MODUL 1

Himpunan

Dra. Sri Haryatni Kartiko, M.Sc.

PENDAHULUAN

Himpunan sudah Anda kenal di sekolah menengah, bahkan sejak sekolah dasar. Himpunan merupakan unsur yang penting dalam probabilitas, sehingga dipelajari kembali dalam mata kuliah ini, tentu saja dalam modul pertama. Dalam Kegiatan Belajar 1, Anda akan mempelajari himpunan dan operasinya. Anda akan dapat membandingkan operasi himpunan dengan operasi bilangan. Dalam kegiatan belajar ini diberikan juga hukum-hukum yang akan digunakan dalam operasi himpunan. Dengan hukum-hukum ini perhitungan probabilitas dapat dilakukan dengan lebih mudah.

Dalam Kegiatan Belajar 2, Anda akan mempelajari teknik menghitung. Teknik tersebut meliputi prinsip perkalian, permutasi, kombinasi, dan juga Anda akan mempelajari bagaimana menggunakan teknik menghitung tersebut. Juga akan Anda jumpai koefisien multinominal. Teknik menghitung ini berguna untuk menentukan banyaknya elemen dalam ruang sampel dan dalam suatu kejadian tertentu.

Setelah Anda mempelajari modul ini, Anda diharapkan telah dapat melakukan operasi pada himpunan, menggunakan hukum-hukum pada operasi himpunan, serta menggunakan teknik perkalian, permutasi, kombinasi dalam perhitungan elemen dalam ruang sampel.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan

Sebagai ilustrasi diberikan beberapa contoh himpunan:

1. Himpunan semua mahasiswa Universitas Terbuka.
2. Himpunan kepala keluarga di suatu desa.
3. Himpunan pasien berpenyakit paru-paru di Rumah Sakit Harapan Kita.
4. Himpunan bilangan bulat kurang dari 10.
   a. Bilangan ¾ dan 12 tidak di dalam himpunan
   b. Bilangan 3 di dalam himpunan.

Jika suatu objek berada dalam sebuah himpunan, objek ini dikatakan elemen dari himpunan tersebut.

> *A* adalah himpunan bilangan riil *x*, dengan $0 \le x \le 1$ dan ¾ adalah elemen dari himpunan *A*, fakta bahwa ¾ adalah elemen dari himpunan *A*, ditulis dengan ¾ $\in A$.

$a \in A$ berarti a adalah elemen dari himpunan A.

Himpunan yang sering digunakan adalah himpunan bilangan; meskipun demikian terminologi *himpunan titik* akan lebih sesuai digunakan dibanding dengan *himpunan bilangan*.

Berikut diterangkan secara singkat bagaimana menggunakan terminologi ini. Dalam analitik geometri (di mana titik nol dan unit telah ditentukan), setiap titik pada garis berkorespondensi dengan hanya satu bilangan x dan setiap bilangan x berkorespondensi dengan hanya satu titik pada garis.

Korespondensi satu-satu antara bilangan dan titik pada garis akan tidak menimbulkan kesalahpahaman bila kita menyebut titik x sebagai pengganti bilangan x.

Lebih jauh lagi pada bidang koordinat tegak lurus dan dengan bilangan x dan y, untuk setiap simbol (x, y) berkorespondensi dengan hanya satu titik pada bidang dan sebaliknya. "Titik (x, y)" berarti pasangan berurut x dan y.

Terminologi ini dapat digunakan bila sistem koordinat dalam ruang dari tiga dimensi atau lebih. Dengan demikian

"Titik $(x_1, x_2, \ldots x_n)$" berarti bilangan $x_1, x_2, \ldots x_n$. Notasi $A = \{x\ ;\ 0 \le x \le 1)$ dibaca "A adalah himpunan satu dimensi dari titik-titik x di mana $0 \le x \le 1$".

$A = \{(x,\ y)\ ;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ dibaca A himpunan titik-titik 2 dimensi (pada bidang) yang dibatasi oleh bujur sangkar dengan titik-titik sudut (0, 0); (0, 1); (1, 0), (1, 1).

Akan diberikan beberapa definisi (dengan contoh ilustrasi) yang akan membawa Anda pada aljabar himpunan elementer yang akan digunakan dalam probabilitas.

DEFINISI 1.1

> Bila setiap elemen dalam himpunan A_1 juga merupakan elemen dalam himpunan A_2, himpunan A_1 disebut himpunan bagian (subset) dari himpunan A_2; ditulis $A_1 \subset A_2$. Bila $A_1 \subset A_2$ dan $A_2 \subset A_1$ maka $A_1 = A_2$.

Contoh 1.1

$A_1 = \{x;\ 0 \le x \le 1\}$ dan $A_2 \{x;\ 0 \le x \le 2\}$. Himpunan satu dimensi A_1 merupakan himpunan bagian dari himpunan. Satu dimensi A_2 yaitu $A_1 \subset A_2$.

