MODUL 1

Konsep Dasar

Drs. Suryo Guritno, M.Stats., Ph.D.

PENDAHULUAN

Materi yang akan dibahas dalam modul ini adalah konsep-konsep dasar aljabar matriks yang meliputi pengertian matriks, vektor dan skalar; operasi dasar, dan beberapa definisi matriks khusus.

Dengan mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat memahami dengan baik konsep-konsep dasar aljabar matriks.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian matriks, vektor dan skalar, serta membedakannya;
2. melakukan operasi-operasi antar matriks, vektor dan skalar;
3. menentukan berbagai macam matriks khusus dan sifat-sifatnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian Matriks, Vektor dan Skalar

Matriks adalah kumpulan bilangan yang diatur dalam suatu empat persegi panjang, menurut baris-baris dan kolom-kolom.
Setelah itu dapat didefinisikan bahwa *skalar* adalah setiap bilangan dalam matriks tersebut, yang disebut pula sebagai komponen atau elemen matriks tersebut.

Pada umumnya matriks ditulis dengan huruf besar, seperti A, B, C, X, Y, ... Sedangkan elemen matriks ditulis dengan huruf kecil yang sesuai dengan huruf besar untuk penulisan matriks tersebut dengan dua indeks, yaitu indeks pertama menunjukkan baris yang memuat elemen tersebut, sedangkan indeks kedua menunjukkan kolom yang memuat elemen tersebut.

Jika A adalah suatu matriks dengan m baris dan n kolom maka dikatakan bahwa matriks A bertipe atau berorde ($m \times n$), yang dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atau

$$A = \left(a_{ij}\right), \quad \text{dengan} \quad i = 1,\ 2, \ldots, m$$
$$j = 1,\ 2, \ldots, n.$$

Artinya, a_{11} adalah komponen (yang termuat dalam) baris ke-1 dan kolom ke-1 dari matriks A sehingga a_{ij} adalah komponen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A.

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom (A bertipe ($m \times n$) dengan $m = n$). Matriks ini dapat dikatakan bertipe n dan ditulis sebagai

$$A_n\ ,\ B_n,\ \ X_n,\ ...$$

Jika $A_n = \left(a_{ij}\right)$, $i = j = 1, 2, \ldots., n$ adalah suatu matriks bujur sangkar maka a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} adalah *komponen-komponen diagonal* dari A_n dan

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ adalah *trace* dari A_n yang dapat ditulis sebagai *trace* $\left(A_n\right)$ atau $\operatorname{tr}\left(A_n\right)$ atau $\operatorname{tr}\left(A\right)$.

Vektor adalah suatu matriks dengan satu baris atau satu kolom. Matriks dengan satu baris disebut *vektor baris*, sedangkan matriks dengan satu kolom disebut *vektor kolom*. Suatu vektor biasa ditulis sebagai huruf-huruf kecil, seperti:

$$\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{x}, \ldots$$

Dengan demikian suatu matriks A bertipe $(m \times n)$, yang dapat ditulis sebagai $A_{m\times n}$ atau A, dapat dinyatakan sebagai kumpulan vektor baris atau kumpulan vektor kolom, ditulis:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \\ \underset{\sim}{a}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_n \end{pmatrix}$$

Kadang-kadang untuk membedakan antara vektor baris dan vektor kolom, vektor baris ditulis sebagai $\underset{\sim}{a}_{1\bullet}, \underset{\sim}{a}_{2\bullet}, \ldots$ sedangkan vektor kolom ditulis sebagai $\underset{\sim}{a}_{\bullet 1}, \underset{\sim}{a}_{\bullet 2} \ldots$

Contoh 1.1

Suatu perusahaan mobil memproduksikan 3 model, yaitu sedan, *hard-top* dan *convertible* (dengan kap yang dapat dibuka). Andaikan perusahaan tersebut ingin membandingkan unit bahan mentah dan unit tenaga yang diperlukan untuk produksi dalam suatu bulan tertentu maka datanya dapat ditulis dalam suatu matriks bertipe (2×3) atau (3×2), yaitu:

$$\begin{pmatrix} 23 & 16 & 10 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} 23 & 7 \\ 16 & 9 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Pada matriks yang bertipe (2×3), baris 1 menyatakan kebutuhan unit bahan mentah, sedangkan baris 2 menyatakan kebutuhan unit tenaga. Kolom satu menyatakan model sedan, kolom 2 menyatakan model *hard-top*, sedangkan kolom 3 menyatakan model *corvertible*. Dengan demikian 23 menunjukkan kebutuhan unit bahan mentah (untuk memproduksi) mobil model sedan untuk bulan tersebut, sedangkan 11 adalah unit tenaga (yang dibutuhkan untuk memproduksi) mobil *convertible* untuk bulan tersebut.

