MODUL 1

Probabilitas

Drs. Haryono, M.Sc
Dewi Juliah Ratnaningsih, S.Si, M.Si

PENDAHULUAN

Para mahasiswa yang budiman, apakah Anda tahu apa perbedaan mendasar antara ilmu statistika dan matematika? Perbedaannya adalah dalam proses kejadiannya. Ilmu matematika bersifat deterministik, sedangkan statistika bersifat stokastik. Proses deterministik adalah suatu proses kejadian yang sudah pasti. Sementara itu, proses stokastik adalah proses kejadian yang belum pasti. Definisi stokastik adalah sesuatu kebolehjadian, atau segala sesuatu yang kejadiannya belum dapat dipastikan. Stokastik sangat mempengaruhi deterministik. Oleh karena itu, sangatlah penting untuk dapat memprediksi suatu kejadian yang belum pasti dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu ini sangat penting bagi seorang statistisian, karena proses stokastik sangat melekat dengan ilmu statistika.

Sebelum masuk ke dalam ranah materi proses stokastik terlebih dahulu mahasiswa harus memahami konsep probabilitas. Materi ini dapat Anda baca juga dalam Buku Materi Pokok Pengantar Probabilitas dengan kode SATS4221.

Materi pada Modul 1 memaparkan mengenai konsep probabilitas dan probabilitas bersyarat. Konsep-konsep ini sangat penting dipahami sebelum mempelajari Mata Kuliah Pengantar Proses Stokastik/SATS4322. Materi yang terdapat pada Modul 1 terdiri atas 2 Kegiatan Belajar, yaitu:
1. Kegiatan Belajar 1: Konsep-konsep Probabilitas.
2. Kegiatan Belajar 2: Probabilitas Bersyarat.

Setelah mempelajari Modul 1, diharapkan mahasiswa dapat:
1. Memahami konsep-konsep probabilitas.
2. Memahami konsep probabilitas peluang bersyarat.
3. Memahami hukum total probabilitas.
4. Memahami konsep independensi dalam probabilitas.

Materi pada Modul 1 ini merupakan materi dasar dalam mempelajari Proses Stokastik yang mulai dipelajari pada Modul 5. Oleh karena itu, pemahaman mahasiswa pada Modul 1 ini menjadi mutlak diperlukan untuk memahami materi-materi selanjutnya dalam Mata Kuliah Pengantar Proses Stokastik.

KEGIATAN BELAJAR 1

Konsep-konsep Probabilitas

Mahasiswa yang budiman, kejadian atau peristiwa alam dan juga sistem yang dibuat oleh manusia banyak yang merupakan kejadian atau fenomena acak/random. Misalnya, cuaca adalah suatu contoh fenomena random dari alam, sedangkan pasar saham (*stock market*) adalah fenomena random yang dibuat oleh manusia. Mempelajari fenomena random yang demikian adalah penting jika ingin mempelajari perilaku fenomena tersebut dan memprediksi perilakunya di masa mendatang serta mengendalikannya untuk keperluan tertentu jika memungkinkan. Memprediksi perilaku suatu fenomena di masa yang akan datang adalah sulit. Yang dapat kita lakukan hanyalah memperoleh nilai probabilitas atas terjadinya fenomena tersebut. Dalam Modul 1 ini akan dibahas pengantar teori probabilitas sebagai suatu teknik kuantitatif yang dapat digunakan dalam memprediksi kemungkinan terjadinya suatu fenomena.

RINGKASAN KONSEP PROBABILITAS

Mahasiswa yang berbahagia, prinsip dasar dalam mempelajari suatu fenomena random (kadang-kadang disebut eksperimen random) adalah membangun model probabilitas yang dapat menjelaskan fenomena tersebut. Masih ingatkah Anda dalam Buku Materi Pokok Pengantar Probabilitas/SATS4221 mengenai komponen-komponen dasar model probabilitas? Model probabilitas mempunyai tiga komponen dasar, yaitu:

1. Ruang sampel (*sample space*).
2. Kejadian (*event*).
3. Probabilitas kejadian (*probability of events*).

Berikut merupakan definisi dan contoh sederhana mengenai ketiga komponen model probabilitas. Silakan Anda baca dan pahami secara seksama.

1. Ruang Sampel

Definisi 1.1. Ruang Sampel (Ω)

Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari fenomena random. Secara umum ruang sampel dapat ditulis dalam huruf Greek (Yunani) Ω (omega). Elemen-elemen Ω, secara umum ditulis dengan ω dan disebut sebagai titik-titik sampel atau hasil (*outcome*).

Untuk mempermudah pemahaman mengenai ruang sampel, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.1. Pelemparan Uang Logam

Perhatikan suatu eksperimen random pelemparan (*tossing*) suatu uang logam bernilai Rp100,00. Andaikan pelemparan tersebut tidak pernah menghasilkan uang logam berdiri pada sisinya. Terdapat dua hasil yang mungkin (titik sampel), yaitu: Angka (A) dan Gambar (G). Oleh karena itu, ruang sampel untuk eksperimen random pelemparan uang logam ini adalah:

$$\Omega = \{A, G\}$$

Contoh 1.2. Percobaan Klinis

Perhatikan suatu eksperimen klinis dalam mengkaji obat baru untuk sakit lambung secara eksperimental. Hasil eksperimen dicatat dengan Sukses (S) dan Gagal (G). Perlu dicatat disini bahwa definisi secara tepat mengenai pengertian Sukses dan Gagal disesuaikan dengan bidang kesehatan bersangkutan. Jadi titik sampelnya adalah S dan G, maka ruang sampelnya adalah sebagai berikut.

$$\Omega = \{S, G\}$$

Contoh 1.3. Dua Percobaan Klinis

Andaikan eksperimen obat lambung di atas dilakukan terhadap 2 orang pasien. Hasil dari dua percobaan dapat ditulis sebagai pasangan (x,y) di mana x adalah hasil percobaan untuk pasien pertama dan y adalah hasil untuk pasien kedua. Jadi ruang sampel dapat ditulis sebagai berikut.

$$\Omega = \{(S,S),(S,G),(G,S),(G,G)\}$$

Apakah dengan tiga contoh di atas telah jelas mengenai ruang sampel? Silakan Anda cari contoh yang lain yang Anda hadapi dalam kehidupan sehari-hari.

2. Kejadian (*Event*)

Komponen kedua dari model probabilitas suatu fenomena random adalah komponen kejadian (*event*). Dalam mempelajari fenomena random kita tertarik pada timbulnya atau tidak timbulnya kejadian dari ”*events*”. Misalnya, kejadian (kedatangan) nasabah suatu bank atau kejadian kerusakan suatu mesin setelah dipakai dalam waktu tertentu. Dalam hal ini sangat penting mahasiswa dapat membedakan antara titik-titik sampel dan kejadian. Perhatikan definsi formal *event* berikut ini.

