

Probabilitas

Prof. Dr. Subanar



PENDAHULUAN

Teori probabilitas adalah cabang Matematika yang berusaha menggambarkan atau memodelkan *chance behavior*. Perjudian memberikan banyak contoh sederhana *chance behavior*, seperti bermain dadu, rolet, dan kartu. Kenyataannya teori probabilitas memang dilahirkan di meja judi pada abad ke-17 ketika para bangsawan kalah permainan. Untuk mengatasi masalah tersebut, mereka tidak berhenti berjudi, tetapi menanyakan kepada temannya yang lebih cerdas untuk menghitung kemungkinan mendapatkan kemenangan. Hasil-hasilnya terangkum dalam teori probabilitas dengan aplikasi yang sangat luas dalam berbagai bidang, seperti teori genetik, kinetik, riset operasi, aktuaria, desain, dan analisis sistem operasi komputer. Modul ini merupakan ulangan singkat teori probabilitas yang sudah Anda kenal dalam Buku Materi Pokok *Metode Statistik 1*.

Setelah mempelajari modul ini, secara umum Anda diharapkan dapat menjelaskan konsep probabilitas sebagai ukuran ketidakpastian suatu peristiwa atau kejadian.

Secara khusus, Anda diharapkan dapat:

1. menghitung probabilitas kejadian-kejadian yang dibentuk oleh operasi komplemen;
2. menghitung probabilitas kejadian-kejadian yang dibentuk oleh operasi gabungan;
3. menghitung probabilitas kejadian-kejadian yang dibentuk oleh operasi irisan;
4. menghitung probabilitas bersyarat suatu kejadian.

KEGIATAN BELAJAR 1

Ruang Sampel

Teori probabilitas digunakan sebagai model untuk keadaan dengan hasil (*outcome*) yang terjadi secara acak (*random*). Secara umum, keadaan demikian disebut *eksperimen* dan himpunan semua hasil yang mungkin disebut *ruang sampel* yang bersesuaian dengan eksperimen tersebut. Ruang sampel dinyatakan dengan Ω dan elemen-elemen dari Ω dinyatakan dengan ω .

Contoh 1.1

Untuk berangkat kerja, seorang pegawai harus melalui 3 persimpangan dengan lampu pengatur lalu-lintas. Pada setiap persimpangan, seseorang berhenti (*B*) atau terus (*T*). Ruang sampel dari eksperimennya adalah:

$$\Omega = \{TTT, TTB, TBB, TBT, BBB, BBT, BTT, BTB\}$$

Contoh 1.2

Misalkan suatu eksperimen dilakukan untuk menghitung sambungan telepon yang masuk pada suatu kantor dalam satuan periode maka ruang sampelnya adalah:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Contoh 1.3

Bila eksperimen dilakukan untuk mengukur waktu hidup sebuah bola lampu maka ruang sampelnya terdiri dari semua bilangan real tak negatif, yakni:

$$\Omega = [0, \infty]$$

Contoh 1.4

Andaikan eksperimen dilakukan dengan cara melemparkan dua dadu maka ruang sampel terdiri dari 36 titik berikut.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; \\ (2,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (2,4) ; (2,5) ; (2,6) ; \\ (3,1) ; (3,2) ; (3,3) ; (3,4) ; (3,5) ; (3,6) ; \\ (4,1) ; (4,2) ; (4,3) ; (4,4) ; (4,5) ; (4,6) ; \\ (5,1) ; (5,2) ; (5,3) ; (5,4) ; (5,5) ; (5,6) ; \\ (6,1) ; (6,2) ; (6,3) ; (6,4) ; (6,5) ; (6,6) \end{array} \right\}$$

Suatu kejadian atau peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian yang terdiri dari satu *outcome* disebut *kejadian elementer*. Himpunan bagian ruang sampel yang merupakan himpunan kosong disebut *kejadian mustahil* sedang Ω sendiri disebut *kejadian pasti*. Aljabar teori himpunan terbawa langsung ke dalam teori probabilitas.

Gabungan dua kejadian A dan B adalah kejadian C dengan salah satu A atau B terjadi atau kedua-duanya terjadi dan ditulis $A \cup B$. Dalam Contoh 1.1, apabila A adalah kejadian seorang pegawai berhenti pada pengatur lalu lintas pertama, yaitu:

$$A = \{BBB, BBT, BTT, BTB\}$$

dan B kejadian pegawai berhenti pada persimpangan ketiga, yaitu:

$$B = \{TTB, TBB, BBB, BTB\}$$

sehingga:

$$C = A \cup B = \{BBB, BBT, BTT, BTB, TTB, TBB\}$$

Irisan dua kejadian, $D = A \cap B$ adalah kejadian dengan A dan B keduanya terjadi. Apabila A dan B , seperti yang disebutkan di atas maka D adalah kejadian di mana pegawai berhenti pada persimpangan pertama dan ketiga, yakni:

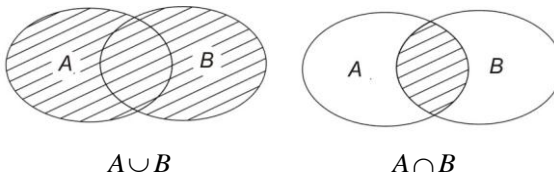
$$D = \{BBB, BTB\}$$

Komplemen kejadian A ditulis A^c adalah kejadian di mana A tidak terjadi. Dalam hal ini A^c terdiri dari elemen-elemen dalam ruang sampel yang tidak berada dalam A . Komplemen kejadian pegawai berhenti pada persimpangan pertama adalah kejadian di mana pegawai terus pada persimpangan pertama, yakni:

$$A^c = \{TTT, TTB, TBB, TBT\}$$

Anda mungkin masih ingat tentang himpunan yang agak misterius dalam teori himpunan, yaitu himpunan kosong yang dinyatakan dengan \emptyset . *Himpunan kosong* adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen, dalam teori probabilitas himpunan kosong diperoleh pada kejadian tanpa *outcome*. Pada Contoh 1.1, apabila A adalah kejadian di mana seorang pegawai berhenti pada persimpangan pertama dan C adalah kejadian pegawai tersebut terus berjalan pada ketiga persimpangan maka $A \cap C = \emptyset$. Dalam hal ini, A dan C disebut *kejadian saling asing*.

Diagram Venn, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.1 berikut sering merupakan alat berguna untuk menggambarkan operasi himpunan, di mana daerah yang diarsir menunjukkan hasil operasi himpunan.



Gambar 1.1

Ada beberapa hukum teori himpunan, yaitu:

Hukum komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Hukum asosiatif

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Hukum distributif

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Ukuran Probabilitas

Ukuran probabilitas pada Ω adalah fungsi P yang bernilai real pada himpunan-himpunan bagian dari Ω yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $P(\Omega) = 1$
2. Apabila $A \subseteq \Omega$ maka $P(A) \geq 0$
3. Apabila A_1, A_2, A_3, \dots saling asing dalam arti $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk

$$i \neq j \text{ maka } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Aksioma 3 disebut *countably additive*.

Sifat-sifat Probabilitas

1. $P(\emptyset) = 0$

Dari kenyataan $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$ didapat $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$ atau $1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$ dan $P(\emptyset) = 0$ karena $P(\emptyset) \geq 0$.

2. Probabilitas mempunyai sifat *finitely additive* dalam arti untuk setiap A_1, A_2, \dots, A_n dengan $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \text{ Kenyataannya:}$$

3. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, apabila $A_j = \emptyset$ untuk $j \geq n + 1$.