Contoh 1.2

Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka, A dapat dinyatakan sebagai kumpulan vektor baris

$$A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \\ \underset{\sim}{a}_2 \\ \underset{\sim}{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_{1\cdot} \\ \underset{\sim}{a}_{2\cdot} \\ \underset{\sim}{a}_{3\cdot} \end{pmatrix}$$

dengan
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a}_1 &= \underset{\sim}{a}_{1\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{\sim}{a}_2 &= \underset{\sim}{a}_{2\cdot} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\sim}{a}_3 &= \underset{\sim}{a}_{3\cdot} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jika A dinyatakan dalam kumpulan vektor kolom maka

$$A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 & \underset{\sim}{a}_3 & \underset{\sim}{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_{\cdot 1} & \underset{\sim}{a}_{\cdot 2} & \underset{\sim}{a}_{\cdot 3} & \underset{\sim}{a}_{\cdot 4} \end{pmatrix}$$

dengan
$$\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{a}_{\cdot 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{a}_2 = \underset{\sim}{a}_{\cdot 2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{a}_3 = \underset{\sim}{a}_{\cdot 3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underset{\sim}{a}_4 = \underset{\sim}{a}_{\cdot 4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Untuk suatu kepentingan tertentu, suatu matriks dapat juga dinyatakan sebagai kumpulan sub-matriks, seperti:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Contoh 1.3

Menggunakan matriks A pada *contoh 1.2*, jika matriks A ingin dinyatakan sebagai:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dengan A_{11} bertipe (2×3) maka A_{12} harus bertipe (2×1), A_{21} harus bertipe (1×3), dan A_{22} harus bertipe (1×1) sehingga

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.4

Jika terhadap sampel random yang terdiri dari 10 orang mahasiswa diukur tinggi badan, berat badan dan tekanan darah maka hasil pengukurannya dapat disajikan dalam suatu matriks bertipe (10×3), yaitu:

$$X = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_2 & \underset{\sim}{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 172 & 70 & 120 \\ 150 & 63 & 115 \\ 161 & 67 & 117 \\ 181 & 80 & 119 \\ 175 & 71 & 123 \\ 173 & 69 & 118 \\ 165 & 68 & 116 \\ 178 & 79 & 114 \\ 170 & 67 & 121 \\ 168 & 72 & 112 \end{pmatrix}$$

dengan $\underset{\sim}{X}_1$ (adalah kolom yang menunjukkan hasil pengukuran) tinggi badan, $\underset{\sim}{X}_2$ berat badan, sedangkan $\underset{\sim}{X}_3$ tekanan darah. Masing-masing baris menunjukkan hasil pengukuran tinggi badan, berat badan, dan tekanan darah seorang mahasiswa yang terpilih sebagai anggota sampel random tersebut.

Secara umum dapat dinyatakan bahwa apabila terhadap suatu sampel random (yang diambil dari suatu populasi yang menjadi perhatian) berukuran n yang diamati adalah lebih dari satu masalah (= variat = peubah), misalkan k (≥ 2) maka hasil pengamatan/perhitungan/pengukuran dapat disajikan dalam suatu matriks data X bertipe $(n \times k)$ dengan n adalah ukuran sampel, sedangkan k adalah banyaknya variat yang diamati.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jika $A = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 & 3 \\ 3 & 13 & 10 & 2 & 6 \\ 11 & -9 & 0 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$ maka

tentukan:

a) a_{24}, a_{44} dan a_{51}

b) $\underset{\sim}{a}_{\cdot 3}$ dan $\underset{\sim}{a}_{1\cdot}$

c) $B = \left(a_{i+1,\,j+2}\right)$ untuk i = 1, 2, 3 dan j = 1, 2, 3

d) A_{11} yang bertipe (2×4)

2) Jika $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

tentukan:

a) Komponen diagonal matriks *P*

b) tr(*P*).

3) Untuk matriks bertipe (3×2) dalam *contoh 1.1*,

a) Apa yang ditunjukkan oleh 16?

b) Berapakah kebutuhan unit bahan mentah untuk memproduksi mobil?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $a_{24} = 2$; $a_{44} = 4$ dan $a_{51} =$ tidak ada

b. $\underset{\sim}{a}_{.3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{a}_{1} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $B = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d. $A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 \\ 3 & 13 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

2) a. Komponen diagonal matriks *P*: 3, 5, 3

b. tr(*P*) = 3 + 5 + 3 = 11

3) a. 16 adalah kebutuhan bahan mentah untuk memproduksi mobil model hard-top.

b. $\begin{pmatrix} 23 & 16 & 10 \end{pmatrix}$

RANGKUMAN

Telah kita pelajari pengertian-pengertian tentang matriks, vektor dan skalar, berbagi cara penyajian matriks dalam bentuk vektor maupun sub-matriks, serta kegunaannya untuk penyajian data multivariat.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Tipe suatu matriks ditentukan oleh banyaknya ….
   A. kolom
   B. baris
   C. komponen
   D. baris dan kolom

2) Jika $A = \left(a_{ij}\right)$, i = 1, 2, 3 dan j = 1, 2 dengan $a_{ij} = i + j$ maka tr $\left(A_{11}\right)$ dengan A_{11} bertipe 2 adalah ….
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. tidak dapat dihitung

3) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 2, a_{22} = ….
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. tidak ada

4) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 2, $a_{3.}$ = ….
   A. (1 2)
   B. (2 3)
   C. (3 4)
   D. (4 5)

5) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 2, $a_{.3}$ = ….