Definisi 1.2. Kejadian (*Event*)

Suatu kejadian (*event*) adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Karena Ω adalah himpunan bagian dari Ω maka Ω adalah suatu kejadian dan disebut kejadian universal. Dengan cara sama himpunan nol $(\varnothing)$ adalah himpunan bagian dari Ω. Jadi, $\varnothing$ juga suatu kejadian dan disebut kejadian tidak mempunyai anggota. Jadi kejadian universal selalu terjadi dan kejadian nol tidak ada kejadian yang timbul.

Contoh 1.4. Percobaan Klinis

Dari *contoh 1.3*, terdapat paling banyak 4 *kejadian* yaitu

$$\{\varnothing, \{S\}, \{G\}, \Omega\}$$

Contoh 1.5. Ruang Sampel (Ω) berhingga

Sebuah toko menjual komputer PC merek tertentu. Untuk memenuhi permintaan (*demand*) pelanggan digunakan sistem inventori $[2,5]$, di mana 2 adalah batas bawah jumlah (*safety stock*) PC yang harus tersedia di tokonya. Jadi bila pada waktu tertentu jumlah PC kurang dari 2 maka toko dapat memesan ke distributor dengan jumlah pemesanan maksimum PC adalah 5 buah bila persediaan 0 dan 4 buah bila persediaan 1 buah. Ruang sampel dari jumlah PC di toko tersebut adalah sebagai berikut.

$$\Omega = \{2,3,4,5\}$$

Sementara itu, banyaknya kejadian yang dapat disusun adalah $2^4 = 16$ kejadian termasuk Ω dan himpunan kosong ($\varnothing$).

Contoh 1.6. Dua Percobaan Klinis

Lihat kembali *Contoh 1.3*. Ambil E_i adalah kejadian terdapat i sukses dalam percobaan $\left(0, \leq i \leq 2\right)$. Maka $E_0 = \left\{\left(G,G\right)\right\}$, $E_1 = \left\{\left(S,G\right),\left(G,S\right)\right\}$, $E_2 = \left\{\left(S,S\right)\right\}$.

Karena kejadian berdasarkan definisi adalah himpunan bagian dari Ω, maka akan timbul pertanyaan, apakah operasi biasa dari himpunan mempunyai arti dalam terminologi kejadian? Kenyataannya operasi pada himpunan dapat digunakan untuk kejadian. Baik, untuk memahami hubungan antara teori himpunan dan kejadian perhatikan Tabel 1.1 (di sini $E_1, E_2, ...$ adalah kejadian-kejadian).

Tabel 1.1
Hubungan antara terminologi kejadian (*event*) dan teori himpunan

Deskripsi kejadian (*event*)	Notasi teori himpunan
E_1 atau E_2	$E_1 \cup E_2$
E_1 dan E_2	$E_1 \cap E_2$ atau $E_1 \, E_2$
Tidak E	E^c atau $\bar{E}$
Paling sedikit salah satu dari E_1, E_2,.......	$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$
Untuk semua E_1, E_2,.......	$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_n$

Kejadian-kejadian $E_1, E_2, ..., E_n$ disebut *exhaustive* bila paling sedikit salah satu dari kejadian selalu terjadi. Secara matematis, pernyataan ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n = \Omega$$

Dengan cara sama, kejadian-kejadian $E_1, E_2, ..., E_n$ disebut *mutually exclusive* atau *disjoint* bila paling banyak salah satu dari kejadian dapat terjadi. Pernyataan ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa

$$E_i \cap E_j = \varnothing, \text{ jika } i \neq j.$$

Jadi, bila E_1, E_2,....... adalah *mutually exclusive* dan *exhaustive* mereka mendefinisikan suatu partisi (*partition*) dari Ω, yaitu misal tiap titik sampel $\omega \in \Omega$ berada dalam satu dan hanya satu E_n.

Untuk memahami hal ini, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.7. Pelemparan Dadu

Perhatikan eksperimen pada pelemparan sebuah dadu setimbang. Hasil yang terjadi pada pelemparan tersebut dicatat. Ruang sampel untuk eksperimen ini adalah sebagai berikut.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Apabila dimisalkan E_1 adalah kejadian memperoleh angka genap dan E_2 adalah kejadian angka ganjil, maka $E_1 = \{2,4,6\}$ dan $E_2 = \{1,3,5\}$. E_1 dan E_2 adalah *mutually exclusive* dan *exhaustive*. Karena E_1 dan E_2 dapat ditulis sebagai $E_1 \cap E_2 = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \varnothing$. Kejadian ini dinamakan *mutually exclusive*. Sementara itu, E_1 atau E_2 dapat ditulis sebagai $E_1 \cup E_2 = \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega$. Kejadian ini dinamakan *exhaustive*.

Misal E_3 menunjukkan mata dadu lebih dari 3. Maka $E_3 = \{4,5,6\}$. Kejadian "E_1 atau E_3" diberikan oleh $\{2,4,5,6\}$. Kejadian "E_2 dan E_3" diberikan oleh $\{5\}$.

3. Probabilitas Kejadian

Komponen ketiga dari model probabilitas adalah fungsi probabilitas. Secara intuitif, fungsi probabilitas berkaitan dengan suatu nilai numerik untuk tiap kejadian yang menjelaskan kemungkinan terjadinya kejadian tersebut. Definisi secara formal diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.3. Probabilitas Kejadian

Probabilitas suatu kejadian E, ditulis $P(E)$, adalah suatu angka yang menunjukkan kemungkinan terjadinya suatu kejadian (*event*) E. Fungsi P tidak boleh sebarangan dan harus memenuhi syarat-syarat tertentu yang memberikan deskripsi konsisten dari suatu fenomena random. Masih ingatkah syarat-syarat suatu fungsi probabilitas? Ya, Anda benar. Persyaratan suatu fungsi probabilitas adalah sebagai berikut.

Aksioma Probabilitas:

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Jika $E_1, E_2, ..., E_n$ saling bertentangan (*mutually exclusive*), maka:

   $$P\left(\bigcap_0^\infty E_n\right) = 0$$

   Dan jika $E_1, E_2, ..., E_n$ *exhaustive events*, maka:

   $$P\left(\bigcup_0^\infty E_n\right) = \Omega$$

Secara intuitif, suatu kejadian yang pasti terjadi diberi nilai probabilitas 1, dan kejadian yang tidak mungkin terjadi diberi nilai 0. Karena itu, nilai probabilitas setiap kejadian tidak mungkin lebih kecil dari 0 atau lebih besar dari 1. Ini adalah pengertian **Aksioma 1**. Karena Ω adalah himpunan semua hasil yang mungkin, salah satu dari mereka harus terjadi menurut definisi. Karena itu, kejadian Ω mempunyai nilai probabilitas 1. Ini adalah pengertian **Aksioma 2**.