4. $P(A^c) = 1 - P(A)$

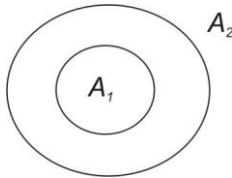
Oleh karena $A \cup A^c = \Omega$ dan $A \cap A^c = \emptyset$ maka $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$, artinya $P(A^c) = 1 - P(A)$.

5. Apabila $A_1 \subseteq A_2$ maka $P(A_1) \leq P(A_2)$

Oleh karena $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1) = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$ maka:

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \quad \text{ini berarti}$$

$$P(A_1) \leq P(A_2)$$



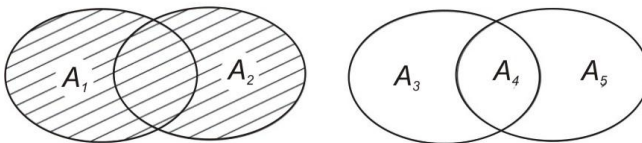
Catatan:

Apabila $A_1 \subseteq A_2$ maka $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$, tetapi bentuk tersebut tidak benar secara umum.

6. Dari aksioma 1, 2 dan sifat 4 dapat disimpulkan bahwa $0 \leq P(A) \leq 1$ untuk setiap $A \subseteq \Omega$

7. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Untuk membuktikan pernyataan di atas, kita pecah $A_1 \cup A_2$ menjadi 3 himpunan yang saling asing, yaitu $A_3 = A_1 \cap A_2^c$, $A_4 = A_1 \cap A_2$, dan $A_5 = A_1^c \cap A_2$



Dari sifat 2 didapat $P(A_1 \cup A_2) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$, selanjutnya $A_1 = A_3 \cup A_4$ dengan $A_3 \cap A_4 = \emptyset$. Ini berarti $P(A_1) = P(A_3) + P(A_4)$. Dengan pemikiran yang sama $P(A_2) = P(A_4) + P(A_5)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
 P(A_1) + P(A_2) &= P(A_3) + P(A_5) + 2 P(A_4) \\
 &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_4) \\
 &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2)
 \end{aligned}$$

atau $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

8. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$

Misalkan, $B_i = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c \cap A_i^c$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka untuk

$i \neq j$, B_i dan B_j saling asing dan $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Ini berarti

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i).$$

Oleh karena $B_i \subseteq A_i$ untuk

setiap i maka $P(B_i) \leq P(A_i)$. Jadi, $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Contoh 1.5

Misalkan sebuah mata uang seimbang dilemparkan 2 kali. Andaikan A menyatakan kejadian mendapat M (muka) pada lemparan pertama dan B kejadian mendapat M pada lemparan kedua maka ruang sampelnya adalah $\Omega = \{MM, MB, BM, BB\}$. Selanjutnya jika setiap *outcome* elementer dalam Ω berkemungkinan sama dan mempunyai probabilitas 0,25 serta $C = A \cup B$ merupakan kejadian M muncul pada lemparan pertama atau kedua maka terlihat $P(C) \neq P(A) + P(B)$. Oleh karena $A \cap B$ adalah kejadian tampak M pada lemparan pertama dan lemparan kedua yang nilainya sama dengan 0,25 maka $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75$.

Menghitung Probabilitas dengan Metode Pencacahan

Probabilitas mudah dihitung untuk ruang sampel berhingga. Misalkan, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ dan $P\{\omega_i\} = p_i$. Untuk mendapatkan probabilitas kejadian A , kita cukup menjumlahkan probabilitas ω_i yang menjadi anggota A .

Contoh 1.6

Sebuah mata uang seimbang dilemparkan dua kali maka ruang sampelnya adalah $\Omega = \{MM, MB, BM, BB\}$. Kita andaikan setiap *outcome* dalam Ω mempunyai probabilitas 0,25 dan A menyatakan kejadian paling sedikit tampak satu muka maka:

$$A = \{MM, MB, BM\} \text{ dan } P(A) = 0,75$$

Contoh 1.6 adalah contoh sederhana dari situasi yang banyak dijumpai. Elemen-elemen dari Ω semuanya mempunyai probabilitas yang sama sehingga apabila terdapat N elemen dalam Ω maka setiap elemennya mempunyai probabilitas $\frac{1}{N}$. Bila A dapat terjadi dalam n cara yang saling asing maka:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

atau

$$P(A) = \frac{\text{cacah cara } A \text{ dapat terjadi}}{\text{total cacah } outcome}$$

Perhatikan bahwa rumus tersebut berlaku hanya bila *outcome* berkemungkinan sama. Dalam Contoh 1.6, apabila kita mencatat jumlah muka yang muncul maka $\Omega = \{0, 1, 2\}$. *Outcome* tidak berkemungkinan sama dan $P(A)$ tidak sama dengan $\frac{2}{3}$.

Contoh 1.7

Sebuah kotak hitam memuat 5 bola merah dan 6 bola hijau dan kotak putih memuat 3 bola merah dan 4 bola hijau. Kita diperbolehkan memilih sebuah kotak dan memilih sebuah bola secara random dari kotak. Bila mendapat bola merah, kita mendapat hadiah. Kotak mana yang akan dipilih untuk mendapatkan bola merah?

Apabila kita mengambil bola dari kotak hitam, probabilitas mendapat bola merah adalah $\frac{5}{11} = 0,455$. Apabila kita mengambil bola dari kota putih

probabilitas mendapat bola merah adalah $\frac{3}{7} = 0,429$ sehingga kita lebih memilih mengambil bola dari kotak hitam.

Sekarang pandang permainan lain di mana kotak hitam kedua mempunyai 6 bola merah dan 3 bola hijau sedangkan kotak putih kedua mempunyai 9 bola merah dan 5 bola hijau. Apabila kita mengambil bola dari kotak hitam, probabilitas mendapat bola merah sama dengan $\frac{6}{9} = 0,667$, sedangkan apabila kita mengambil bola dari kotak putih, probabilitas mendapat bola merah adalah $\frac{9}{14} = 0,643$. Sehingga kita lebih memilih mengambil bola dari kotak hitam lagi.

Dalam pertandingan akhir, isi dari kotak hitam kedua dimasukkan dalam kotak pertama dan isi dari kotak putih kedua dimasukkan dalam kotak putih pertama. Kotak mana yang kita pilih untuk mendapatkan bola merah?

Secara intuitif mestinya kita memilih kotak hitam, tetapi jika kita hitung probabilitas mendapat bola merah untuk kotak hitam yang memuat 11 bola merah dan 9 bola hijau adalah $\frac{11}{20} = 0,55$, serta probabilitas mendapat bola merah untuk kotak putih yang memuat 12 bola merah dan 9 bola hijau adalah $\frac{12}{21} = 0,571$ maka kita lebih memilih mengambil bola dari kotak putih. Hasil yang bertentangan ini adalah salah satu contoh *Simpson's paradox*. Dalam contoh tersebut sangat mudah untuk mencacah *outcome* dan menghitung probabilitas. Untuk menghitung probabilitas masalah yang lebih kompleks, kita harus membangun cara sistematis untuk mencacah *outcome* yang merupakan bahasan kita berikutnya.

Prinsip Perkalian

Apabila suatu eksperimen mempunyai m *outcome* dan eksperimen lain mempunyai n *outcome* maka ada $m n$ *outcome* yang mungkin untuk kedua eksperimen.

