k$ ,  $c$  suatu skalar

- a.  $tr(c\underline{A}) = ctr(\underline{A})$
- b.  $tr(\underline{A} + \underline{B}) = tr(\underline{A}) \pm tr(\underline{B})$
- c.  $tr(\underline{AB}) = tr(\underline{BA})$
- d.  $tr(\underline{B}^{-1}\underline{AB}) = tr(\underline{A})$
- e.  $tr(\underline{AA}') = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}^2$

**Definisi 1.26**

Matriks bujur sangkar  $\underline{A}$  disebut dengan ortogonal bila baris-barisnya (yang dipandang sebagai vektor) saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1, yaitu  $\underline{A}\underline{A}' = \underline{I}$ .

**Teorema 1.7**

Matriks  $\underline{A}$  ortogonal bila dan hanya bila  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}'$ .

Catatan:

$\underline{A}\underline{A} = \underline{A}$ ,  $\underline{A} = \underline{I}$  sehingga kolom-kolom matriks saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1.

**Definisi 1.27**

$\underline{A}$  matriks bujur sangkar bertipe  $k \times k$ .  $\underline{I}$  matriks identitas bertipe  $k \times k$ .

Skalar  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  yang memenuhi persamaan  $|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0$  disebut eigen value (akar-akar karakteristik) dari matriks  $\underline{A}$ . Persamaan  $|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0$  adalah fungsi  $\lambda$  yang disebut sebagai persamaan karakteristik.

**Definisi 1.28**

$\underline{A}$  matriks berdimensi  $k \times k$

$\lambda$  salah satu eigen value dari  $\underline{A}$

Bila  $\underline{x} \neq \underline{0}$  sedemikian sehingga  $\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$  maka  $\underline{x}$  disebut eigen vektor (vektor karakteristik) dari matriks  $\underline{A}$  yang bersesuaian dengan eigen value  $\lambda$ .

**Definisi 1.29**

Bentuk karakteristik  $Q(\underline{x})$  dari  $k$  variabel  $\underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  adalah

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{A}\underline{x}$$

dengan  $\underline{A}$  matriks simetris.

Kondisi untuk  $\underline{A}$  supaya mempunyai invers adalah

1.  $\underline{A}$  bujur sangkar dan

2.  $|\underline{A}| \neq 0$

$\underline{A}$  dengan  $|\underline{A}| = 0$  adalah matriks singular, sedangkan

$\underline{A}$  dengan  $|\underline{A}| \neq 0$  adalah matriks nonsingular.

**Teorema 1.8**

1.  $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{A}\underline{A}^{-1} = I$ .
2. Invers dari matriks  $\underline{A}$  adalah tunggal.
3.  $|\underline{A}^{-1}| = \frac{1}{|\underline{A}|}$
4. Invers dari matriks  $A$  adalah nonsingular.
5.  $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
6.  $(\underline{A}')^{-1} = (\underline{A}^{-1})'$
7. Jika  $\underline{A}' = \underline{A}$  ( $\underline{A}$  matriks simetris) maka  $(\underline{A}^{-1})' = \underline{A}^{-1}$ .
8.  $(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$  asal  $\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$  ada.

*Beberapa kasus khusus*

1. Invers matriks bertipe  $2 \times 2$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ab-xy} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix} \text{ asal } ab-xy \neq 0$$

2. Matriks diagonal

$$(D\{x_i\})^{-1} = D\left\{\frac{1}{x_i}\right\} \text{ asal } x_i \neq 0$$

Contoh:  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3.  $\underline{I}$  matriks identitas,  $\underline{I}^{-1} = \underline{I}$

$\underline{J}$  matriks dengan  $|\underline{J}| = 0$

Untuk  $a \neq 0$  dan  $a + nb \neq 0$

$$(\underline{aI}_n + \underline{bJ}_n)^{-1} = \frac{1}{a} \left( \underline{I}_n - \frac{b}{a+nb} \underline{J}_n \right)$$

$$\underline{I}_n = \underline{I}_{n \times n}$$

4. Matriks ortogonal

$\underline{P}$  matriks ortogonal  $\rightarrow \underline{P}\underline{P}' = \underline{I}; |\underline{P}| \neq 0$  atau  $\underline{P}^{-1} = \underline{P}'$

### Definisi 1.30

$\underline{A}$  matriks simetris,  $\underline{A}$  atau  $\underline{A}$  disebut matriks definit positif bila dan hanya bila  $\underline{X}'\underline{A}\underline{X} > 0$ .