Contoh 1.2

Pada kartu bridge

A_1 = Himpunan kartu jantung

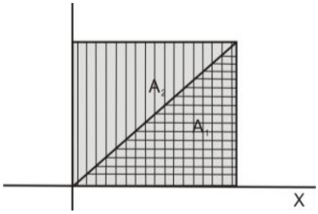
A_2 = Himpunan kartu merah

$A_1 \subset A_2$.

Contoh 3

$A_1 = \{(x,\ y)\ ;\ 0 \le x \le y \le 1\}$

$A_2 = \{(x, y); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$



$A_1 \subset A_2$

Gambar 1.1

Pada gamba: A_1 : titik-titik pada diagonal bujur sangkar A_2 : titik - titik pada bujur sangkar

DEFINISI 1. 2

> Bila himpunan A tidak mempunyai elemen, A disebut **himpunan null** (himpunan kosong), ditulis $A = \phi$.

Contoh 1.4

A = Himpunan anak SD yang berusia 60 tahun maka $A = \phi$.

DEFINISI 1.3

> Himpunan semua elemen yang menjadi anggota paling sedikit satu himpunan A_1 dan A_2 disebut union dari A_1 dan A_2, ditulis $A_1 \cup A_2$.
> Union dari himpunan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah himpunan yang elemen-elemennya menjadi anggota dari paling sedikit satu himpunan tersebut. Union ini ditulis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ atau $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ bila terdapat sejumlah himpunan.

Contoh 1.5

Pada kartu bridge.

$A_1 \cup A_2$ = himpunan kartu Ace atau kartu warna merah

= semua kartu warna merah dan semua kartu Ace masuk dalam himpunan ini

Bila diambil 1 elemen dari himpunan $A_1 \cup A_2$, elemen ini akan berupa kartu Ace atau kartu warna merah (bisa merupakan kartu Ace dengan warna merah).

Contoh 1.6

$A_1 = \{x\ ;\ x = 0, 1 \ldots 5\}$ dan $A_2 = \{x\ ;\ x = 4, 5 \ldots 10\}$

$A_1 \cup A_2 = \{x\ ;\ x = 0, 1, \ldots 10\}$.

Contoh 1. 7

A_1 dan A_2 seperti ditentukan dalam contoh 1.1 : $A_1 \cup A_2 = A_2$.

Contoh 1.8

$A_1 = \phi$

$A_1 \cup A_2 = A_2$. untuk setiap himpunan A_2

Contoh 1.9

$$A_k = \left\{x\ ;\ \frac{1}{k+1} \le x \le 1\right\},\quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{x\ ;\ 0 < x \le 1\}$. .

Nol tidak berada di dalam himpunan ini karena nol tidak berada dalam salah satu himpunan $A_1, A_2\ A_3 \ldots$

DEFINISI 1.4

> Himpunan yang elemen-elemennya menjadi anggota setiap himpunan A_1 dan A_2 disebut interseksi (irisan) A_1 dan A_2 ditulis $A_1 \cap A_2$.

Interseksi (irisan) beberapa himpunan $A_1, A_2\ A_3 \ldots$ adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota setiap himpunan

$A_1, A_2\ A_3\ ...$ ditulis dengan $A_1 \cap A_2 ...$ atau bila terdapat sejumlah berhingga (k) himpunan ditulis dengan $A_1 \cap A_2 \cap ...\ A_k$

Contoh 1.10

Dari contoh 5, $A_1 \cap A_2$ = kartu Ace yang berwarna merah.

Contoh 1.11

$A_1 = \{(x,\ y)\ ;\ (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)\}$

$A_2 = \{(x,\ y)\ ;\ (x,\ y) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(x,\ y)\ ;\ (x,\ y) = (1,\ 1)\}$.

Contoh 1.12

$A_1 = \{(x,\ y)\ ;\ 0 \le x + y \le 1\}$

$A_2 = \{(x,\ y)\ ;\ 1 < x + y\}$

$A_1 \cap A_2 = \phi$.

Contoh 1.13

$A_1 = \{(x\ ;\ 0 \le x < 1/k\},\ k = 1,\ 2,\ 3,\ ...$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... = \{0\}$ karena titik 0 (nol) menjadi anggota setiap himpunan $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...$

DEFINISI 1.5

> Himpunan semua elemen yang menjadi bahan pembicaraan disebut semesta pembicaraan atau ruang; diberi notasi *A*, *B* atau *C*.

Contoh 1.15

Dalam pembicaraan tentang mahasiswa Indonesia maka *A* = {semua orang Indonesia yang berpredikat mahasiswa}.

A_1 = himpunan mahasiswa UT

$A_1 \subset A$

A_2 = himpunan mahasiswa Indonesia di USA

$A_2 \subset A$.

Contoh 1.16

Dalam melempar sebuah dadu satu kali maka A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A_1 = mata dadu genap

= $\{2, 4, 6\} \subset A$.

DEFINISI 1.6

> A adalah ruang dari $A \subset A$.
> Himpunan semua elemen dalam A yang bukan elemen dari A disebut komplemen dari A; ditulis dengan notasi A^c.