Bukti:

Kita nyatakan *outcome* dari eksperimen pertama dengan a_1, a_2, \dots, a_m dan *outcome* dari eksperimen kedua dengan b_1, b_2, \dots, b_n . *Outcome* dari dua eksperimen adalah pasangan terurut (a_i, b_j) . Pasangan-pasangan terurut tersebut dapat disajikan sebagai masukan dari larikan (matriks) empat persegi panjang bertipe $m \times n$, di mana pasangan (a_i, b_j) berada pada baris ke- i dan kolom ke- j . Larikan ini mempunyai $m \times n$ masukan.

Contoh 1.8

Seorang mahasiswa mempunyai 2 celana dan 3 kemeja maka mahasiswa tersebut dapat berpakaian dengan $2 \times 3 = 6$ cara.

Contoh 1.9

Suatu kelas mempunyai 12 mahasiswa dan 18 mahasiswi. Perwakilan yang terdiri dari satu mahasiswa dan satu mahasiswi dapat dibentuk dengan $12 \times 18 = 216$ cara.

Perluasan Prinsip Perkalian

Apabila terdapat p eksperimen, dengan eksperimen pertama mempunyai n_1 *outcome*, eksperimen kedua mempunyai n_2 *outcome*, dan eksperimen ke- p mempunyai n_p *outcome* maka secara total terdapat $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ *outcome* yang mungkin dari p eksperimen.

Contoh 1.10

Suatu kode 8 bit biner adalah barisan yang terdiri dari 8 digit yang nilainya 0 atau 1.

Oleh karena ada 2 pilihan untuk bit pertama, 2 pilihan untuk bit kedua dan seterusnya maka terdapat $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ macam kode yang dapat dibuat.

Contoh 1.11

Suatu molekul DNA adalah barisan 4 jenis *nucleotides* yang dinyatakan dengan A, G, C dan T. Suatu molekul bisa terdiri dari jutaan unit *nucleotides*. Jika suatu molekul terdiri dari 1 juta (10^6) unit maka molekul tersebut akan mempunyai 4^{10^6} barisan yang berbeda, ini merupakan jumlah yang sangat

besar. Suatu asam amino dikodekan oleh barisan tiga *nucleotides*. Ini berarti terdapat $4^3 = 64$ kode yang berbeda, tetapi hanya terdapat 20 asam amino karena beberapa di antaranya dapat dikodekan dalam beberapa cara. Suatu molekul protein yang terdiri dari 100 asam amino dapat tersusun dalam 20^{100} cara pengkodean.

Permutasi dan Kombinasi

Suatu permutasi adalah susunan terurut dari objek-objek. Misalkan, dari himpunan $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, kita memilih r elemen dan mendaftarkannya dalam urutan. Dalam berapa cara kita dapat melakukan hal tersebut?

Jawabannya tergantung apakah kita diperbolehkan melakukan duplikasi atau ulangan dari item-item dalam daftar. Apabila tidak diperbolehkan ada ulangan, artinya kita melakukan sampling tanpa pengembalian. Apabila ulangan diperbolehkan, kita melakukan sampling dengan pengembalian. Kita bisa memikirkan persoalan tersebut, seperti mengambil bola bertanda dari suatu kotak. Pada sampling jenis pertama, kita tidak diperbolehkan mengembalikan bola sebelum pengambilan berikutnya, tetapi kita diperbolehkan untuk jenis kedua. Dalam kedua kasus, bila kita selesai memilih, kita mempunyai daftar r bola yang diurutkan dalam barisan sesuai dengan cara pengambilannya.

Perluasan prinsip perkalian dapat digunakan untuk menghitung cacah sampling berbeda yang mungkin dari himpunan yang terdiri n elemen. Misalkan, sampling dikerjakan dengan pengembalian, bola pertama dapat dipilih dalam n cara, yang kedua dalam n cara dan seterusnya sehingga terdapat $n \times n \times \dots \times n = n^r$ sampel. Jika sampling dikerjakan tanpa pengembalian maka terdapat n pilihan untuk bola pertama, $(n-1)$ pilihan untuk bola kedua, $(n-2)$ pilihan untuk bola ketiga, dan $(n-r+1)$ pilihan untuk bola yang ke- r , ini berarti kita telah membuktikan proposisi berikut.

Proposisi 1.1

Untuk himpunan dengan n elemen dan sampel berukuran r , terdapat n^r sampel terurut dengan pengembalian dan $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ sampel terurut tanpa pengembalian. Akibatnya, cacah urutan n elemen adalah $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

Contoh 1.12

Kita akan menghitung banyaknya bilangan terdiri dari tiga angka yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5. Apabila sampling dilakukan tanpa pengembalian maka banyak bilangan yang dapat disusun adalah $5.4.3 = 60$ dan $5^3 = 125$ jika sampling dengan pengembalian.

Contoh 1.13

Pada suatu provinsi, papan plat nomor mobil terdiri dari 3 huruf yang diikuti dengan 3 angka. Banyaknya plat nomor mobil yang dapat dibuat bersesuaian pada sampling dengan pengembalian sehingga terdapat $26^3 = 17.576$ cara berbeda untuk memilih bagian huruf dan $10^3 = 1.000$ cara memilih bagian angka. Dengan menggunakan prinsip perkalian, kita mendapatkan $17.576 \times 1.000 = 17.576.000$ plat nomor mobil yang bisa dibuat.

Contoh 1.14

Apabila pada Contoh 1.13 semua barisan yang terdiri dari 3 huruf dan 3 angka tersebut berkemungkinan sama maka probabilitas sebuah mobil baru dengan plat nomornya tidak memuat huruf atau angka yang sama dapat ditentukan sebagai berikut.

Perhatikan bahwa Ω terdiri dari 17.576.000 *outcome* dan sebut kejadian yang dicari adalah A maka probabilitas A sama dengan hasil bagi cacah antara kejadian A dapat terjadi dengan total cacah *outcome*. Terdapat 26 pemilihan untuk huruf pertama, 25 untuk huruf kedua dan 24 untuk yang ketiga, dan akibatnya ada $26 \times 25 \times 24 = 15.600$ cara untuk memilih huruf tanpa ulangan dan $10 \times 9 \times 8 = 720$ cara untuk memilih bilangan tanpa ulangan. Menggunakan prinsip perkalian maka akan diperoleh $15.600 \times 720 = 11.232.000$ barisan tanpa ulangan. Jadi, probabilitas A adalah

$$P(A) = \frac{11.232.000}{17.576.000} = 0,64$$

Contoh 1.15

Misalkan, suatu ruangan memuat n orang, untuk mendapatkan probabilitas paling sedikit 2 orang di antaranya mempunyai ulang tahun yang sama adalah persoalan yang dikenal dengan jawab yang berlawanan dengan intuisi. Andaikan setiap hari dalam satu tahun adalah ulang tahun dengan kemungkinan sama dan misalkan A adalah kejadian paling sedikit dua orang

mempunyai ulang tahun yang sama. Seperti dalam beberapa kasus, lebih mudah menghitung $P(A^c)$ dulu, kemudian menghitung $P(A)$. Ini dikerjakan karena A dapat terjadi dalam banyak cara, sedangkan A^c lebih sederhana. Terdapat 365^n *outcome* yang mungkin dan A^c dapat terjadi dalam $365 \times 364 \times (365 - n + 1)$ cara sehingga:

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$P(A) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

Tabel berikut menunjukkan nilai $P(A)$ untuk berbagai nilai n .

| n | $P(A)$ |
|-----|--------|
| 4 | 0,016 |
| 16 | 0,284 |
| 23 | 0,507 |
| 32 | 0,753 |
| 40 | 0,891 |
| 56 | 0,988 |

Dari tabel di atas, bila terdapat 23 orang, probabilitas paling sedikit ada yang sama ulang tahunnya melebihi 0,5.