### Contoh 1.10

Hitung  $\underline{A}^{-1}$  bila  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right) - (-1)\left(-\frac{3}{2}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

### Contoh 1.11

Apakah matriks  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  definit positif?

Penyelesaian:

$$\underline{x}'\underline{B}\underline{x} = [x_1 \quad x_2] \underline{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= [4x_1 + x_2 \quad 5x_1 + 2x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 &= 4x_1^2 + x_1x_2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 \\
 &= 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2
 \end{aligned}$$

$\tilde{x}'B\tilde{x} \geq 0$  untuk  $x_1x_2 \geq 0$

Jadi,  $B$  definit positif untuk  $x_1x_2 \geq 0$ .

**Contoh 1.12**

Hitung  $R^{-1}$  bila  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 12 - 2 - 0 = -9$$

$$R^{-1} = \frac{1}{|R|} \text{adj } R$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 1 & -(-1) & -3 \\ -(-6) & -3 & 0 \\ -10 & -1 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Contoh 1.13**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung eigen value dari matriks  $A$

**Penyelesaian:**

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

**Contoh 1.14**

Untuk matriks dalam contoh 1.13 hitung eigen vektornya

**Penyelesaian:**

$$\lambda_1 = 1: \underline{A}\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_1 + 3x_2 = x_2 \end{array} \right\} x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = 1 \rightarrow x_2 = -2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ adalah eigen vektor yang bersesuaian dengan } \lambda_1$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{L\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

adalah eigen vektor satuan yang bersesuaian

dengan  $\lambda_1$ . Dengan cara yang sama didapat  $\tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah eigen vektor satuan yang bersesuaian dengan  $\lambda_2$ .

## B. ALJABAR MATRIKS MENGGUNAKAN SOFTWARE R

Untuk keperluan melakukan perhitungan aljabar matriks, pada modul ini digunakan software Statistik R yang terlebih dahulu dapat diunduh secara gratis dari *The Comprehensive R Archive Network* (CRAN) dengan alamat website <https://www.r-project.org> atau <https://repo.bppt.go.id/cran> untuk Indonesia.

Langkah-langkah dasar dan latihan sederhana aljabar matriks disajikan sebagai berikut:

### 1. Membuat Matriks

- a. A adalah matriks berukuran 2 x 3 yang elemen baris ke-1 adalah (1, 2, 3) dan elemen baris ke-2 adalah (5, 1, 2). Cara membuatnya adalah *ketik* sintak berikut lalu tekan *enter*

```
> A <- matrix(c(1,5, 2,1, 3,2), nrow=2, ncol=3)
```

Untuk menampilkan hasilnya, *ketik* A, lalu tekan *enter*, akan muncul hasil berikut

```
> A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    5    1    2
```

- b. B adalah matriks berukuran 3 x 2 yang elemen kolom ke-1 adalah (2, 4, -2) dan elemen kolom ke-2 adalah (0, 3, 1).

```
> B <- matrix(c(2, 4, -2, 0, 3, 1), nrow=3, ncol=2)
```

```

> B
      [,1] [,2]
[1,]    2    0
[2,]    4    3
[3,]   -2    1

```

## 2. Penjumlahan atau Pengurangan Matriks

Sebelum melakukan penjumlahan atau pengurangan dua buah matriks terlebih dahulu harus dipastikan ukuran matriksnya adalah sama. Misalnya kita akan melakukan penjumlahan atau pengurangan matriks A dengan hasil transpos dari matriks B.

### a. Penjumlahan matriks

```

> C <- A + t(B)
> C
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    6    1
[2,]    5    4    3

```

Dimana proses dan hasil transpos matriks B adalah sebagai berikut :

```

> t(B)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    4   -2
[2,]    0    3    1

```

### b. Pengurangan matriks

```

> D <- A - t(B)
> D
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   -1   -2    5
[2,]    5   -2    1

```

## 3. Perkalian Matriks

Perlu diperhatikan sebelum melakukan operasi perkalian matriks adalah kesesuaian ukuran matriks yang akan diproses. Sebagai ilustrasi kita akan melihat perbedaan hasil dari perkalian matriks AB dengan BA.