Contoh 1.17

Dari contoh 1.5 A_1^c = himpunan kartu bridge yang bukan Ace

Contoh 1.18

$S = \{1, 2, ... 10\}$

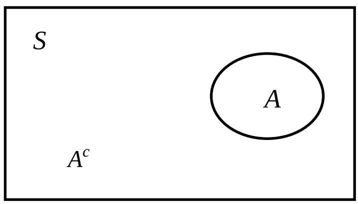
$A =$ himpunan bilangan dalam S yang habis dibagi 5
$A = \{5, 10\}$

$A^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

Contoh 19

$A \subset A$ (lihat Gambar1.2)

$A \cup A^c = A$
$A \cap A = \phi$
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$
$(A^c)^c = A$.



Gambar 1.2

A. HUKUM-HUKUM YANG DIGUNAKAN DALAM OPERASI HIMPUNAN

Hukum Komulatif

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

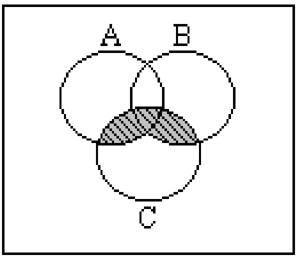
Hukum Asosiatif

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

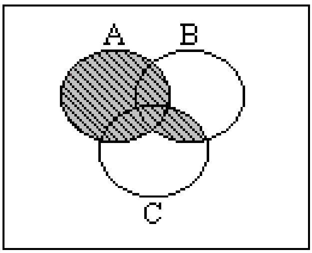
Tanda kurung pada Hukum Asosiatif menunjukkan operasi mana yang harus didahulukan. Karena adanya hukum ini, tanda kurung untuk operasi yang sama dapat dihilangkan.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

Tanda kurung dalam $(A \cup B) \cap C$ tidak dapat dihilangkan karena seperti dapat Anda lihat pada diagram Venn Gambar 1.3, $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C$

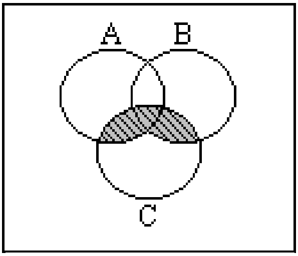
Gambar 1.3

Hukum Distributif

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

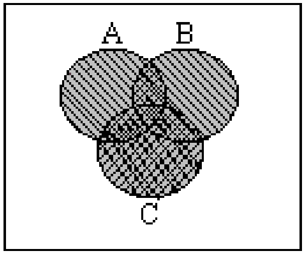
Untuk hukum distributif ini Anda perhatikan gambar 1.4.

a



$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b



$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Gambar 1. 4

$(A \cap B) \cup C$ adalah jumlah yang diarsir pada Gambar 1.4a.

$(A \cup B) \cap (B \cup C)$ adalah jumlah yang diarsir dua kali pada Gambar 1.4b.

Perhatikan perbedaan/persamaan operasi himpunan dengan operasi bilangan.

1. $a \times a = a$ bila dan hanya bila $a = 0$ atau 1

   $a + a = a$ bila dan hanya bila $a = 0$.

   sedang $A \cap A = A$

   $A \cup A = A$

2. $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

   $(a \times b) + c \neq (a+c) \times (b+c)$

   sedang $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Hukum De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dengan hukum De Morgan didapat

$(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$

$(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$.

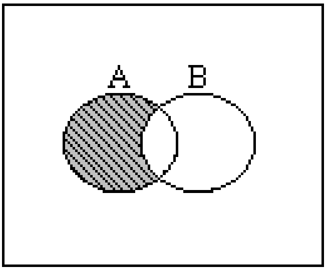
Operasi lain pada himpunan

1. *Beda*

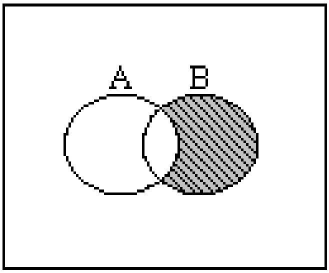
Definisi

Beda A dengan B ditulis $A \setminus B$

$A \setminus B = A \cap B^c = \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.



$A \setminus B$ (daerah yang diarsir)



B \ A (daerah yang diarsir)

Gambar 1.5

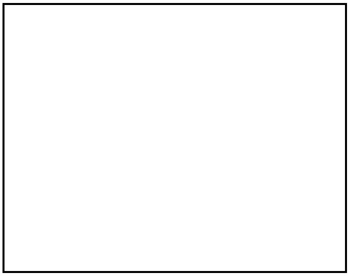
a. Dari ilustrasi dalam Gambar 1.5 terlihat bahwa $A \setminus B \neq B \setminus A$
b. Apabila $B \subset A$ maka $A \setminus B$ ditulis $A - B$
c. Karena $(A \cap B) \subseteq A$ maka $A \setminus B = A - (A \cap B)$
d. Karena $A \subset A$ maka $\varnothing = A - A$.