Contoh 1.16

Pada Contoh 1.15 ada berapa orang yang harus ditanya untuk mendapatkan peluang mempunyai hari ulang tahun sama dengan saudara adalah 0,5? Misalkan, saudara sudah menanyakan pada n orang dan A menyatakan kejadian ulang tahun seseorang sama dengan ulang tahun saudara maka akan lebih mudah bekerja dengan A^c , yakni kejadian ulang tahun seseorang tidak sama dengan ulang tahun saudara. Total cacah *outcome* adalah 365^n dan total cacah A^c dapat terjadi adalah 364^n sehingga:

$$P(A^c) = \frac{364^n}{365^n} \text{ dan } P(A) = 1 - \frac{364^n}{365^n}$$

Agar diperoleh $P(A)$ sama dengan 0,5 maka n harus sama dengan 253.

Sekarang kita perhatikan cara menghitung kombinasi. Jika kita tidak lagi tertarik pada sampel terurut, tetapi kita membicarakan keanggotaan sampel tanpa memandang urutan dari mana ia didapat, khususnya kita tertarik untuk mengetahui berapa banyak sampel yang dapat dibuat apabila r objek diambil dari himpunan yang mempunyai n objek tanpa pengembalian dan tidak memperhatikan urutan. Dari prinsip perkalian, jumlah sampel terurut sama dengan jumlah sampel tak terurut dikalikan jumlah cara mengurutkan setiap sampel. Oleh karena jumlah sampel terurut adalah $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ dan untuk sampel ukuran r dapat diurutkan sebanyak $r!$ cara maka jumlah sampel tidak terurut dinyatakan dengan:

$$\binom{n}{r} = \frac{\binom{n}{r} (n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Proposisi 1.2

Cacah sampel tak terurut beranggotakan r objek yang diambil dari n objek tanpa pengembalian adalah $\binom{n}{r}$.

Bilangan $\binom{n}{r}$ dikenal sebagai koefisien Binomial yang terdapat dalam

ekspansi: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, khususnya $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Hasil terakhir

dapat diinterpretasikan sebagai jumlah himpunan bagian dari himpunan dengan n objek. Kita hanya menjumlahkan jumlah himpunan bagian dengan ukuran 0 (dengan konvensi $0!=1$), jumlah himpunan bagian dengan ukuran 1, jumlah himpunan bagian dengan ukuran 2, dan seterusnya.

Contoh 1.17

Sebuah kotak memuat 8 bola yang diberi nomor 1 sampai 8. Empat bola diambil secara acak, probabilitas bilangan terkecilnya adalah 3 dapat ditentukan sebagai berikut. Apabila sampling tanpa pengembalian, probabilitas yang dicari adalah:

$$\frac{1 \binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{7}$$

Contoh 1.18

Pada proses pengontrolan kualitas, hanya sebagian *output* proses produksi diperiksa karena terlalu mahal dan menghabiskan waktu apabila semua item diperiksa atau kadang-kadang pengujian sifatnya merusak. Misalkan, terdapat n item dalam suatu lot dan diambil sampel berukuran r maka terdapat $\binom{n}{r}$ sampel yang mungkin. Sekarang, misalkan lot tersebut memuat k item cacat maka peluang sampel memuat tepat m item cacat dapat ditentukan sebagai berikut.

Pertanyaan ini relevan dengan kegunaan kerangka sampling dan ukuran sampel yang paling diinginkan yang dapat ditentukan dengan menghitung probabilitas tersebut untuk berbagai nilai r . Sebut kejadian A adalah kejadian sampel memuat tepat m item cacat. Probabilitas A adalah cacah cara A dapat terjadi dibagi dengan total jumlah *outcome*. Untuk mendapatkan jumlah cara A dapat terjadi, kita menggunakan prinsip perkalian. Terdapat $\binom{k}{m}$ cara untuk memilih m item cacat dalam sampel dari k item cacat dalam lot, dan terdapat $\binom{n-k}{r-m}$ cara untuk memilih $(r-m)$ item tak cacat dalam sampel dari $(n-k)$ item tak cacat dalam lot. Akibatnya A dapat terjadi dalam $\binom{k}{m} \binom{n-k}{r-m}$ cara. Jadi, $P(A)$ adalah rasio cacah cara A dapat terjadi dengan total jumlah *outcome*, yakni:

$$P(A) = \frac{\binom{k}{m} \binom{n-k}{r-m}}{\binom{n}{r}}$$

Contoh 1.19

Metode penangkapan/penangkapan kembali, biasanya digunakan untuk mengestimasi ukuran populasi margasatwa. Misalkan 10 binatang tertangkap dan diberi tanda, kemudian dilepaskan. Pada kejadian lain, 20 binatang tertangkap dan 4 di antaranya mempunyai tanda maka besar populasinya dapat ditentukan sebagai berikut.

Kita andaikan terdapat n binatang dalam populasi dengan 10 di antaranya diberi tanda. Bila 20 binatang yang tertangkap, kemudian diambil sedemikian sehingga semua ada $\binom{n}{20}$ kelompok yang mempunyai

kemungkinan sama maka probabilitas 4 di antaranya bertanda adalah
$$\frac{\binom{10}{4}\binom{n-10}{16}}{\binom{n}{20}}.$$

Dengan sendirinya, n tidak dapat ditentukan secara tepat dari informasi di atas, tetapi dapat diestimasi. Salah satu metode estimasi yang disebut *maximum likelihood* adalah memilih nilai n yang membuat *outcome* terobservasi paling mungkin terjadi. Misalkan, secara umum t binatang diberi tanda dan pada sampel kedua berukuran m terdapat r binatang dengan tanda tertangkap kembali. Kita mengestimasi n dengan memaksimumkan *likelihood*:

$$L_n = \frac{\binom{t}{r}\binom{n-t}{m-r}}{\binom{n}{m}}$$

Rasio dari dua suku berurutan setelah melakukan beberapa manipulasi Aljabar adalah:

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{(n-t)(n-m)}{n(n-t-m+r)}$$

Rasio ini lebih besar dari 1, artinya L_n naik, apabila:

$$\begin{aligned}
 (n-t)(n-m) &> n(n-t-m+r) \\
 n^2 - nm - nt + mt &> n^2 - nt - nm + nr \\
 mt &> nr \\
 \frac{mt}{r} &> n
 \end{aligned}$$

Jadi, L_n naik untuk $n < \frac{mt}{r}$ dan turun untuk $n > \frac{mt}{r}$. Nilai n yang memaksimumkan L_n adalah bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi $\frac{mt}{r}$ sehingga untuk data yang ada, diperoleh penaksir *maximum likelihood* adalah $n = \frac{mt}{r} = \frac{(20)(10)}{4} = 50$.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Jika sebuah mata uang seimbang dilemparkan 3 kali, tentukan:
 - a. ruang sampel Ω
 - b. elemen dari kejadian-kejadian:
 - A : paling sedikit dua muka (M)
 - B : dua lemparan pertama muka (M)
 - C : lemparan terakhir belakang (B)
 - c. elemen dari kejadian-kejadian A^c ; $A \cap B$; $A \cup C$