### a. Perkalian dua buah matriks

```

>AB <- A %*% B
> AB

```

```

      [,1] [,2]
[1,]    4    9
[2,]   10    5

>BA <- B %*% A
> BA
      [,1] [,2] [,3]
[1,]     2     4     6
[2,]    19    11    18
[3,]     3    -3    -4

```

- b. Perkalian elemen-elemen dua buah matriks, misalkan antara matriks A dengan transpos dari matrik B.

```

> AtB <- A * t(B)
> AtB
      [,1] [,2] [,3]
[1,]     2     8    -6
[2,]     0     3     2

```

#### 4. Determinan Matriks

Determinan matriks dihitung dari matriks segi yaitu matriks yang memiliki ukuran baris sama dengan ukuran kolom.

- a. Cara lain membentuk matriks

```

> E <- matrix(c(4, 2, 1, 3,
+              3, 5, 3, 2,
+              2, 1, 2, 1,
+              1, 0, 1, 4),
+            nrow=4, ncol=4)
> E

```

```

      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    4    3    2    1
[2,]    2    5    1    0
[3,]    1    3    2    1
[4,]    3    2    1    4

```

## b. Menghitung determinan dari matriks E

```
> det <- det(E)
> det
[1] 75
```

## 5. Invers Matriks

Invers matriks bisa diperoleh dari matriks segi

```
> invE <- solve(E)
> invE
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] 0.3333333 2.775558e-17 -0.33333333 -1.040834e-17
[2,] -0.1733333 2.800000e-01 0.01333333 4.000000e-02
[3,] 0.2000000 -4.000000e-01 0.60000000 -2.000000e-01
[4,] -0.2133333 -4.000000e-02 0.09333333 2.800000e-01
```

Perkalian suatu matriks invers dengan matriks asalnya akan menghasilkan matriks identitas yaitu matriks yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1 sedangkan elemen-elemen lainnya bernilai nol.

```
> I <- E%*%invE
> I
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] 1.000000e+00 -6.245005e-17 -1.665335e-16 0.000000e+00
[2,] 0.000000e+00 1.000000e+00 -1.110223e-16 0.000000e+00
[3,] -5.551115e-17 -6.245005e-17 1.000000e+00 5.551115e-17
[4,] 0.000000e+00 2.775558e-17 -1.110223e-16 1.000000e+00

> round(I, digit=5)
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    0    0
[2,]    0    1    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    0    0    1
```



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

$$1) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Perhatikan dengan hitungan bahwa hal-hal di bawah ini benar.

a)  $(\underline{A}')' = \underline{A}$

b)  $(\underline{C}')^{-1} = (\underline{C}^{-1})'$

c)  $(\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}'$

2) Dari latihan 1 hitunglah

$$(\underline{AB})^{-1}, (\underline{AC})^{-1}, \underline{C}^{-1}\underline{A}^{-1}$$

Perhatikan bahwa  $(\underline{AC})^{-1}, \underline{C}^{-1}\underline{A}^{-1}$

3)  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$  hitung eigen value matriks  $\underline{A}$ .

$$4) \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan  $B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Hitung  $\underline{B}^{-1}$  dengan dan tanpa partisi.

5) Perhatikan kembali soal latihan 1 dan 2. Lakukan operasi-operasi tersebut dengan menggunakan software R !

*Petunjuk Jawaban Latihan*

- 1) Gunakan rumus invers khusus untuk matriks  $2 \times 2$ . Hitung ruas kiri, apakah sama dengan ruas kanan.
- 2) Gunakan rumus invers dan hasil kali matriks.

- 3)  $|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0 \rightarrow$  cari penyelesaian ke  $\lambda$ .
- 4) a) Hitung invers cara biasa.  
b) Hitung invers pakai partisi.
- 5) Gunakan sintak-sintak program R di komputer Anda.