2. *Beda Simetri*

Definisi

Beda simetri A dan B ditulis dengan notasi $A \,\Delta\, B$

$$\begin{aligned} A \,\Delta\, B &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



Gambar 1. 6. $A \;\Delta B$ adalah daerah yang diarsir

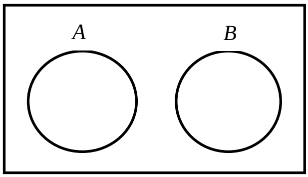
- Perhatikan bahwa $A \;\Delta\; B = B \;\Delta\; A$

DEFINISI 1.7

A dan *B* mempunyai sifat saling asing (*disjoint*) bila dan hanya bila $A \cap B = \phi$

Dari gambar 1.7 tampak bahwa

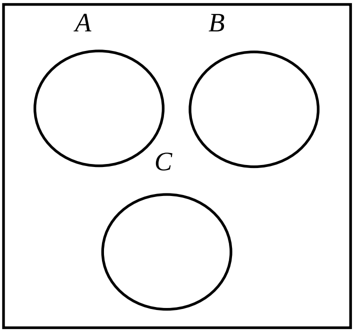
$A \cap B = \phi$ bila dan hanya bila $A \subset B^c$
dan bila dan hanya bila $B \subset A^c$.



$A \cap B = \phi$

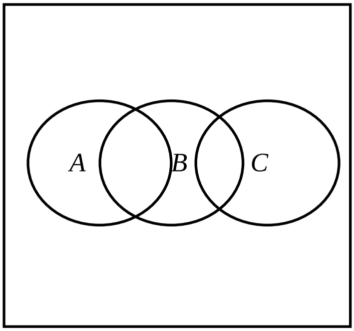
Gambar 1. 7

- A, B C saling asing berarti
  $A \cap B \cap C = \phi$ dan
  $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ dan $B \cap C = \phi$



A, B, C

saling asing



$A \cap B \cap C = \phi$

tapi A, B, C tidak saling asing

Gambar 1.8

DEFINISI 1.8

Partisi dari A adalah $A_1, A_2, \ldots A_n$ sedemikian sehingga

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ dengan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$.

A_1	A_2	....	A_n

Gambar 1.9

$A_1, A_2, \ldots A_n$ adalah Partisi dari A

DEFINISI 1.9

IA adalah fungsi indikator bila

$$IA(x) = \begin{cases} 1 & \text{bila } x \in A \\ 0 & \text{bila } x \notin A \end{cases}$$

Contoh 1.20

Himpunan A : mahasiswa UT
Himpunan B : mahasiswa UI
Himpunan C : Siswa SMP Negeri 19 Jakarta.

a. Bila tidak ada mahasiswa UI yang juga mahasiswa UT, $A \cap B = \phi$ atau A dan B saling asing.
b. Bila ada, $A \cap B \neq \phi$ atau A dan B tidak saling asing.
c. $A \cap B = \phi = B \cap C$
d. A\B = mahasiswa UT yang tidak merangkap menjadi mahasiswa UI
e. B\A = mahasiswa UI yang tidak merangkap menjadi mahasiswa UT
f. $= A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   = mahasiswa UT saja atau mahasiswa UI saja. (tidak termasuk mahasiswa yang merangkap).
g. Bila $A \cap B = \phi$ dan $A \cap C = \phi$ dan $B \cap C = \phi$, berarti $A \cap B \cap C = \phi$ atau A, B, dan C saling asing.
h. Bila $A \cap B \neq \phi$ atau $A \cap C \neq \phi$ atau $B \cap C \neq \phi$ maka A, B dan C tidak saling asing.

Contoh 1.21

Misal UI mempunyai n fakultas
$A1$: mahasiswa fakultas 1
$A2$: mahasiswa fakultas 2
.
.
.
An : mahasiswa fakultas n
A : mahasiswa UI.

$\cup A_i = A$

$Ai \cap Aj = \phi$ untuk $i \neq j$
sehingga Ai, $i = 1, \ldots n$ merupakan partisi dari A.

ω *adalah mahasiswa fakultas* 1

$IA_i(\omega) = 1,$ untuk $i = 1$
$IA_j(\omega) = 0,$ untuk $j \neq 1.$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) S = Penduduk Indonesia
   A = Pekerja bangunan
   B = Anak-anak balita
   C = Laki-laki
   Apakah
   $A^c,\ A\cup B,\ A\cap B,\ B\cap C,\ A\cap C,\ A\setminus B,\ B\setminus C,\ A\ \ B,\ B\Delta\ \ C,\ BA\subset$

2) Tunjukkan bahwa $A\subset B$ *bhb* $A\cap B = A$.

3) Y adalah nilai aljabar siswa SMP Negeri 19 Jakarta.
   Misal : $S = \{y\ ;\ 0< y\leq 10\}$
   $A = \{y\ ;\ 7,5< y\leq 10\}$
   $B = \{y\ ;\ 6< y\leq 7,5\}$
   $C = \{y\ ;\ 5< y\leq 6\}$
   $D = \{0\ ;\ 0< y\leq 5\}$.
   Apakah $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cup B\cup C$, $A\setminus B$, $A\ \Delta\ B$? dan apakah A, B, C dan D partisi dari S?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan definisi
2) Buktikan bila $A\subset B$ maka dan $A\cap B = A$ dan bila $A\cap B = A$ maka $A\subset B$.
3) Gunakan definisi.