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

D. tidak ada

6) Jika matriks A bertipe (4×5) maka pernyataan berikut yang salah adalah ….
A. A mempunyai 4 Vektor baris
B. A mempunyai 5 Vektor kolom
C. *trace* A dapat dihitung
D. *trace* A tidak dapat dihitung

7) Jika $A = \left(a_{ij}\right)$, i, j = 1, 2, 3 dengan $a_{ij} = i - j$ maka $B = \left(a_{ji}\right)$, i, j = 1, 2, adalah ….

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

8) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 7, *trace* (A) = ….
A. 0
B. 1

C. 2
D. 3

9) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 7, $a_{31} + a_{13} = \ldots.$
A. -1
B. 0
C. 1
D. 2

10) Untuk $A = \left(a_{ij}\right)$ dalam soal nomor 7 maka $B = \left(a_{ij}^2\right)$, $i, j = 1, 2, 3$ adalah ….
A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Operasi Dasar

Berikut ini akan diuraikan berbagai macam operasi antara matriks dengan matriks, matriks dengan vektor, dan matriks dengan skalar, yang meliputi kesamaan, penjumlahan, maupun pergandaan, serta sifat-sifatnya.

A. KESAMAAN DUA MATRIKS

Dua matriks *A* dan *B* dikatakan sama, ditulis sebagai *A* = *B*, *bhb* (bila dan hanya bila) mempunyai tipe sama dan $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap *i*, *j*.

Contoh 1.5

Jika $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ maka

A = *B* hanya bila $p = 1/2$, $q = 1/2$ dan *n* = 1

Contoh 1.6

Jika $C = \begin{pmatrix} x+y & 6 \\ 2x-3 & 2-y \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 5 & 5x+2 \\ y & x-y \end{pmatrix}$

Supaya *C* = *D*, haruslah $x+y=5$, $6=5x+2$, $2x-3=y$, dan $2-y=x-y$. Dari persamaan ke-4 didapat $x=2$, sedangkan dari persamaan ke-3 didapat $y=1$ (karena $x=2$). Harga-harga *x* dan *y* yang didapat harus memenuhi persamaan ke-1 dan ke-2 agar supaya *C* = *D*. Tetapi dari persamaan ke-1 dapat ditunjukkan bahwa untuk $x=2$ dan $y=1$, $x+y \neq 5$. Dengan demikian *C* tidak sama dengan *D*, ditulis $C \neq D$.

B. PENJUMLAHAN DUA MATRIKS

Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan hanya jika keduanya bertipe sama. Jika matriks $C = \left(c_{ij}\right)$ adalah $B = \left(b_{ij}\right)$, ditulis $C = A + B$ maka $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i, j.

Contoh 1.7

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{maka } A+B = \begin{pmatrix} (1+3) & (2-4) & (-1+1) & (0+2) \\ (4+1) & (0+5) & (2+0) & (1+3) \\ (2+2) & (-5-2) & (1+3) & (2+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.8

Jika $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ maka

A dan B tidak dapat dijumlahkan karena tipe keduanya tidak sama, yaitu A bertipe (2×3), sedangkan B bertipe (3×2).

C. PENGGANDAAN MATRIKS DENGAN SKALAR (BILANGAN)

Hasil ganda suatu matriks $A = \left(a_{ij}\right)$ dengan suatu skalar k, ditulis kA atau Ak, adalah:

$$kA = k\left(a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}\right) = \left(a_{ij}k\right) = \left(a_{ij}\right)k = Ak$$

Jika $k = -1$ maka $-A$ adalah <u>negatif dari A</u>

Contoh 1.9

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ maka

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 1 & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times -1 & \frac{1}{2}\times 0 \\ \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 1 \\ \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times -5 & \frac{1}{2}\times 1 & \frac{1}{2}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2\ A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-1\ A = -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

D. SELISIH DUA MATRIKS

Selisih antara matriks $A = (a_{ij})$ dengan matriks $B = (b_{ij})$, ditulis $A - B$ adalah jumlah dari A dengan negatif dari B. Dengan demikian,

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

Contoh 1.10

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, maka $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

E. PENGGANDAAN DUA MATRIKS

Dua matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dapat digandakan jika banyaknya kolom matriks *A* sama dengan banyaknya baris matriks B. Jika $A \cdot B$ (dibaca: *A* digandakan dengan *B*) maka *A* adalah matriks pengganda dan *B* matriks yang diganda.