Untuk menjelaskan **Aksioma 3**, tinjau dua kejadian E_1 dan E_2 yang saling bertentangan. Karena $E_1 \cup E_2$ adalah jumlah probabilitas E_1 dan E_2. Aksioma 3 menyatakan bahwa pengertian ini berlaku untuk *event* saling bertentangan yang dapat dihitung banyaknya (kadang-kadang disebut *axcom of countable additivity*). Suatu konsekuensi logis dari Aksioma 3 adalah $P(\varnothing) = 0$

Contoh 1.8. Pelemparan Uang Logam

Tinjau kembali *Contoh 1.1* dan asumsikan uang logam yang dilempar setimbang. Hal ini berarti probabilitas memperoleh A atau G adalah sama, yakni 0,5. Jadi fungsi probabilitas yang menyatakan keyakinan tersebut adalah:

$$P(\varnothing) = 0, \;\; P(\{A\}) = P(\{G\}) = 0{,}5, \;\; P(\{A, G\}) = 1$$

Perhatikan bahwa hasil ini memenuhi semua aksioma probabilitas.

Contoh 1.9. Hasil Eksperimen Yang Kemungkinannya Sama

Perhatikan model probabilitas dengan ruang sampel berhingga, misalkan: $\Omega = \{1, 2, ...N\}$. Andaikan tiap hasil ini mempunyai kemungkinan yang sama untuk muncul. Ambil $E_i = \{i\}$, untuk $1 \le i \le N$ maka diperoleh:

$$P(E_i) = \frac{1}{N}$$

Misal $m(E)$ banyak hasil dalam kejadian. Kemudian dengan aksioma probabilitas diperoleh:

$$P(E) = \frac{m(E)}{N}$$

Jadi, dalam model probabilitas dimana hasil kejadiannya memiliki kemungkinan yang sama untuk muncul maka probabilitas dapat dihitung sebagai perbandingan banyak hasil yang diinginkan dibagi dengan jumlah hasil seluruhnya. Untuk memahami kasus ini, perhatikan contoh berikut ini.

$E \subseteq \Omega$.

Contoh 1.10. Pasangan Random

Andaikan n pasangan mengadakan pesta dansa. Pemandu acara ingin melakukan perumusan dimana n pria secara random dipasangkan dengan n wanita. Tentukan probabilitas bahwa wanita ke-i mendapatkan pasangan dengan suaminya!

Solusi untuk permasalahan di atas adalah, pertama kita tentukan ruang sampel Ω untuk masalah ini, yaitu himpunan semua permutasi integer $\{1, 2, ...n\}$. Misal sebagai contoh, permutasi (3,1,2,.....) menunjukkan pasangan pria nomor 3 dengan wanita nomor 1, pria nomor 1 dengan wanita nomor 2, demikian seterusnya. Misal, E_i adalah kejadian wanita ke-i yang mendapatkan pasangan dengan suaminya. E_i adalah semua himpunan permutasi dengan interger i berada di posisi ke-i. Banyaknya permutasi yang terjadi adalah $(n-1)!$ (dibaca: $(n-1)$ faktorial). Karena semua permutasi mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi (pembentukan pasangan diandaikan bersifat random), sehingga diperoleh :

$$P(E_i) = \frac{m(E_i)}{(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Berapa probabilitas bahwa wanita i dan j mendapatkan pasangan suaminya secara berurutan $(i \neq j)$? Dalam hal ini kita tertarik pada kejadian $E_i \cap E_j$ atau $E_i E_j$ yang terdiri atas semua permutasi dengan angka i pada posisi i dan angka j pada posisi j. Banyaknya permutasi yang terbentuk adalah $(n-2)$! Sehingga diperoleh:

$$P(E_i E_j) = \frac{m(E_i E_j)}{n(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Sampai materi ini, apakah Anda sudah paham? Jika belum, silakan baca ulang dan pahami secara seksama. Jika Anda sudah paham, berikut ini akan kita pelajari beberapa sifat penting akibat aksioma probabilitas.

Teorema 1.1

$$P(E^c) = 1 - P(E) \tag{1.1}$$

Bukti: E dan E^c adalah kejadian-kejadian yang saling bertentangan (*mutually exclusive* dan *exhaustive*) karena itu,

$$1 = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

diperoleh:

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Contoh 1.11. Star Trek

Terdapat tepat 100 episode dari seri asli “Star Trek”. Suatu stasiun televisi menyiarkan secara random tiap episode pada tiap minggu mulai pukul 21.00. Seorang mahasiswa menonton episode tersebut secara teratur tiap minggu.

Pertanyaan:

Hitung probabilitas mahasiswa tersebut menonton paling sedikit satu episode lebih dari sekali selama satu semester (16 minggu).

Jawab:

Misal Ω adalah semua himpunan urutan 16 episode dari 100 episode (pengulangan episode diizinkan). Misal E adalah kejadian yang diinginkan. Karena itu E^c adalah kejadian bahwa tiap-tiap dari 16 episode adalah berbeda. Terdapat 100!(100-16)!= (100) (99) (98).... (85) barisan 16 episode yang berbeda.

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$
$$= 1 - \frac{m(E^c)}{m(\Omega)}$$
$$= 1 - \frac{100!(100-16)!}{100^{16}}$$
$$= 0{,}7184$$

Perhatikan bahwa menghitung $m(E^c)$ adalah mudah, sedangkan menghitung $m(E)$ lebih sulit dalam masalah ini. Jadi dalam hal ini Teorema 1.1 sangat bermanfaat.

Teorema 1.2

Misal E dan F adalah 2 kejadian, tidak harus saling bertentangan, maka:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF) \tag{1.2}$$

Bukti:

Kejadian-kejadian EF^c, E^cF dan EF adalah saling bertentangan dan

$$E = EF^c \cup EF$$
$$F = E^cF \cup EF$$

dan

$$E \cup F = EF^c \cup E^cF \cup EF$$

Dengan menggunakan Aksioma 3, diperoleh:

$$P(E) = P(EF^c) + P(EF)$$
$$P(F) = P(E^cF) + P(EF)$$

dan

$$P(E \cup F) = P(EF^c) + P(E^cF) + P(EF)$$

Pembuktian teorema dapat diperoleh dari persamaan terakhir ini. Untuk memahami dua Teorema 1.1 dan Teorema 1.2, berikut diberikan dua contoh untuk menunjukkan manfaat kedua teorema tersebut.

Contoh 1.12. Pelemparan Dadu

Perhatikan kembali kejadian E_1 dan E_3 pada *Contoh 1.7*. Andaikan dadu yang dilempar setimbang, yaitu mata dadu memiliki kemungkinan yang sama untuk muncul, maka:

$$
\begin{aligned}
P(E_2 \cup E_3) &= P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 E_3) \\
&= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Contoh 1.13. Pasangan Random

Perhatikan kembali kejadian E_i dan E_j pada *Contoh 1.10*. Kita dapat menghitung probabilitas apakah wanita i dan wanita j mendapatkan pasangan dengan suami mereka sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
P(E_i \cup E_j) &= P(E_i) + P(E_j) - P(E_i E_j) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{2n-3}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa sulit untuk menghitung probabilitas ini secara langsung dengan menghitung banyak permutasi apakah wanita i atau wanita j yang mendapatkan pasangan dengan suami mereka. Namun dengan menggunakan Teorema 1.2 perhitungannya menjadi mudah, bukan?

Teorema berikut merupakan perluasan Teorema 1.2 untuk gabungan n *event*.