RANGKUMAN

1. Operasi Himpunan
   $A\cup B = \{x / x\in A \text{ atau } x\in B\}$

$A \cap B = \{x / x \in A \text{ atau } x \in B\}$

$A^c = \{x / x \notin A\}$

$A \setminus B = A \cap B^c = \{x / x \in A \; dan \; x \notin B\}$

$A \;\Delta\; B = \{A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

2. Hukum-hukum yang digunakan dalam operasional himpunan.
   Komutatif : $A \; E \; B = B \; E \; A$
   $A \cap B = B \cap A.$
   Asosiatif : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   Distributif : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
   De Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

3. Fungsi Indikator

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{bila } x \in A \\ 0 & \text{bila } x \notin A. \end{cases}$$

4. Partisi dari A adalah $A_1, A_2, \dots A_n$ sedemikian sehingga $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ dengan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j.$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Bila diketahui
   $S = \{0, 1, 2, \dots 10\}$
   $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$
   $B = \{4, 6, 7, 9, 10\}$

1) $A^c = \dots.$
   A. B
   B. $\{9, 10\}$

C. {4, 7, 9, 10}
D. {0, 4, 7, 9, 10}

2) $A \cap B$
A. A
B. {4, 5, 6, 7}
C. {6}
D. {6, 8}

3) $(A \cup B)^c$
A. ϕ
B. S
C. A
D. {0}

4) $A \setminus B = \ldots.$
A. {1, 2, 3, 5, 8}
B. {1, 2, 3, 4, 8}
C. {1, 2, 3, 6, 8}
D. {1, 2, 4, 6, 8}

5) $A \,\Delta\, B = \ldots.$
A. {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10}
B. {1, 2, 3, 4, 5,7, 8, 9, 10}
C. {1, 2, 3, 4, 7, 9, 10}
D. {1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10}

II.
6) $A \,\Delta\, B = \ldots.$
A. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
B. $(AB^c) \cap (B^c A)$
C. $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
D. $A \setminus B$

7) Apabila A B maka ….
A. $A \cap B = B$
B. $A \,\Delta\, B = A \cup B$
C. $A^c \cap B = \phi$
D. $A \cup B = B$

8) Di antara 4 pernyataan di bawah ini yang tidak benar adalah ….
   A. $(A \,\Delta\, B)\Delta\, C \neq A(B \,\Delta\, C)$
   B. $(A \cap B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
   C. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   D. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

9) Dari hal yang diketahui dalam I dan $C = \{4, 7, 9, 10\}$. Manakah di antara pernyataan ini yang benar?
   A. A dan B partisi dari S
   B. A dan B bukan partisi dari S
   C. A dan C partisi dari S
   D. B dan C partisi dari S

10) $A \cap B \cap C =$ ….
   bila $\omega \in A \cap B \cap C, \quad I_{A \cap B \cap C}(\omega) =$
   A. 0
   B. 3
   C. 1
   D. 2

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Teknik Menghitung

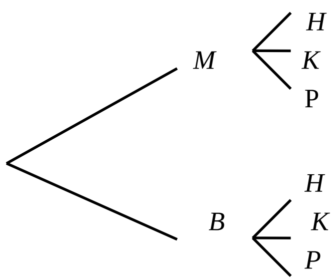
Menghitung banyaknya cara terjadinya suatu kejadian (yang definisinya diberikan dalam Modul 2) kadang cukup kompleks. Untuk membantunya akan diberikan teknik menghitung.

A. PRINSIP PERKALIAN

Bila suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara operasi dan operasi, kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara maka terdapat $n_1 \,.\, n_2$ cara di mana operasi dapat dilakukan.

Contoh 1.22

Misal sebuah mata uang (kita sebut sisinya *M* = muka dan *B* = belakang) dilempar dan kemudian sebuah kelereng diambil dari suatu kotak berisi 1 kelereng hitung (*H*), 1 kelereng kuning (*K*) dan 1 kelereng putih (*P*). Hasil pengambilan (yang nanti disebut *out come*) yang mungkin adalah: *MH*, *MK*, *MP*, *BH*, *BK* dan *BP*. Untuk setiap hasil lemparan mata uang terdapat tiga kelereng yang mungkin terpilih, sehingga semua hasil yang mungkin adalah 2 . 3 = 6. Keadaan ini dapat digambarkan dalam diagram pohon dalam gambar 1.10.



Gambar 1.10. Diagram pohon contoh 1

Prinsip perkalian ini dapat diperluas untuk lebih dari 2 operasi. Khususnya lebih operasi ke i dan r operasi dapat dilakukan dengan n_i cara. Khususnya untuk sejumlah r operasi di mana tiap-tiap operasi ke-i dapat dilakukan dengan n_i $(i = 1, 2, ..., r)$ maka banyaknya cara melakukan r operasi adalah:

$$\prod_{i=1}^{r} n_i = n_1 \, . \, n_2 \, ... \, n_r \, .$$

Masalah menghitung yang sering ditemui diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.1

> Bila terdapat r operasi yang masing-masing dapat dilakukan dengan N cara, maka banyaknya cara melakukan r operasi adalah N^r.