- 2) Dua buah dadu seimbang dilemparkan secara berurutan, tentukan:
 - a. ruang sampel Ω
 - b. elemen dari kejadian-kejadian:
 - A : jumlah dua mata yang tampak paling sedikit 5
 - B : nilai dadu pertama lebih tinggi dibandingkan nilai dadu kedua
 - C : nilai mata dadu pertama 4
 - c. Tentukan elemen-elemen dari $A \cap C$ dan $B \cup C$

- 3) Sebuah kotak memuat 3 bola merah, 2 bola hijau, dan 1 bola putih. Tiga bola diambil dari kotak tanpa pengembalian dan warnanya dicatat secara berurutan, tentukan ruang sampel Ω .
- 4) Untuk tiga kejadian A , B , dan C buktikan:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) a. Untuk eksperimen sebuah mata uang dilempar tiga kali diperoleh ruang sampel
 $\Omega = \{MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB\}$
- b. $A = \{MMM, MMB, MBM, BMM\}$
 $B = \{MMM, MMB\}$
 $C = \{MMB, MBB, BMB, BBB\}$
- c. $A^c = \{MBB, BMB, BBM, BBB\}$
 $A \cap B = \{MMM, MMB\}$
 $A \cup C = \{MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBB\}$
- 2) a. Pada eksperimen dua buah dadu seimbang dilempar secara berurutan diperoleh ruang sampel:
 $\Omega = \{(1, 1); (2, 1); (3, 1); (4, 1); (5, 1); (6, 1)$
 $(1, 2); (2, 2); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2)$
 $(1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3); (5, 3); (6, 3)$
 $(1, 4); (2, 4); (3, 4); (4, 4); (5, 4); (6, 4)$
 $(1, 5); (2, 5); (3, 5); (4, 5); (5, 5); (6, 5)$
 $(1, 6); (2, 6); (3, 6); (4, 6); (5, 6); (6, 6)\}$

b.

$$A = \{ (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 3); (2, 4); (2, 5); \\ (2, 6); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); \\ (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); \\ (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); \\ (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6) \}$$

$$B = \{ (2, 1); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (4, 2); \\ (4, 3); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); \\ (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5) \}$$

$$C = \{ (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6) \}$$

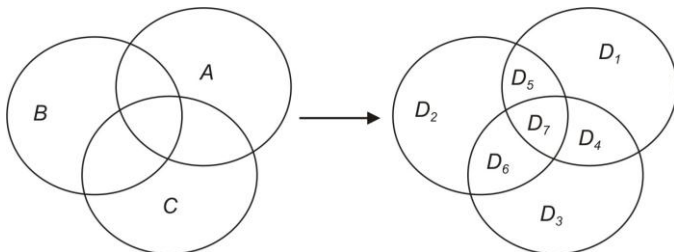
c. $A \cap C = \{ (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6) \}$

$$B \cup C = \{ (2, 1); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); \\ (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5) \}$$

3) Oleh karena pengambilan bola dilakukan satu per satu maka urutan diperhatikan, artinya $MHP \neq PMH$ dan seterusnya sehingga:

$$\Omega = \{ MMM, MMH, MHM, HMM, MMP, MPM, PMM, MHH, HMH, \\ HHM, MHP, MPH, HPM, HMP, PMH, PHM, HHP, HPH, PHH \}$$

4)



$$P(A \cup B \cup C) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) + P(D_4) + P(D_5) + P(D_6) + P(D_7)$$

Oleh karena:

$$P(A) = P(D_1) + P(D_4) + P(D_5) + P(D_7)$$

$$P(B) = P(D_2) + P(D_5) + P(D_6) + P(D_7)$$

$$P(C) = P(D_3) + P(D_4) + P(D_6) + P(D_7)$$

$$P(A \cap B) = P(D_5) + P(D_7)$$

$$P(A \cap C) = P(D_4) + P(D_7)$$

$$P(B \cap C) = P(D_6) + P(D_7)$$

Sehingga dapat dibuktikan:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



RANGKUMAN

1. Untuk setiap kejadian A berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Apabila $A \cap B = \emptyset$ maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(Hukum probabilitas untuk kejadian saling asing)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(Hukum peluang untuk kejadian yang tidak saling asing)
4. Apabila $A \subseteq B$ maka $P(A) \leq P(B)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$



TES FORMATIF 1 _____

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Dua buah dadu seimbang dilemparkan sekali, probabilitas jumlah mata yang tampak adalah 5 sama dengan ...
- A. $\frac{1}{8}$
 - B. $\frac{2}{9}$
 - C. $\frac{1}{9}$
 - D. $\frac{2}{7}$
- 2) **Lihat soal nomor 1.** Probabilitas jumlah mata yang tampak dapat dibagi dengan 3 sama dengan ...
- A. $\frac{4}{9}$
 - B. $\frac{2}{7}$
 - C. $\frac{1}{4}$
 - D. $\frac{1}{3}$
- 3) Dua puluh bola bernomor 1 sampai dengan 20 dikocok dalam suatu kotak, kemudian diambil dua bola berturut-turut tanpa pengembalian. Bila x_1 dan x_2 adalah nomor yang tertulis pada bola terambil pertama dan kedua maka probabilitas $x_1 + x_2 = 13$ sama dengan ...
- A. $\frac{3}{95}$
 - B. $\frac{7}{95}$
 - C. $\frac{2}{85}$

D. $\frac{7}{75}$

4) **Lihat soal nomor 3.** Probabilitas $x_1 + x_2 \leq 5$ sama dengan

A. $\frac{7}{95}$

B. $\frac{2}{95}$

C. $\frac{3}{85}$

D. $\frac{5}{67}$

5) Misalkan, $\Omega = \{x \text{ bulat} : 1 \leq x \leq 200\}$ dan kejadian A , B dan C didefinisikan sebagai:

$$A = \{x \in \Omega : x \text{ dapat dibagi } 7\}$$

$$B = \{x \in \Omega : x = 3n + 10 \text{ untuk suatu bilangan bulat positif } n\}$$

$$C = \{x \in \Omega : x^2 + 1 \leq 375\}$$

Maka, $P(A)$ sama dengan

A. 0,34

B. 0,24

C. 0,14

D. 0,41

6) **Lihat soal nomor 5.** $P(B)$ sama dengan

A. 0,513

B. 0,335

C. 0,315

D. 0,215

7) **Lihat soal nomor 5.** $P(C)$ sama dengan

A. 0,115

B. 0,025

C. 0,195

D. 0,095

8) Apabila kejadian-kejadian $A_j ; j=1, 2, 3$ sedemikian hingga

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \text{ dan } P(A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2) = \frac{5}{12}, \quad P(A_3) = \frac{7}{12} \text{ maka}$$

$P(A_1^c \cap A_2)$ sama dengan

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{2}{7}$

D. $\frac{1}{8}$

9) **Lihat soal nomor 8.** $P(A_1^c \cap A_3)$ sama dengan

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{5}$

10) **Lihat soal nomor 8.** $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$ sama dengan

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{9}{12}$

C. $\frac{7}{12}$

D. $\frac{5}{12}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Probabilitas Bersyarat

Salah satu konsep yang paling berguna dalam teori probabilitas adalah probabilitas bersyarat. Alasannya ada dua. *Pertama*, dalam kenyataan kita sering tertarik untuk menghitung probabilitas apabila tersedia informasi parsial, ini berarti probabilitas yang dicari bersyarat. *Kedua*, dalam menghitung probabilitas yang diinginkan sering harus didahului dengan kebersyaratan.