Teorema 1.3. Prinsip Inklusi-Eklusi

Misal E_i, $1 \le i \le n$ adalah *event-event*, tidak harus saling bertentangan, maka:

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) + \ldots\ldots +
$$
$$
(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \tag{1.3}
$$

Bukti: Pembuktian berdasarkan induksi pada n. Misal, diilustrasikan untuk $n = 3$. Misal $E_2 \cup E_3$ sebagai suatu *event* dan menggunakan Teorema 1.2 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2 \cup E_3) - P(E_1 \cap (E_2 \cup E_3)) \\
&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3) - P(E_1E_2 \cup E_1E_3) \\
&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3) \\
&\quad -(P(E_1E_2) + P(E_1E_3) - P(E_1E_2E_1E_3)) \\
&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3) - P(E_1E_3) - P(E_1E_2E_3)
\end{aligned}
$$

Contoh 1.14. Pasangan Random

Lihat kembali *Contoh 1.10*. Jika ingin dihitung probabilitas paling sedikit satu wanita mendapat pasangan dengan suaminya. Artinya, probabilitas ini diberikan oleh $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$, yang dapat dihitung dengan Persamaan 1.3. Dari Contoh 1.10 diketahui bahwa

$$P(E_i) = \frac{1}{m} \text{ untuk } 1 \le i \le n$$

Terdapat n komponen seperti ini dalam jumlah pertama di ruas kanan Persamaan 1.3. Dengan cara sama seperti pada *Contoh 1.10* diketahui bahwa

$$P(E_iE_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \text{ untuk } 1 \le i \le j \le n$$

dan terdapat $n(n-1)/2!$ bentuk ini dalam jumlah yang kedua. Dengan menggunakan argumentasi yang sama, maka diperoleh:

$$P(E_iE_jE_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \text{ untuk } 1 \le i \le j \le k \le n$$

dan terdapat $n(n-1)(n-2)/3!$ bentuk ini dalam jumlah yang ketiga. Dengan melakukan langkah yang sama seperti ini diperoleh bentuk terakhir sebagai berikut.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \frac{1}{n!}$$

Persamaan di atas disubstitusikan ke dalam Persamaan 1.3, sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i<j} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + ...(-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - .... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Jika $m \to \infty$ probabilitas di atas konvergen ke:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - .... = 1 - e^{-1}$$

Hasil ini agak mengejutkan, karena diduga probabilitas paling sedikit satu pasangan yang sesuai akan mendekati satu jika banyak pasangan menjadi tak terbatas (*infinity*). Jadi, seru bukan mempelajari probabilitas. Semua kejadian dapat dihitung dengan menggunakan prinsip-prinsip peluang, aksioma, dan teorema yang sangat membantu penyelesaian perhitungan probabilitas dalam berbagai kasus.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tulis ruang sampel untuk eksperimen berikut.
   a. Pelemparan (*tossing*) dua uang logam.
   b. Banyak air yang mengalir di suatu bendungan selama 1 bulan.
   c. Pengujian tiga bola lampu untuk mengetahui apakah bola lampu tersebut dalam kondisi baik atau rusak dalam jangka waktu tertentu.
   d. Tingkat penjualan (Rp) sebuah toko dalam waktu 1 bulan.
   e. Banyak nasabah yang datang di suatu bank dalam waktu 1 jam.
2) Tinjau suatu eksperimen menguji 3 bola lampu buatan perusahaan tertentu. Ambil kejadian E_i = tepat i bola lampu berfungsi baik untuk $0 \le i \le 3$. Hitung probabilitas E_i untuk $0 \le i \le 3$ dan sebutkan asumsi-asumsi yang saudara gunakan dalam menghitung probabilitas tersebut.
3) Suatu uang logam dilempar tiga kali. Misal E_i adalah kejadian pelemparan ke-i menghasilkan angka, $1 \le i \le 3$. Hitung:
   a. $P(E_1 \cup E_2)$

b. $P\left(E_1 \cap E_2\right)$

c. $P\left(E_1 \cup E_2 \cup E_3\right)$

4) Dari soal Nomor 3, misal F adalah *event* banyak angka yang timbul adalah ganjil. Hitung:

a. $P\left(E_1 \cup F\right)$

b. $P\left(E_2 \cap F\right)$

c. $P\left((E_1 \cup E_2) \cap F\right)$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. A = angka, G = gambar

$\Omega = \{AG, GA, AA, GG\}$

b. $\Omega = [0, \infty)$

c. B = baik, R= rusak

$\Omega = \{BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR\}$

d. $\Omega = [0, \infty)$

e. $\Omega = [0, 1, 2, 3, ...]$

2) Lihat soal 1 Bagian C

$P\left(E_0\right) = P\left(E_3\right) = \dfrac{1}{8}$, $P\left(E_1\right) = P\left(E_2\right) = \dfrac{3}{8}$

Setiap bola lampu mempunyai kemungkinan yang sama untuk baik atau rusak.

3) Sebutkan ketiga komponen tersebut K_1, K_2, K_3.

K_{ib} = komponen ke-i berfungsi baik, $i = 1, 2, 3$

K_{ir} = komponen ke-i rusak, $i = 1, 2, 3$

Event-event sistem berfungsi baik :

$\{K_{1b}K_{2b}K_{3r}, K_{1b}K_{2r}K_{3b}, K_{1r}K_{2b}, K_{3b}, K_{1b}K_{2b}K_{3b}\}$

P (sistem berfungsi baik) =

$P\left(K_{1b}K_{2b}K_{3r}\right) + P\left(K_{1b}K_{2r}K_{3b}\right) + P\left(K_{1r}K_{2b}K_{3b}\right) + P\left(K_{1b}K_{2b}K_{3b}\right) =$

$P\left(K_{1b}\right)P\left(K_{2b}\right)P\left(K_{3r}\right) + P\left(K_{1b}\right)P\left(K_{2r}\right)P\left(K_{3b}\right) + P\left(K_{1r}\right)\left(K_{2b}\right)\left(K_{3b}\right) +$

$P\left(K_{1r}\right)\left(K_{2b}\right)\left(K_{3b}\right) =$

$(0,95)(0,92)(1-0,98)+(0,95)(1-0,92)(0,98)+(1-0,95)(0,92)(0,98)+$
$(0,95)(0,92)(0,98)$

4) a. $P(E_1 \cup F) = 0,75$

b. $P(E_2 \cap F) = 0,25$

c. $P((E_1 \cup E_2) \cap F) = 0,375$

RANGKUMAN

Untuk mempelajari Proses Stokastik harus dipahami beberapa konsep penting dalam teori probabilitas. Konsep-konsep ini banyak digunakan untuk mempelajari Proses Stokastik.

Tiga komponen dasar model probabilitas adalah: (1) ruang sampel, (2) kejadian, dan (3) probabilitas kejadian. Terdapat hubungan yang erat antara kejadian (*event*) dan notasi teori himpunan yang dijelaskan pada Tabel 1. Hubungan ini sangat penting untuk menyatakan probabilitas suatu kejadian pada kasus tertentu.