Contoh 1.23

Dengan berapa cara tes berisi 20 pertanyaan, yang jawabnya salah-benar dapat dijawab?

Jawabnya adalah 2^{20}.

Contoh 1.24

Dari himpunan beranggota m, ada beberapa himpunan bagian (subset) yang mungkin? Dalam membentuk himpunan bagian harus diputuskan setiap elemen berada dalam himpunan bagian atau tidak? Jadi untuk setiap m elemen terdapat 2 pilihan (cara), sehingga banyaknya subset yang mungkin adalah 2^m. Di sini termasuk himpunan kosong, yang berkorespondensi dengan kejadian tidak ada satu elemen pun di dalam himpunan bagian ini.

Contoh 1.25

5 kartu diambil dan 1 dek kartu bridge (terdiri dari 52 kartu). Dalam hal ini terdapat $(52)^5$ cara, bila pengambilan dengan pengembalian. Bila ke 5 kartu diambil tanpa pengembalian banyaknya cara adalah 52. 51. 50. 49. 48.

Pada cara pertama kartu yang sama dapat diambil lebih dari satu kali, sedang pada cara kedua tidak akan terambil kartu yang sama.

B. PERMUTASI DAN KOMBINASI

$n!$ (baca n faktorial)

$$n = n(n-1)\ \ldots\ 1$$
$$n! = n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)\ \left[(n-k)!\right]$$
$$n! = n(n-1)\ \ldots\ 1 = n\left[(n-1)\ \ldots\ 1\right] = n(n-1)!$$
$$\frac{n!}{n} = n-1!$$
$$n = 1 \Rightarrow \frac{1!}{1} = (1-1)!$$
$$1 = 0!.$$

Beberapa contoh perhitungan faktorial

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 270$$
$$\frac{6!}{5!} = 6\frac{5!}{5!} = 6$$
$$\frac{7!}{5!} = 7.6$$

$$\frac{6!}{3!5!} = \frac{7.6.5}{3.2} = 35$$
$$\frac{10!}{3!7!} = \frac{7.6.5}{3.2} = 120$$
$$\frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2} = 126$$
$$\frac{8!}{5!} = 8.7.6 = 336.$$

Beberapa rumus bermanfaat untuk menghitung banyaknya rangkaian yang mungkin dalam kasus-kasus tertentu. rangkaian berurut dari suatu himpunan objek disebut ***Permutasi***.

Teorema 1.2

Banyaknya permutasi dari n objek yang berada adalah $n!$

Bukti:

Digunakan prinsip perkalian.

Untuk cara mengisi n posisi dengan n objek yang berbeda, posisi pertama dapat diisi dengan n cara dengan menggunakan salah satu di antara n objek. Posisi kedua diisi dengan $n - 1$ cara menggunakan $(n - 1)$ objek sisanya, dan seterusnya sampai objek terakhir ditempatkan pada posisi terakhir.

Dengan prinsip perkalian operasi ini dapat dilakukan dalam $n. (n - 1) \ldots 1 = n!$. Cara. Sebagai contoh, banyaknya cara menyusun 5 kartu yang berbeda adalah 5! = 120. Seseorang mungkin juga tertarik pada banyaknya cara pengambilan objek dari n objek yang berbeda dan menggunakan r objek ini.

Teorema 1.3

Banyaknya permutasi r objek diambil dari n objek berbeda adalah
$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Contoh 1.26

Dari 4 huruf a, b, c, d diambil 4 huruf dengan memperhatikan urutan.

Banyaknya cara adalah $4^{P}2 = \frac{4!}{2!} = 12$, yaitu

ab ac ad bc bd cd
ba ca da cb db dc

Contoh 1.27

Sebuah kotak berisi n kartu, masing-masing bernomor 1, 2, … n. Bila tiga kartu diambil tanpa pengembalian maka banyaknya cara pengambilan adalah

$$n^{P}3 = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)\ (n-2)$$

Perhatikan bahwa pada permutasi **urutan diperhatikan**.

Bila urutan objek tidak diperhatikan, dikatakan kita hanya tertarik pada banyaknya kombinasi yang mungkin pada pemilihan *r* objek dari *n* objek yang berada.

Simbol $\binom{n}{r}$ digunakan untuk menyatakan banyaknya kombinasi tersebut.

Teorema 1.4

Banyaknya kombinasi *r* objek yang dipilih dari *n* objek yang berbeda adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Contoh 7

Dari sebuah kotak berisi 10 bola, diambil 3 bola tanpa pengembalian. Perhatikan bahwa urutan tidak diperhatikan. Bila bola diberi nama $b_1, b_2, \ldots b_{10}$, terpilih bola b_1, b_2, b_3.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120.$$

Contoh 1.27

Dari 40 orang dalam suatu kelas dipilih pengurus yang terdiri dari 5 orang. Urutan tidak diperhatikan, karena A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sama dengan terpilih A_2, A_1, A_4, A_5, A_3, sehingga digunakan kombinasi.