Misalkan, kita melemparkan dua dadu dengan masing-masing dari 36 *outcome* mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, yakni mempunyai probabilitas $\frac{1}{36}$. Jika kita observasi bahwa dadu pertama muncul

mata 4, dengan adanya informasi tersebut, tentukan probabilitas bahwa jumlah mata yang tampak sama dengan 6. Untuk menghitung probabilitas ini kita mempunyai fakta sebagai berikut. Diberikan mata dadu pertama 4 maka akan ada enam *outcome* yang mungkin, yaitu (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5) dan (4,6). Oleh karena *outcome* tersebut asalnya mempunyai probabilitas sama untuk terjadi maka *outcome* tersebut masih tetap mempunyai probabilitas yang sama. Ini berarti jika diberikan mata dadu pertama 4 maka probabilitas (bersyarat) setiap *outcome* dari

$\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$ adalah $\frac{1}{6}$, sedangkan probabilitas

bersyarat tiga puluh titik yang lain dalam ruang sampel adalah nol.

Akibatnya, probabilitas yang dicari adalah $\frac{1}{6}$.

Misalkan, A dan B masing-masing menyatakan kejadian jumlah mata 6 dan kejadian jumlah mata 4 maka probabilitas yang baru dihitung disebut *probabilitas bersyarat A terjadi jika diketahui B telah terjadi* dan ditulis $P(A|B)$. Rumus umum untuk $P(A|B)$ yang berlaku untuk setiap kejadian A dan B didefinisikan dengan cara yang sama seperti di atas. Sebut saja, bila kejadian B terjadi maka agar A terjadi, kejadian sebenarnya adalah titik-titik dalam A dan B , yaitu harus berada dalam $A \cap B$. Sekarang karena kita ketahui B telah terjadi maka B menjadi ruang sampel kita yang baru, yang

akibatnya probabilitas $A \cap B$ terjadi sama dengan probabilitas $A \cap B$ relatif terhadap B , artinya:

$$(1.1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ; P(B) > 0$$

Contoh 1.20

Misalkan 10 kartu yang diberi nomor 1 sampai dengan 10 ditempatkan pada suatu kotak, dikocok dan diambil sebuah kartu. Apabila kita diberitahu bahwa nomor kartu yang didapat paling sedikit 5 maka probabilitas bersyarat bahwa kartu yang terambil bernomor 10 diperoleh sebagai berikut.

Misalkan, A menyatakan kejadian bahwa nomor kartu yang terambil adalah 10 dan B menyatakan kejadian bahwa nomor yang terambil paling sedikit 5. Berdasarkan persamaan (1.1) probabilitas yang dicari adalah:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Oleh karena kejadian kartu akan bernomor 10 dan paling sedikit bernomor 5 terjadi apabila dan hanya apabila nomor kartu tersebut 10 maka $A \cap B = A$. Jadi,

$$P(A|B) = \frac{1/10}{6/10} = \frac{1}{6}$$

Contoh 1.21

Diketahui sebuah keluarga mempunyai dua anak maka probabilitas bersyarat keduanya laki-laki bila diketahui salah satu anaknya laki-laki dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, S menyatakan ruang sampel, l menyatakan laki-laki dan p menyatakan perempuan maka $S = \{(l, p); (l, l); (p, l); (p, p)\}$ dan setiap *outcome* berkemungkinan sama. Jika A menyatakan kejadian bahwa kedua anaknya laki-laki, dan B menyatakan kejadian paling sedikit satu dari mereka laki-laki maka probabilitas yang dicari adalah:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\{(l, l)\}}{P\{(l, l); (l, p); (p, l)\}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Contoh 1.22

Ali dapat mengambil mata kuliah Komputer atau Kimia. Apabila Ali mengambil mata kuliah Komputer maka ia akan mendapat nilai A dengan probabilitas $\frac{1}{2}$, sedangkan apabila mengambil mata kuliah Kimia, ia akan mendapat nilai A dengan probabilitas $\frac{1}{3}$. Ali mendasarkan keputusannya mengambil mata kuliah pada hasil pelemparan sebuah mata uang seimbang. Probabilitas Ali mengambil mata kuliah Kimia dan mendapat nilai A dapat dihitung sebagai berikut.

Apabila A adalah kejadian Ali mengambil mata kuliah Kimia dan B menyatakan kejadian Ali mendapat nilai A apa pun mata kuliah yang ia ambil maka probabilitas yang dicari adalah:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Contoh 1.23

Sebuah kotak memuat 7 bola hitam dan 5 bola putih. Kita mengambil dua bola dari kotak tanpa pengembalian. Andaikan setiap bola dalam kotak mempunyai kemungkinan yang sama untuk diambil maka probabilitas kedua bola yang terambil adalah hitam dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, A dan B masing-masing menyatakan kejadian bahwa bola pertama dan kedua yang terambil adalah hitam. Sekarang, misalkan bola pertama yang terambil hitam maka tersisa 6 bola hitam dan 5 bola putih sehingga $P(A|B) = \frac{6}{11}$. Oleh karena $P(B) = \frac{7}{12}$ maka probabilitas yang ditanyakan adalah:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{6}{11}\right) = \frac{42}{132}$$

Contoh 1.24

Misalkan, pada suatu pesta 3 orang laki-laki melemparkan topinya ke tengah ruangan. Topi-topi tersebut dicampur dan setiap orang mengambil secara acak sebuah topi maka probabilitas tak seorang pun dari mereka mendapatkan topinya sendiri dihitung sebagai berikut.

Kita akan menyelesaikan persoalan tersebut dengan menghitung probabilitas komplemen bahwa paling sedikit ada satu orang yang mendapatkan topinya sendiri. Misalkan, A_i ; $i=1, 2, 3$ menyatakan kejadian bahwa orang ke- i mendapatkan topinya sendiri. Untuk menghitung $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, perhatikan bahwa:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}; \quad i=1, 2, 3$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{6}; \quad i \neq j$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$$

Untuk melihat mengapa ketiga pernyataan tersebut benar, perhatikan bahwa:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j | A_i)$$

Probabilitas bahwa orang ke- i menemukan topinya sendiri adalah $P(A_i) = \frac{1}{3}$

karena ia mempunyai kemungkinan yang sama untuk memilih satu dari 3 topi yang ada. Apabila diketahui orang ke- i telah memilih topinya sendiri maka masih tersisa dua topi yang dapat dipilih orang ke- j . Oleh karena salah satu adalah miliknya maka ia mempunyai probabilitas $\frac{1}{2}$ untuk memilihnya, ini

berarti $P(A_j | A_i) = \frac{1}{2}$ sehingga:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j | A_i) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Untuk menghitung $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ kita tulis:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Tetapi karena 2 orang pertama telah mendapatkan topinya sendiri maka orang ketiga juga harus mendapatkan topinya sendiri, ini berarti $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = 1$ sehingga:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ini berarti, probabilitas bahwa tidak ada orang yang akan mendapatkan topinya sendiri adalah:

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Kejadian-kejadian Independen

Dua kejadian A dan B disebut independen apabila:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Dengan menggunakan persamaan (1.1), bentuk tersebut mengakibatkan A dan B independen apabila:

$$P(A | B) = P(A) \quad \text{atau} \quad P(B | A) = P(B)$$

Ini berarti, A dan B independen apabila informasi B telah terjadi tidak mempengaruhi probabilitas terjadinya A . Dua kejadian A dan B yang tidak independen disebut *dependen*.