Aksioma probabilitas: (1) $0 \le P(E) \le 1$ dan (2) $P(\Omega) = 1$. Jika $E_1, E_2, ..., E_n$ saling bertentangan (*mutually exclusive*), maka:

$$P\left(\bigcap_{0}^{\infty} E_n\right) = 0$$

Jika $E_1, E_2, ..., E_n$ *exhaustive events*, maka:

$$P\left(\bigcup_{0}^{\infty} E_n\right) = \Omega$$

Ada dua teorema probabilitas yang dapat dimanfaatkan untuk perhitungan probabilitas, yaitu:

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$
2. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Tulis ruang sampel untuk masing-masing eksperimen berikut.

1) Ruang sampel hasil pengujian 2 mesin, dengan asumsi masing-masing mesin dapat dalam salah satu keadaan (*state*) berikut. New (N), Good (G), Bad (B) ....
   A. $\Omega = \{NN, GG, BG, GB, BB\}$
   B. $\Omega = \{NN, NG, NB, GN, GG, GB, BN, BG, BB\}$
   C. $\Omega = \{NN, GG, BB\}$
   D. $\Omega = \{.\}$

2) Ruang sampel dari harga saham perusahaan tertentu selama 1 bulan dalam Rp1.000,00 adalah ....
   A. $\Omega = \{.\}$
   B. $\Omega = \{1.000,\ 2.000,\ 3.000, ...\}$
   C. $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$
   D. $\Omega = [0, \infty)$

3) Ruang sampel banyak mobil yang lewat di suatu jalan tertentu dalam waktu 1 jam adalah ....
   A. $(0, \infty)$
   B. $(0, \infty]$
   C. $[1, \infty)$
   D. $\Omega = [0, \infty)$

Soal berikut untuk pertanyaan Nomor 4, 5, 6, dan 7. Pilih salah satu jawaban yang menurut Anda paling benar!

4) Kejadian tepat terdapat 13 pelanggan yang datang ke toko adalah ....
   A. $E = \{n : 0 < n < 13\}$
   B. $E = \{ n : 0 \;\; n \ge 13\}$

C. $E = \{13\}$

D. $E = \{n : 0 \le n < 13\}$

5) Kejadian lebih dari 10 pelanggan yang datang adalah ....

A. $E = \{n : n \ge 10\}$

B. $E = \{n : 0 < n < 10\}$

C. $E = \{n : 0 \le n\}$

D. $E = \{n : n > 10\}$

6) Kejadian tidak lebih dari 5 pelanggan yang datang ....

A. $E = \{n : 0 < n \le 5\}$

B. $E = \{n : 0 < n < 5\}$

C. $E = \{n : 0 \le n \le 5\}$

D. $E = \{n : \le n < 5\}$

7) Kejadian paling sedikit ada 20 pelanggan yang datang ....

A. $E = \{n : 0 < n < 20\}$

B. $E = \{n : 0 \le n \le 20\}$

C. $E = \{n : n > 20\}$

D. $E = \{n : n \ge 20\}$

Soal berikut untuk pertanyaan soal Nomor 8, 9, dan 10. Pilih salah satu jawaban yang menurut Anda benar.
Tinjau suatu eksperimen pengambilan 3 kartu satu per satu secara random tanpa menempatkan kembali dari setumpuk kartu *bridge*.

8) Probabilitas ketiga kartu berwarna merah adalah ....
A. 0,1177
B. 0,1777
C. 0,1077
D. 0,1107

9) Probabilitas paling sedikit satu kartu *spade* adalah ....
A. 0,5406
B. 0,5064

C. 0,6045
D. 0,0645

10) Probabilitas tidak terdapat kartu *diamond* dari tiga kartu yang terambil adalah ....
A. 0,4135
B. 0,3514
C. 0,1354
D. 0,3413

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Probabilitas Bersyarat

Mahasiswa yang budiman, dalam pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bagaimana menyusun model probabilitas fenomena random dan manfaatnya dalam menghitung probabilitas kejadian baik yang kejadiannya sederhana maupun yang kompleks. Namun dalam kenyataannya, dalam situasi praktis, sering kali dijumpai keadaan dimana yang diketahui adalah sebagian informasi tentang suatu fenomena dan ingin dihitung probabilitas kejadian-kejadian berdasarkan informasi sebagian tersebut. Konsep inilah yang mendasari munculnya konsep probabilitas bersyarat. Konsep ini sangat diperlukan untuk beberapa kasus dimana informasi yang ada hanya sebagian saja. Untuk memahami konsep probabilitas bersyarat, Anda harus memahami definisinya terlebih dahulu. Secara formal definisi probabilitas bersyarat dipaparkan berikut ini.

A. PROBABILITAS BERSYARAT

Probabilitas bersyarat yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dimana sebagian informasi telah diketahui dan kita ingin menentukan probabilitasnya berdasarkan kejadian tersebut. Untuk itu, perhatikan definisi Probabilitas Bersyarat berikut ini.

Definisi 1.4. Probabilitas Bersyarat

Probabilitas bersyarat suatu kejadian E, bila diketahui kejadian F telah terjadi, ditulis dengan $P(E/F)$ dan diberikan oleh:

$$P(E/F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \tag{1.4}$$

dengan mengandaikan $P(F) > 0$.

Para mahasiswa, dari **Definisi 1.4** dapat kita lihat terdapat tiga catatan penting menurut urutan definisi di atas. *Pertama*, jika $P(F) = 0$ maka $P(EF)$ juga nol dan ruas kanan Persamaan 1.4 menjadi $0/0$, suatu besaran yang nilainya tak terdefinisikan. Secara praktis, jika $P(F)=0$, kejadian F tidak pernah terjadi dan kita tidak ingin membahas $P(E/F)$. *Kedua*, harus diingat bahwa E/F tidak berakibat bahwa E terjadi setelah kejadian F terjadi. Akibatnya, tidak ada urutan kronologis dari kejadian tersebut. Probabilitas E, bila kejadian F terjadi di masa mendatang, juga diberikan oleh Persamaan 1.4. *Ketiga*, Persamaan (1.4) dapat ditulis sebagai berikut.

$$P(EF)=P(E/F)P(F) \tag{1.5}$$

Persamaan ini valid bila $P(F)=0$.

Contoh 1.15. Pelemparan Dadu

Perhatikan kembali kejadian E_1 dan E_2 pada *Contoh 1.7* diperoleh:

$$P(E_2/E_3)=\frac{P(E_2E_3)}{P(E_3)}=\frac{P(\{5\})}{P(\{4,5,6\})}=\frac{1/6}{3/6}=1/3$$

Contoh 1.16. Pasangan Random

Lihat kembali *Contoh 1.10*. Andaikan diketahui wanita nomor 2 sudah berpasangan dengan suaminya.

Pertanyaan:

Hitung probabilitas wanita nomor 1 juga berpasangan dengan suaminya.

Jawab:

Ingin dihitung $P(E_1/E_2)$.