## RANGKUMAN

---

1.  $\underline{A}$  matriks bujur sangkar

Jika  $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$  maka  $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$

2.  $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \text{adj}\underline{A}$

3.  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  matriks bujur sangkar

$$(\underline{A}^{-1})' = (\underline{A}')^{-1}$$

$$(\underline{A}\underline{B}^{-1}) = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$$

4. Invers dari matriks partisi

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} = \underline{A} - \underline{B}\underline{D}^{-1}\underline{C}$$

$$\underline{Q} = \underline{D} - \underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}$$

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{P}^{-1} & -\underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{Q}^{-1} \\ -\underline{D}^{-1}\underline{C}\underline{P}^{-1} & \underline{Q}^{-1} \end{bmatrix}$$

5.  $|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0, \underline{A}_{k \times k}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  yang memenuhi persamaan di atas disebut eigen value matriks  $\underline{A}$ .

$$\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$\underline{x}$  disebut dengan eigen vektor yang bersesuaian dengan eigen value  $\lambda$ .



TES FORMATIF 2

---

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$A^{-1} =$

A.  $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2)  $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{-1} =$

A.  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

C. 
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

D.  $\tilde{R}$  tidak punya invers

3) Invers dari matriks partisi

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{R} \end{bmatrix}, \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \dots & \tilde{Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q} & \dots & \tilde{Q} \end{bmatrix}$$
 adalah....

A. 
$$\begin{bmatrix} \tilde{P}^{-1} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{R}^{-1} \end{bmatrix}$$

B. 
$$\begin{bmatrix} \tilde{R}^{-1} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix}$$

C. 
$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{P} \end{bmatrix}$$

D. Tidak punya invers

4) Matriks di bawah ini yang tidak ortogonal adalah....

A. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C. 
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

D. 
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

- 5) A,B matriks bujur sangkar yang non singular,
- $|\underline{A}^{-1}| = |\underline{A}|^{-1}$
  - $(\underline{A}')^{-1} = (\underline{A}^{-1})'$
  - $(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{B}^{-1}$
  - $|\underline{A}||\underline{A}^{-1}| = \underline{I}$
- 6) Dari soal No. 5, pernyataan dibawah ini adalah benar, *kecuali*....
- $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{I}$
  - Invers matriks  $\underline{A}$  tunggal
  - $(\underline{B}\underline{A})^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{B}^{-1}$
  - $(\underline{A}'\underline{B}')^{-1} = (\underline{A}^{-1}\underline{B}^{-1})'$
- 7) Bila  $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$  maka  $\underline{A}^{-1} =$
- $\frac{1}{ab-xy} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$
  - $\frac{1}{xy-ab} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$
  - $\frac{1}{ab-xy} \begin{bmatrix} a & -x \\ -y & b \end{bmatrix}$
  - $\frac{1}{xy-ab} \begin{bmatrix} -a & x \\ y & -b \end{bmatrix}$
- 8)  $\underline{M}$  bertipe  $k \times k$   
 $\underline{I}$  matriks identitas berupa  $k \times k$   
 $\underline{M}(\underline{M} + \underline{I})^{-1} =$
- $\underline{M}\underline{M}^{-1} + \underline{M}$
  - $(\underline{I} + \underline{M}^{-1})^{-1}$
  - $(\underline{M}\underline{M} + \underline{M})^{-1}$
  - A,B,C tidak benar

9) Eigen value dari matriks  $\tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  adalah....

- A. 0 dan 1
- B. 0 dan 2
- C. 1 dan 1
- D. 1 dan 2

10) Eigen vektor satuan dari matriks  $\tilde{D}$  dalam soal 9 adalah....

A.  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

- D. A,B,C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

## Kunci Jawaban Tes Formatif

### *Tes Formatif 1*

- 1) C
- 2) B
- 3) B
- 4) A
- 5) D
- 6) B
- 7) C
- 8) C
- 9) B
- 10) A

### *Tes Formatif 2*

- 1) B
- 2) C
- 3) A
- 4) B
- 5) B
- 6) D
- 7) A
- 8) B
- 9) B
- 10) C

## Daftar Pustaka

- Johnson, R. A., Wichern, D. W. (1982). *Applied multivariate statistical analysis*. Prentice Hall Inc.
- Rencher, A. C. & Christensen, W. F. (2012). *Methods of multivariate analysis*. Third Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Tabachnick, B. G., and Fidell, L. S. (2007). *Using multivariate statistics* (5<sup>th</sup> ed.). Boston: Pearson Education, Inc.