Contoh 1.25

Jika sebuah dadu seimbang dilempar dua kali. Misalkan, A menyatakan kejadian jumlah mata yang tampak adalah 6 dan B menyatakan kejadian mata dadu pertama adalah 4 maka:

$$P(A \cap B) = P\{4; 2\} = \frac{1}{36}$$

Oleh karena $P(A)P(B) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{216}$ maka A dan B tidak independen.

Misalkan, C adalah kejadian jumlah mata dadu yang tampak adalah 7 maka C independen dengan B karena:

$$P(C \cap B) = P\{4; 3\} = \frac{1}{36} \text{ dan } P(C)P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

Definisi independen dapat diperluas untuk lebih dari dua kejadian. Kejadian-kejadian A_1, A_2, \dots, A_n disebut independen bila untuk setiap subset A_1, A_2, \dots, A_r ; $r \leq n$ berlaku:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_r)$$

Contoh 1.26

Sebuah bola diambil dari suatu kotak yang memuat empat bola bernomor 1, 2, 3, 4. Misalkan, $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 3\}$; $C = \{1, 4\}$. Apabila setiap bola mempunyai kemungkinan yang sama untuk terambil maka:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

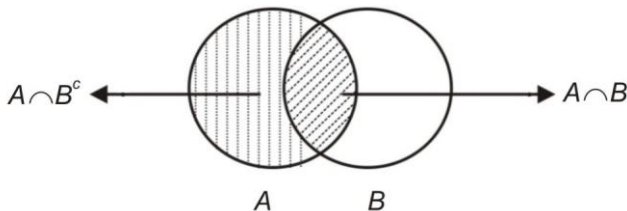
$$P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Jadi, $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$, artinya meskipun kejadian A , B , dan C secara berpasangan independen, namun A , B , dan C tidak independen secara keseluruhan.

Aturan Bayes

Misalkan, A dan B adalah dua kejadian, kita dapat menyatakan A sebagai $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, seperti tampak pada Gambar 1.2. Oleh karena $(A \cap B)$ dan $(A \cap B^c)$ saling asing maka:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
 (1.2) \quad &= P(A | B)P(B) + P(A | B^c)P(B^c) \\
 &= P(A | B)P(B) + P(A | B^c)(1 - P(B))
 \end{aligned}$$



Gambar 1.2

Persamaan (1.2) menyatakan bahwa probabilitas kejadian A adalah rata-rata tertimbang probabilitas bersyarat A diberikan B telah terjadi dan probabilitas bersyarat A diberikan B tidak terjadi, dengan setiap probabilitas bersyarat diberikan bobot sebanyak kejadian yang disyaratkan.

Contoh 1.27

Pandang dua kotak di mana kotak pertama memuat 2 bola putih dan 7 bola hitam, kotak kedua memuat 5 bola putih dan 6 bola hitam. Sebuah mata uang seimbang dilempar dan bola diambil dari kotak pertama jika dari lemparan mata uang diperoleh muka (M). Apabila diketahui bola putih (P) yang terambil maka probabilitas bersyarat hasil lemparan mata uang adalah muka (M) dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, P menyatakan kejadian yang terambil bola putih dan M menyatakan kejadian sisi mata uang tampak muka (M) maka:

$$\begin{aligned}
 P(M|P) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\
 &= \frac{P(P/M)P(M)}{P(P)} \\
 &= \frac{P(P/M)P(M)}{P(P/M)P(M) + P(P/M^c)P(M^c)} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{11}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{22}{67}
 \end{aligned}$$

Contoh 1.28

Dalam menjawab pertanyaan soal pilihan berganda seorang mahasiswa mengetahui jawaban atau hanya menebak. Misalkan, p adalah probabilitas mahasiswa mengetahui jawaban dan $(1-p)$ adalah probabilitas mahasiswa hanya menebak. Andaikan seorang mahasiswa yang menebak jawaban akan benar mempunyai probabilitas $\frac{1}{m}$, dengan m jumlah jawaban alternatif, probabilitas bersyarat seorang mahasiswa mengetahui jawaban pertanyaan apabila diketahui mahasiswa menjawab benar dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, C dan K masing-masing menyatakan kejadian mahasiswa menjawab dengan benar dan kejadian mahasiswa benar-benar mengetahui jawabannya maka:

$$\begin{aligned}
 P(K|C) &= \frac{P(K \cap C)}{P(C)} \\
 &= \frac{P(C/K)P(K)}{P(C/K)P(K) + P(C/K^c)P(K^c)} \\
 &= \frac{(1)(p)}{(1)(p) + \left(\frac{1}{m}\right)(1-p)} \\
 &= \frac{mp}{1 + (m-1)p}
 \end{aligned}$$

Misalkan, $m = 5$ dan $p = 0,5$ maka probabilitas seorang mahasiswa mengetahui jawabannya apabila ia menjawab dengan benar adalah $\frac{5}{6}$.

Contoh 1.29

Uji darah laboratorium 95% efektif dalam mendeteksi suatu penyakit bila benar-benar ada. Meskipun demikian, uji atau tes tersebut juga menghasilkan hasil *positif salah* untuk 1% orang sehat yang diuji. Apabila 0,5% populasi benar-benar menderita penyakit maka probabilitas seorang mempunyai penyakit bila diketahui tesnya positif dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, D menyatakan kejadian bahwa orang yang dites mempunyai penyakit dan E menyatakan hasilnya positif maka:

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(D \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E/D) P(D)}{P(E/D) P(D) + P(E/D^c) P(D^c)} \\ &= \frac{(0,95)(0,005)}{(0,95)(0,005) + (0,01)(0,995)} = \frac{0,95}{0,294} = 0,323 \end{aligned}$$

Jadi, hanya 32 persen orang yang hasil tes laboratoriumnya positif benar-benar menderita penyakit.

Secara umum, persamaan (1.1) dapat ditulis sebagai berikut. Misalkan,

A_1, A_2, \dots, A_n saling asing sedemikian hingga $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Dengan perkataan lain, tepat dan salah satu dari kejadian A_1, A_2, \dots, A_n akan terjadi. Dengan

menulis $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$ dan menggunakan kenyataan bahwa

$B \cap A_i ; i = 1, 2, \dots, n$ saling asing maka kita akan mendapat:

$$\begin{aligned} (1.3) \quad P(B) &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i) \end{aligned}$$

Persamaan (1.3) mengatakan apabila diberikan kejadian-kejadian A_1, A_2, \dots, A_n , kita dapat menghitung $P(B)$ dengan mensyaratkan pada A_i yang terjadi. Ini berarti $P(B)$ sama dengan rata-rata tertimbang $P(B|A_i)$ dengan setiap suku diberi bobot probabilitas kejadian yang disyaratkan. Misalkan, B telah terjadi dan kita tertarik untuk menentukan satu dari A_i juga terjadi, dengan menggunakan persamaan (1.3) didapat persamaan (1.4) yang dikenal sebagai rumus Bayes.

$$(1.4) \quad P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \\ = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