Dengan menggunakan hasil *Contoh 1.10* diperoleh :

$$P(E_1/E_2)=\frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)}=\frac{1/(n(n-1))}{1/n}=\frac{1}{n-1}$$

Perluasan langsung dari Persamaan 1.5 adalah:

$$P(E_1E_2...E_n)=P(E_n/E_1E_2...E_{n-1})P(E_{n-1}/E_1...E_{n-2})...P(E_2/E_1)P(E_1) \tag{1.6}$$

Hal ini dapat dibuktikan secara langsung dengan melakukan substitusi menggunakan Persamaan (1.5).

Jika $E_1, E_2, ...$ adalah saling bertentangan maka:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n/F\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n/F)$$

Contoh 1.17. Permainan Kartu

Permainan kartu terdiri atas 52 kartu yang dibagi atas empat kelompok: *Spades*, *Clubs*, *Diamonds* dan *Hearts*. *Spades* dan *Clubs* adalah berwarna hitam, *Diamond* dan *Hearts* berwarna merah.

Pertanyaan:

Andaikan dua kartu diambil secara random satu persatu tanpa menempatkan kembali. Jika kedua kartu yang terambil warnanya hitam maka hitung probabilitas paling sedikit satu di antaranya adalah *Spades*.

Jawab:

Misal E adalah *event* kedua kartu hitam, dan ambil E_i adalah kejadian kartu ke-i adalah *Spade*.

Ingin dihitung $P(E_1 \cup E_2/E)$. Diperoleh:

$$P(E) = \frac{26}{52} . \frac{25}{51}$$

$$P(E_1E_2) = \frac{13}{52} . \frac{25}{51} = P(E_2E_1)$$

$$P(E_1E_2E) = \frac{13}{52} . \frac{12}{51}$$

Karena itu

$$P(E_1 \cup E_2/E) = P(E_1/E) + P(E_2/E) - P(E_1E_2/E)$$

$$= \frac{P(E_1E)}{P(E)} + \frac{P(E_2E)}{P(E)} - \frac{P(E_1E_2E)}{P(E)}$$

$$= \frac{13.25}{26.25} + \frac{13.25}{26.25} - \frac{13.12}{26.25}$$

$= 0,76$

B. HUKUM TOTAL PROBABILITAS

Konsep probabilitas bersyarat yang dibahas sebelumnya memberikan cara yang bermanfaat untuk menghitung probabilitas kejadian yang kompleks. Konsep ini sangat bermanfaat dalam proses stokastik. Oleh karena itu, konsep ini perlu dipahami dengan benar sebelum Anda sampai pada materi Proses Stokastik yang tentu sangat menantang dan menarik. Di beberapa negara maju, seperti Eropa, proses stokastik sangat dimanfaatkan dan diterapkan dalam berbagai bidang.

Mahasiswa yang berbahagia, pada bagian ini akan dipaparkan mengenai Hukum Total Probabilitas yang sangat penting dan bermanfaat dalam menyelesaikan berbagai kasus probabilitas. Berikut adalah teorema yang berkaitan dengan Hukum Total Probabilitas.

Teorema 1.4. Hukum Total Probabilitas

Misal $E_1, E_2, ..., E_n$ himpunan kejadian yang saling bertentangan dan *exhaustive,* maka untuk suatu kejadian *E:*

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E/E_n)P(E_n) \tag{1.7}$$

Bukti: Karena $E_n, n \geq 1$, adalah saling bertentangan, $E \cap E_n, n \geq 1$ saling asing (*disjoint*), dan karena mereka *exhausive* maka:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E.E_n$$

Karena itu berdasarkan aksioma penjumlahan dan Persamaan (1.5), maka diperoleh:

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} EE_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(EE_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(E/E_n)P(E_n)$$

Jadi Teorema 1.3 terbukti.

Teorema 1.3 bermanfaat bila probabilitas $P(E_n)$ dan probabilitas bersyarat $P(E/E_n)$ mudah untuk dihitung. Sebagai kejadian khusus, dengan menggunakan $E_1 = F$ dan $E_2 = F^c$ sebagai dua kejadian yang saling bertentangan dan *exhaustive*, maka diperoleh:

$$P(E) = P(E/F)P(F) + P(E/F^c)P(F^c) \qquad (1.8)$$

Berikut ini diberikan contoh kasus untuk penerapan Teorema 1.3.

Contoh 1.18. Pelemparan Uang Logam Secara Random

Andaikan dalam suatu kendi memuat n uang logam. Jika uang logam ke-n dilempar (*toss*) maka muncul angka dengan probabilitas $p_i, 1 \le i \le n$.

Pertanyaan:

Andaikan sebuah uang logam diambil secara random dari dalam kendi dan kemudian dilempar (*toss*). Berapa probabilitas mendapatkan angka?

Jawab:

Misal E_i adalah kejadian uang logam ke-i terambil, $1 \le i \le n$, dan ambil E adalah kejadian angka muncul, maka diperoleh:

$$P(E_i) = \frac{1}{n},\ \ P(E/E_i) = p,\ \ 1 \le i \le n$$

Kemudian dengan menggunakan Persamaan (1.7), diperoleh:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

C. KONSEP INDEPENDENSI

Konsep penting lainnya dalam probabilitas adalah konsep independensi. Secara intuitif, dua kejadian adalah independen bila informasi tentang salah satu kejadian tidak mempengaruhi kemungkinan terjadinya kejadian yang lain. Definisi berikut menjelaskan lebih tepat.

Definisi 1.5. Kejadian-kejadian Independen

Kejadian E dan F disebut saling independen apabila:

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

Jika kejadian *E* dan *F* independen, dan $P(F) > 0$, maka diperoleh:

$$P(E/F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(E)P(F)}{P(F)} = P(E)$$

Jadi, timbulnya kejadian *F* tidak mengubah probabilitas kejadian *E*. Dengan cara sama, *E* dan *F* saling independen berlaku:

$$P(F/E) = P(F)$$

Jadi dapat dilihat bahwa definisi independen adalah konsisten dengan intuisi kita sebelumnya.

Contoh 1.19. Dua Dadu

Sebuah dadu dilempar dua kali dengan cara sedemikian hingga kemungkinan mata dadu yang keluar sama.

Pertanyaan :

Misal E_i adalah kejadian bahwa pelemparan ke-*i* menunjukkan mata genap. Selidiki apakah E_1 dan E_2 independen?

Jawab :

Ruang sampel untuk eksperimen ini adalah:

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \le i, j \le 6\}$$

Disini i adalah hasil pelemparan pertama, dan j adalah hasil pelemparan kedua. Diperoleh:

$$E_1 = \{(i,j) : i = 2,4,6; 1 \le j \le 6\}$$

$$E_2 = \{(i,j) : 1 \le i \le 6; j = 2,4,6\}$$

$$E_1E_2 = \{(i,j) := i = 2,4,6; j = 2,4,6\}$$

Karena 36 hasil dalam Ω mempunyai kemungkinan sama, diperoleh

$$P(E_1) = \frac{m(E_1)}{m(\Omega)} = \frac{18}{36} = 0,5$$

$$P(E_2) = \frac{m(E_2)}{m(\Omega)} = \frac{18}{36} = 0,5$$

Dari

$$P(E_1E_2) = \frac{m(E_1E_2)}{m(\Omega)} = \frac{9}{36} = 0,25$$

Jadi

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

dan karena itu kejadian E_1 dan E_2 independen. Secara umum dengan menggunakan asumsi ”kemungkinan hasil yang muncul sama” jika E_i adalah kejadian sebarang dari hasil lemparan ke-i maka dapat diperlihatkan bahwa E_1 dan E_2 independen. Kedua pelemparan disebut saling independen.