Banyaknya cara adalah

$$\binom{40}{5} = \frac{40!}{5!\ 35!} = \frac{40.\ 39.\ 38.\ 37.\ 36}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} = 658008.$$

Misal A_1 harus menjadi pengurus, maka keempat pengurus lainnya dipilih dari 39 orang sehingga banyaknya cara adalah $\binom{39}{4}$ $A1$ – – – –
4 dipilih dari 39

Misal A_2 karena sakit tidak boleh menjadi pengurus maka banyaknya cara adalah $\binom{39}{5}$.

Perhatikan bahwa:

1. $nPr = r!\binom{n}{r}$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
3. $\binom{n}{0} = 1$
4. $\binom{n}{1} = n$
5. $\binom{n}{r} = 0$ bila $n < r$ atau $r < 0$
6. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 0 \le r \le n.$

Bukti:

$\binom{n}{r}$ adalah banyaknya cara pemilihan r objek dan n objek bila urutan tidak diperhatikan.

Biasa disebut: kombinasi r objek dari n objek atau ditulis dengan lambang: c

a. harus ada 1 objek tertentu yang harus terpilih, berarti ada $\binom{n-1}{r-1}$ cara

b. harus ada 1 objek tertentu tidak boleh terpilih, berarti ada $\binom{n-1}{r}$ cara.

Jumlah kedua alternatif ini akan memberikan $\binom{n}{r}$.

7. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \dots \binom{n}{r-1} + \binom{r}{r}$.

Bukti:

$$\binom{n-1}{r} = \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r}$$

$$\binom{n-2}{r} = \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-3}{r}.$$

Didapat

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}\\ &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} + \binom{n-2}{r}\\ &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-3}{r}\\ &\;\;\vdots\\ &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}.\end{aligned}$$

8. $2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}.$

Bukti:

Dari Binomium Newton $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \; a^r \; b^{n-r}$ dengan mengambil $a = b = q$ didapat

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}.$$

9. $\binom{m}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{k}{r} \binom{m-k}{n-r}.$

Bukti:

m objek dipandang terbagi menjadi 2 grup terdiri dari k objek dan $(m-k)$ objek. Untuk memilih n objek dapat dipilih r objek dari grup 1 $\left(\binom{k}{r} \text{ cara}\right)$ dan $(n-r)$ objek dari grup 2 = $\binom{m-k}{n-r}$ cara sehingga terdapat

$\binom{k}{r}\binom{m-k}{n-r}$ cara. Apabila kuantitas ini dijumlah untuk semua harga r yang mungkin didapat $\binom{m}{n}$.

1. *Objek Sama (Tak Dibedakan)*

Contoh 1.28

5 kelereng : 2 hitam (H) dan 3 putih (P). Cara penyusunan kelima objek

$HPHPP$ $PHHPP$ $HPPHP$ $PHPHP$
HHPPP
$PPHHP$ $PPHPH$ $PPPHH$ $PHPPH$ $HPPPH$

Banyaknya cara adalah $=10=\dfrac{5!}{2!\,3!}$.

Teorema 1.5

Banyaknya permutasi yang berbeda dari n objek dengan r di antaranya dari jenis pertama dan sisanya $(n-r)$ jenis kedua adalah $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

Teorema 1.6

Banyaknya permutasi n objek di mana

r_1 objek dari jenis pertama
r_2 objek dari jenis kedua
.
.
.
r_k objek dari jenis ke k
adalah $\dfrac{n!}{r!\,r_2!\ldots r_k!}$ yang disebut koefisien multinominal.

Contoh 1/29

10 kelereng : 2 hitam, 3 putih dan 5 merah. Banyaknya permutasi yang berbeda adalah

$$\frac{10!}{2!\,3!\,...\,5!} = 2520.$$

Contoh 2.30

Beberapa cara menyusun 12 bendera terdiri 3 warna merah, 3 warna hijau, 3 warna kuning dan 3 warna hitam. Dengan teorema 6, banyaknya cara adalah $\frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Seorang anak akan mendapat baju atau celana untuk hadiah ulang tahunnya. Tersedia 3 baju dan 2 celana.
   a) Bila si anak hanya mendapat 1 di antaranya, ada berapa cara pemilihan?
   b) Bila ia mendapat 1 baju dan 1 celana, ada berapa cara pemilihan?
2) Berapa banyaknya bilangan yang dapat disusun dari angka 1, 2, 3 yang kurang dari 200, angka tidak berulang.
3) Ada berapa cara 3 orang pengurus dipilih dari 20 orang. Ada beberapa cara pemilihan 1 orang ketua, wakil dan sekretaris?
4) Tunjukkan bahwa:
   a) $\binom{m}{0} = 1$ b) $\binom{m}{1} = m$ c) $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) 3 + 2

b) 3 . 2.

c)