Contoh 1.30

Misalkan, kita mengetahui bahwa suatu surat tertulis berkemungkinan sama untuk berada dalam salah satu dari tiga laci yang tersedia. Misalkan, α_i menyatakan probabilitas mendapatkan surat setelah pemeriksaan sesaat bila surat benar-benar berada dalam laci ke- i ; $i = 1, 2, 3$ (kita bisa mendapatkan $\alpha_i < 1$). Misalkan, kita memeriksa laci ke-1 dan tidak menemukan surat maka probabilitas surat berada pada laci ke-1 dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan, A_i adalah kejadian surat berada pada laci ke- i , dan misalkan B adalah kejadian pemeriksaan laci ke-1, tetapi tidak menemukan surat maka dari rumus Bayes kita mendapat:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{(1-\alpha_1)\left(\frac{1}{3}\right)}{(1-\alpha_1)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}$$



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Apabila probabilitas bersyarat ada, buktikan:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

- 2) Apabila $P(A|E) \geq P(B|E)$ dan $P(A|E^c) \geq P(B|E^c)$ buktikan $P(A) \geq P(B)$

- 3) Misalkan, B kejadian dengan $P(B) > 0$, buktikan:

$$P(A \cup C | B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C | B)$$

- 4) Apabila A dan B dua kejadian yang independen, buktikan bahwa A dan B^c , A^c dan B^c merupakan kejadian saling independen.

- 5) Apabila A dan B dua kejadian saling independen, buktikan:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

- 6) Apabila $A \subseteq B$, buktikan bahwa A dan B tidak saling independen.

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) Berdasarkan persamaan (1.1):

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \quad \text{atau} \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1)$$

$$\text{Misalkan, } B = (A_1 \cap A_2) \text{ maka } P(A_3 | B) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)} \text{ atau:}$$

$$\begin{aligned}
 P(B \cap A_3) &= P(A_3 | B) P(B) \\
 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
 &= P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_1 \cap A_2) \\
 &= P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1)
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, akan dapat dibuktikan bahwa:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad P(A/E) &\geq P(B/E) \quad \text{atau} \quad P(A \cap E) \geq P(B \cap E) \\
 P(A/E^c) &\geq P(B/E^c) \quad \text{atau} \quad P(A \cap E^c) \geq P(B \cap E^c)
 \end{aligned}$$

sehingga:

$$P(A \cap E) + P(A \cap E^c) \geq P(B \cap E) + P(B \cap E^c)$$

atau

$$P(A) \geq P(B)$$

$$3) \quad \text{Misalkan, } Z = (A \cup C) \text{ maka } P(Z/B) = \frac{P(Z \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap C) \cap B)}{P(B)}$$

atau

$$\begin{aligned}
 P(Z/B) &= \frac{P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} \\
 &= P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C | B)
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{Jika } P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ maka:}$$

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\
 &= P(A) - P(A)P(B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(A) (1 - P(B)) \\
 &= P(A) P(B^c)
 \end{aligned}$$

Jadi, A dan B^c saling independen.

$$\begin{aligned}
 P(A^c \cap B^c) &= P(A \cup B)^c \\
 &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
 &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
 &= P(A^c) P(B^c)
 \end{aligned}$$

5) Apabila A dan B saling independen maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ dan

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 &= P(A) + P(B) - P(A)P(B)
 \end{aligned}$$

6) Jika $A \subseteq B$ maka $P(A \cap B) = P(A)$.

Jadi, A dan B tidak dapat saling independen.



1. Probabilitas bersyarat A diketahui B telah terjadi adalah:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ; P(B) > 0$$

2. A dan B disebut independen apabila $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

3. Rumus Bayes:

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)}$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Misalkan, 5% laki-laki dan 0,25% wanita buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random. Apabila diandaikan jumlah laki-laki sama dengan jumlah wanita maka probabilitas seorang buta warna yang terpilih laki-laki sama dengan
 - A. $\frac{19}{21}$
 - B. $\frac{7}{21}$
 - C. $\frac{20}{21}$
 - D. $\frac{17}{21}$

- 2) Sebuah dadu dilempar 2 kali. Probabilitas bersyarat dadu pertama tampak 6 apabila diketahui jumlah mata dadu yang tampak 7 sama dengan
 - A. $\frac{5}{6}$
 - B. $\frac{3}{6}$
 - C. $\frac{1}{6}$
 - D. $\frac{2}{6}$

- 3) Sebuah kotak memuat 3 bola merah dan 1 bola biru. Dua bola diambil secara random tanpa pengembalian. Misalkan, M_1 menyatakan kejadian pengambilan pertama merah dan M_2 menyatakan pengambilan kedua merah maka $P(M_2 | M_1)$ sama dengan
 - A. $\frac{2}{5}$

- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. $\frac{2}{3}$

4) **Lihat soal nomor 3.** $P(M_1 \cap M_2)$ sama dengan

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{2}{5}$
- D. $\frac{2}{3}$

5) Misalkan, probabilitas hujan apabila mendung adalah 0,3 dan probabilitas mendung adalah 0,2 maka probabilitas mendung dan hujan sama dengan....

- A. 0,600
- B. 0,060
- C. 0,666
- D. 0,330

6) Pandang dua kotak, kotak pertama memuat 1 bola hitam dan 1 bola putih, sedangkan kotak kedua memuat 2 bola hitam dan 1 bola putih. Sebuah kotak dipilih secara random dan sebuah bola dipilih secara random dari kotak yang terpilih. Probabilitas bola yang terpilih hitam sama dengan

- A. $\frac{6}{12}$
- B. $\frac{7}{12}$

- C. $\frac{11}{12}$
- D. $\frac{5}{12}$

7) **Lihat soal nomor 6.** Apabila diketahui bola yang terpilih putih, probabilitas bola tersebut berasal dari kotak pertama adalah

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. $\frac{4}{5}$
- D. $\frac{3}{5}$

8) Seorang penjudi mempunyai satu mata uang seimbang dan satu mata uang yang keduanya muka (M). Sebuah mata uang dilemparkan dan muncul M . Probabilitas M berasal dari mata uang seimbang sama dengan....

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $\frac{2}{3}$

9) **Lihat soal nomor 8.** Misalkan, mata uang dilempar sekali lagi dan didapat M maka probabilitas M kedua berasal dari mata uang seimbang sama dengan

- A. $\frac{2}{5}$
- B. $\frac{1}{5}$

- C. $\frac{1}{3}$
 D. $\frac{2}{3}$

10) **Lihat soal nomor 8 dan nomor 9.** Misalkan, mata uang dilempar untuk yang ketiga kalinya dan didapat B (belakang) maka probabilitas B berasal dari mata uang seimbang sama dengan

- A. $\frac{1}{2}$
 B. $\frac{1}{3}$
 C. 1
 D. $\frac{2}{3}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
 80 - 89% = baik
 70 - 79% = cukup
 < 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

- 1) C
- 2) D
- 3) A
- 4) B
- 5) C
- 6) C
- 7) D
- 8) A
- 9) C
- 10) D

Tes Formatif 2

- 1) C
- 2) C
- 3) D
- 4) A
- 5) B
- 6) B
- 7) D
- 8) C
- 9) B
- 10) C

Daftar Pustaka

Huckwell, H C (1995). *Elementary Application of Probability Theory*. Chapman & Hall, London.

Ross, M. S. (1980). *Introduction to Probability Models*. Academic Press.

Render, B. & Stair, R. M. (2003). *Quantitative Analysis for Management*.

Rice, J. A.(1995). *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Duxbury Press.