Contoh 1.20. Pasangan Random
Lihat kembali *contoh 1.13*

Pertanyaan : Selidiki apakah E_i dan E_j independen, andaikan $i \neq j$?

Jawab :
Dari *Contoh 1.13.*, diketahui bahwa:

$$P(E_i) = P(E_j) = \frac{1}{n}$$

sedangkan

$$P(E_iE_j) = \frac{1}{n(n+1)} \pm P(E_i)P(E_j)$$

Jadi E_i dan E_j tidak saling independen.

Definisi 1.6. Saling Independen
Kejadian-kejadian $E_1, E_2 ... E_n$ disebut saling independen jika untuk sebarang himpunan bagian $S \subseteq \{1, 2, ...n\}$:

$$P\left(\bigcap_{i \in s} E_i\right) = \prod_{i \in s} P(E_i)$$

Jadi sifat saling independen dari tiga kejadian E_1, E_2, dan E_3 menghasilkan persamaan-persamaan berikut :

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2)$$
$$P(E_2E_3) = P(E_2)P(E_3)$$
$$P(E_1E_3) = P(E_1)P(E_3)$$
$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)P(E_3)P(E_3)$$

Secara umum, sifat saling independen n kejadian menghasilkan $2^n-(n+1)$ banyak persamaan yang bentuknya seperti ditunjukkan di atas.

Contoh 1.21. Sistem Seri

Tinjau suatu sistem yang terdiri atas n komponen. Tiap komponen dapat berada dalam salah satu dari dua keadaan (*state*) baik atau rusak. Sistem berfungsi baik bila seluruh komponen berfungsi baik, dan rusak bila salah satu komponen rusak. Sistem yang demikian ini disebut sistem seri. Andaikan n komponen saling independen dan probabilitas komponen ke-i berfungsi baik adalah p_i.

Pertanyaan :

Hitung probabilitas sistem berfungsi baik!

Jawab :

Misal E_i adalah kejadian komponen ke-i berfungsi baik dan E adalah kejadian sistem berfungsi baik. Diketahui bahwa E_i, $1 \leq i \leq n$, saling independen. Sifat alami sistem seri berakibat bahwa:

$$E = A\bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

Jadi probabilitas sistem berfungsi baik adalah:

$$P(E) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Perhatikan bahwa:

$$P(E) \leq min\{p_i\} \ dengan\ 1 \leq i \leq n$$

Yang berakibat bahwa sistem ini seri lebih lemah dari komponen terlemah.

Contoh 1.22. Sistem Paralel

Tinjau suatu yang terdiri atas n komponen seperti pada *Contoh 1.21*. Sistem berfungsi baik bila paling sedikit satu komponen berfungsi baik dan sistem gagal bila semua komponen rusak. Sistem demikian disebut sistem pararel.

Pertanyaan :

Hitung probabilitas sistem berfungsi baik!

Jawab :
Misal E_i dan E adalah kejadian-kejadian seperti pada *contoh 1.21*, sifat alami sistem pararel berakibat bahwa:

$$E^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

Jadi probabilitas sistem berfungsi baik adalah:

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(E_i^c)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

Perhatikan bahwa:

$$P(E) \geq maks\{p_i\} \text{ dengan } 1 \leq i \leq n$$

Yang berakibat bahwa probabilitas sistem pararel berfungsi baik lebih besar dari probabilitas komponen berfungsi baik yang terbesar.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Suatu variabel random bivariat (X, Y) mempunyai fungsi massa probabilitas (*fmp*) sebagai berikut :
   $p(0,0) = 0{,}1$, $p(0,1) = 0{,}2$
   $p(0,1) = 0{,}2$, $p(1,1) = 0{,}1$
   $p(0,2) = 0{,}2$, $p(1,2) = 0{,}2$
   Hitung *fmp* bersyarat Y untuk $X = 0$!
   Hitung *fmp* bersyarat Y untuk $X = 1$!
2) Suatu variabel random bivariat (X, Y) mempunyai *fmp* sebagai berikut :
   $p(1,0) = 0{,}1$, $p(1,2) = 0{,}25$, $p(1,4) = 0{,}05$
   $p(3,1) = 0{,}25$, $p(3,2) = 0{,}1$, $p(3,4) = 0{,}05$
   $p(5,0) = 0{,}05$, $p(5,2) = 0{,}05$, $p(5,4) = 0{,}1$
   Hitung *fmp* bersyarat Y untuk $X = k$, dimana k = 1,35!
3) Dari Soal Nomor 2, hitung *fmp* bersama X dan $Y = k$ untuk k = 0,2,4!

4) Suatu variabel random bivariat (*X*,*Y*,*Z*) dapat mengambil nilai-nilai berikut dengan probabilitas sama:
$\{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(1,2,3),(2,3,1),(3,2,1)\}$. Hitung:
   a. *Fmp* bersama bersyarat (*X*,*Y*) untuk *Z* = 3.
   b. *Fmp* bersyarat *X* untuk *Y* = 1.
   c. *Fmp* bersyarat *Z* untuk *X* = 2.
5) Diberikan variabel random bivariat dengan fungsi kepekatan probabilitas (*fkp*) bersama:
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}180x_1^2x_2^2, & \text{jika } x_1>0, x_2\ge 0, x_1+x_2\le 1\\ \\ 0 & \text{, selain itu}\end{cases}$$
Hitung *fkp* X_2 bila $X_1=x_1$ dan *fkp* X_1 bila $X_2=x_2$!
6) Dari Soal Nomor 1, hitung $E(Y/X=k)$ untuk *k* = 0,1 dan $E(X/Y=k)$ untuk $0\le k\le 2$.
7) Dari Soal Nomor 5, hitung Nilai Harapan bersyarat X_2!
8) Dari Soal Nomor 2, hitung $E(Y/X=k)$ untuk $k=0,2,4$!
9) Diberikan variabel random bivariat dengan *fkp* bersama sebagai berikut:
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}24x_1x_2, & \text{jika} \quad x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_1+x_2\le 1\\ 0 & \text{, selain itu}\end{cases}$$
Hitung Nilai Harapan bersyarat X_2 bila $X_1=x_2$ bila $X_1=x_1$!
10) Lihat kembali Contoh 4.15, andaikan X_n variabel random $Erl(2,5)$ dan *N* variabel random $G(0,10)$. Hitung mean Z!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $P(Y=0/X=0)=0,2$; $P(Y=1/X=0)=0,4$;
   $P(Y=2/X=0)=0,4.$
   b. $P(Y=0/X=1)=0,4$; $P(Y=1/X=0)=0,2$;
   $P(Y=2/X=1)=0,4$
2) *Fmp* bersyarat $P(Y=y/X=k)$ diberikan oleh:

$k \downarrow Y \rightarrow$	0	2	4
1	0,250	0,625	0,125
3	0,625	0,250	0,125
5	0,250	0,250	0,500

3) Hitung *fmp* bersyarat $P(X = x/Y = k)$ seperti Soal Nomor 2!