2) Bilangan yang dimaksud harus kurang dari 200, berarti

(1) Berawal 1 : 1 Cara

(2) Angka ke-2 : 2 cara (2 atau 3)

(3) Angka ke-3 : 1 cara (tinggal 1 pilihan angka 1)

Secara keseluruhan : 1 . 2 . 1 = 2 cara

3) Pemilihan 3 orang pengurus dari 20 orang adalah $\binom{20!}{17!} = 1140.$

Apabila ditentukan jabatan masing-masing maka

A_1	A_2	A_3	=	A_3	A_2	A_1
Ketua	Wakil	Sekretaris		Ketua	Wakil	Sekretaris

Dengan demikian karena urutan diperhatikan permutasi, sehingga banyaknya cara $= 20P3 = \dfrac{20!}{17!} = 20 \,.\, 19 \,.\, 18 = 6840.$

4) a) $\binom{m}{o} = \dfrac{m!}{o!\, m!} = \dfrac{1}{o!} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\binom{m}{1} = \dfrac{m!}{o!\,(m-1)!} = m$

c) $\binom{m}{o} = \dfrac{m!}{o!\,(m-1)!} = \dfrac{m!}{(m-k)!\,(m-(m-k)!} = \binom{m}{m-k}.$

RANGKUMAN

1. Prinsip Perkalian:
   Operasi ke *i* dari *r* operasi dapat dilakukan dengan *ni* cara maka cara melakukan *r* operasi adalah

2. Dari *n* objek yang berbeda diambil *r* objek $r \leq n$
   a Urutan tak diperhatikan, dengan pengembalian banyak cara $= n^r$.

b. Urutan tak diperhatikan, tanpa pengembalian banyaknya cara $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

c. Urutan diperhatikan tanpa pengembalian, banyaknya cara = $n\text{Pr} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

3. Banyaknya permutasi n objek, dengan

r_1 objek dari jenis pertama
r_2 objek dari jenis kedua
.
.
.
r_k objek dari jenis ke k

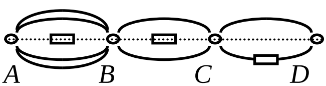
adalah $\dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Banyaknya bilangan bulat antara 100 - 1000 dengan tidak ada digit (angka) yang sama adalah ….
A. 900
B. 648
C. P^{10}
D. P_2^{20}

2) Gambar di bawah menunjukkan jalan yang menghubungkan kota-kota A, B, C dan D. Tanda $\square$ menunjukkan jembatan.



Dengan berapa cara seseorang berjalan dari A ke D kembali ke A lewat jalan yang belum pernah dilewati, *yaitu* ….
A. 240
B. 30^2

C. 10^2
D. 17

3) Dari soal 2, dengan berapa cara seseorang berjalan dari *A* ke *D* dengan melewati tepat 1 jembatan, *yaitu* ….
A. 50
B. 41
C. 37
D. 14

4) 12 pertanyaan dalam ujian harus dijawab dengan *B* (betul) dan *S* (salah). Seorang mahasiswa akan menjawab secara random dengan 6 jawaban *B* dan 6 jawaban *S*. Ada berapa cara seperti ini?
A. 1000
B. 920
C. 917
D. 900

5) Berapa tanda terdiri dari 2 atau 3 huruf yang dapat dibuat dari alphabet *A* - *Z* bila alphabet tidak boleh diulang?
A. ${}_5P_{26}$
B. ${}_2P_{26} + {}_3P_{26}$
C. ${}_2P_{26} - {}_3P_{26}$
D. ${}_3P_{26}$

6) Sebuah dadu dilempar 3 kali. Banyaknya pasangan angka yang tampak adalah ….
A. 6^3
B. 6 + 3
C. 6×3
D. 3^6

7) 4 laki-laki dan 4 wanita merupakan 4 pasangan suami istri. Ada berapa macam dugaan pasangan suami istri?
A. 42
B. 41

C. $\dfrac{8!}{4!\,4!}$

D. $\binom{4}{4}$

8) Diketahui *m* buah kotak dan *j* buah bola. Ada berapa cara menempatkan *j* buah bola tersebut ke dalam *m* kotak secara uniform (bola bisa terletak di kotak mana pun)

A. $m + j$

B. $m \times j$

C. $\binom{m}{j}$

D. m_j

9) Dari soal 8, ada berapa cara bila kotak I harus kosong?

A. $m + j$

B. $m \times j$

C. $\binom{m}{j}$

D. m_j

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) D
2) C
3) D
4) A
5) B
6) C
7) D
8) B
9) B
10) C

Tes Formatif 2
1) B
2) A
3) D
4) C
5) B
6) A
7) A
8) D
9) D

Daftar Pustaka

Blum, Julius R & Rosenblat, Judah I, (1972). *Probability and statistics*, Philadelphia: Saunders Company.

Chung, Kai Lai, (1974). *Elementary Probability Theory with Stochastic Prosesses*, New York: Springer Verlag.

Hogg Robert V & Craig Allen T., (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*, Macmillan Publishing Co, Inc.