4) a. $P(X = 3, Y = 3/Z = 3) = 0,5$; $P(Z = 2/X = 2) = 0,5$.

   b. $P(X = 1/Y =) = 1$.

   c. $P(Z = 1/X = 2) = 0,5$; $P(Z = 2/X = 2) = 0,5$.

5) $f_{X_2/X_1}(x_1/x_2) = \dfrac{3x_2^2}{(1-x_1)^3}$ untuk $0 \le x_2 \le 1 - x_1, 0 \le x_1 \le 1$.

   Untuk $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ gunakan cara yang sama.

6) $E(Y/X = 0) = 1,2$; $E(Y/X = 1) = 1$.

7) $\dfrac{3}{4}(1 - x_1)$.

8) 1,75 ; 1 ; 2,5.

9) $\dfrac{2}{3}(1 - x_1)$.

10) 4 (gunakan pengertian Nilai Harapan jumlah variabel random yang banyaknya random).

RANGKUMAN

Dalam modul ini telah kita pelajari beberapa konsep penting dalam Probabilitas dan Probabilitas Bersyarat. Konsep-konsep yang dipelajari antara lain bagaimana menghitung atau menentukan probabilitas dan probabilitas bersyarat dari suatu variabel random bila variabel random yang lain diketahui. Konsep ini sangat penting dalam mempelajari Proses Stokastik, khususnya jika kita ingin mempelajari analisis *transient*. Dimana dalam analisis ini probabilitas suatu proses di *state* tertentu dipengaruhi oleh *state* proses sebelumnya dan waktu berlangsungnya proses. Dalam modul ini dibahas mengenai Hukum

Total probabilitas dan konsep independensi. Kedua konsep ini sangat penting dalam proses stokastik.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Diberikan suatu variabel random bivariat (X,Y) dengan *fmp* sebagai berikut.

$p(1,0) = 0,1$, $p(1,2) = 0,25$, $p(1,4) = 0,05$

$p(3,1) = 0,25$, $p(3,2) = 0,1$, $p(3,4) = 0,05$

$p(5,0) = 0,05$, $p(5,2) = 0,05$, $p(5,4) = 0,1$

1) Nilai $P\left(Y = 0/X = 1\right)$ adalah ....
   A. 0,15
   B. 0,35
   C. 0,75
   D. 0,25

2) Nilai $P\left(Y = 2/X = 3\right)$ adalah ....
   A. 0,25
   B. 0,55
   C. 0,37
   D. 0,25

3) Nilai $P\left(Y = 4/X = 5\right)$ adalah ....
   A. 0,5
   B. 0,4
   C. 0,3
   D. 0,2

4) Nilai $P\left(Y = 3/X = 0\right)$ adalah ....
   A. 0,175
   B. 0,225
   C. 0,375
   D. 0,625

5) Nilai $P\left(Y = 3/X = 2\right)$ adalah ....
   A. 0,25
   B. 0,35

C. 0,45
D. 0,55

6) Nilai $P(Y = 5/X = 4)$ adalah ....
A. 0,60
B. 0,70
C. 0,50
D. 0,80

7) Nilai $E(Y/X = 1)$ adalah ....
A. 1,75
B. 1,25
C. 1,50
D. 1,85

8) Nilai $E(Y/X = 3)$ adalah ....
A. 1,1
B. 12
C. 1,3
D. 1,0

9) Nilai $E(Y/X = 5)$ adalah ....
A. 2,6
B. 2,5
C. 2,4
D. 2,3

10) Nilai $E(Y^2/X = 1)$ adalah ....
A. 6,25
B. 3,25
C. 4,25
D. 5,25

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B. Identifikasi semua *event-event* yang mungkin dari pengujian 2 mesin tersebut.
2) C. Harga saham dapat bernilai Rp0, Rp. 1.000, Rp. 2.000, ... dan seterusnya.
3) D. Jumlah mobil adalah integer dan terbatas.
4) C. Penulisan secara himpunan.
5) D. Penulisan secara himpunan.
6) C. Penulisan secara himpunan.
7) D. Penulisan secara himpunan.
8) A. Tulis event-eventnya terlebih dahulu.
9) A. Tulis event-eventnya terlebih dahulu.
10) A. Tulis event-eventnya terlebih dahulu.

Tes Formatif 2

1) D. Gunakan definisi probabilitas bersyarat: $P(Y = y/X = x) = \dfrac{P(x,y)}{P(x)}$

   dihitung dengan definisi probabilitas marginal,

   $P(x) = \sum_y P(1,y) = 0,40.$ Jadi $P(Y = 0/X = 1) = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25.$
2) D. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 1.
3) A. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 1.
4) D. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 1.
5) A. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 1.
6) C. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 1.
7) A. Gunakan definisi Nilai Harapan bersyarat:

   $E(Y/X = x) = \sum_y yp(x/y)p(x/y)$ dihitung menggunakan

   probabilitas bersyarat:

   $E(Y/X = 1) = \sum_y yp(y/x) = 0 \quad p(y = 0/x = 1)$

   $+2p(y = 2/x = 1) + 4p(y = 4/x = 1)P(x)$

   = 0. (0,25) + 2 (0,625) + 4 (0,125) = 1,75
8) D. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 7.

9) B. Gunakan cara yang sama seperti jawaban soal Nomor 8.
10) B. Gunakan cara yang sama jawaban soal Nomor 7, kecuali menggunakan Y^2.

Daftar Pustaka

Casella, G. and Berger, R.L. 2002. *Statistical Inference*. Second Edition. Duxbury Thomson Learning.

Durret, R. 2010. *Essential Stochastic Processes*. Second Edition. Springer: New York.

Gross, D., Shortie, J.F., Thompson, J.M., and Harris, C.M. 2008. *Fundamental of Queueing Theory*. 4th Edition. John Wiley & Sons: New York.

Heyman, D.P., and Sobel, M.J. 1996. *Stochastic Models in Operation Research.* Vol. 1. McGraw Hill: New York.

Jacod, J., and Shirjaeve, A.N. 2002. *Limit Teorems for Sthochastic Processes.* Springer: New York.

Kulkarni, V.G. 1998. *Modeling, Analysis, Design and Control of Stochastic System*. Springer: New York.

Lawler, G.F. 2006. *Introduction to Stochastic Processes. Probability Series.* Chapman & Hall/CRC: New York.

Prabhu, N.U. 2007. S*tochastic Processes: Basic Theory and Its Application*. World Scientific Publising.

Puterman, M.L. 2005. *Markov Decision Process: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons: New York.

Rolsky, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons: New York.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Process*. Second Edition. John Wiley & Sons: New York.

Taylor, H.M., and Karlin, S. 1984. *An Introduction to Stochastic Modelling*. Third Edition. Academic Press: London.

Varadhan, S.R.S. 2007. *Stochastic Processes.* American Mathematical Society: Rhode Island.