Dengan demikian, dua matriks dapat digandakan hanya jika banyaknya kolom matriks pengganda sama dengan banyaknya baris matriks yang diganda.

Jika matriks $C = (c_{ik})$ adalah hasil ganda matriks *A* dengan matriks *B*, ditulis $C = A \cdot B$ maka $c_{ik} = \sum_{j=1}^{J} a_{ij} b_{jk}$, untuk setiap *i*, *k*, dengan $i = 1, 2, \ldots, i$ dan $k = 1, 2, \ldots, k$.

Contoh 1.11

Jika $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left((4 \times 2) + (5 \times 3) + (6 \times 1) \right)$$

$$= (8 + 15 + 6) = (29) = 29$$

sedangkan

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times4 & 2\times5 & 2\times6 \\ 3\times4 & 3\times5 & 3\times6 \\ 1\times4 & 1\times5 & 1\times6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.12

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka $A \cdot B = C = (c_{ik})$ dengan $c_{ik} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk}$ untuk semua i, k = 1, 2. Dengan demikian,

$$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 3 + 2 = 5$$
$$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 = -1 + 6 = 5$$
$$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} = -2\cdot 3 + 1\cdot 1 = -6 + 1 = -5$$
$$c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} = -2\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 2 + 3 = 5$$

sehingga $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

Dengan cara yang sama seperti di atas maka

$$B \cdot A = D = (d_{ik})$$

dengan

$$d_{11} = 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) = 5\ ;\ d_{12} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 5\ ;$$

$$d_{21} = 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -5 \text{ dan } d_{22} = 1\cdot 2 + 3\cdot 1 = 5,$$

sehingga

$$B \cdot A = D = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.13

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

maka, $B \cdot A$ *dapat* dihitung, sedangkan $A \cdot B$ *tidak dapat* dihitung (mengapa?). $A \cdot B$ tidak dapat dihitung karena banyaknya kolom matriks A (= matriks pengganda) *tidak sama dengan* banyaknya baris matrik B (= matriks yang diganda).

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2\times1+(-3)\times4) & (2\times3+(-3)\times(-1)) & (2\times(-2)+(-3)\times5) \\ (-1\times1+2\times4) & (-1\times3+2\times(-1)) & -1\times(-2)+2\times5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 9 & -19 \\ 7 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Catatan:
Dari *contoh 1.11* sampai dengan *contoh 1.13* diharapkan Anda dapat memperoleh beberapa hal, yaitu cara menghafalkan penggandaan dua matriks tanpa harus menghafalkan rumusnya, dan memperhatikan bahwa penggandaan dua maktriks *tidak selalu* komutatif.

F. BEBERAPA SIFAT OPERASI

1. Jika A, B dan C adalah matriks-matriks bertipe sama maka

   $A+B=B+A$ (sifat komutatif)
   $A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$ (sifat asosiatif)

2. Dengan memperhatikan aturan penjumlahan dan penggandaan dua matriks maka berlaku

$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (sifat asosiatif)

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (sifat distributif)

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (sifat distributif)

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *dan* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

hitunglah
a) $A + B$
b) $A - 3B$
c) $A \cdot B$
d) $(A + B) \cdot C$

2) Jika $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Apakah $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y}$; $\underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{y}$; $\underset{\sim}{y} \cdot \underset{\sim}{x}$; $\underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{x}$ dan $Q\underset{\sim}{z}$ dapat dihitung?
b) Hitunglah $\underset{\sim}{y}\, P \underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}\, Q \underset{\sim}{z}$

3) Untuk matriks data X pada *contoh 1.4* dalam Kegiatan Belajar 1, hitunglah vektor mean $\underset{\sim}{\bar{X}} = \frac{1}{n}\, \underset{\sim}{1}' X = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{pmatrix}$, dengan $\bar{X}_i$ = mean X_i, $i = 1, 2, 3$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $A+B=\begin{pmatrix}4 & 4 & -2\\ 1 & 6 & 0\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$

b. $A-3B=\begin{pmatrix}-8 & -4 & 2\\ -7 & -6 & -4\\ 5 & -1 & -5\end{pmatrix}$

c. $A.B=\begin{pmatrix}8 & 7 & -2\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & 14 & 12\end{pmatrix}$

d. $(A+B).C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -4 & 16\\ 20 & 17\end{pmatrix}$

2) *a.* $\underset{\sim}{x}.\underset{\sim}{y}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -2\end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{z}.\underset{\sim}{y}=$ tidak dapat dihitung

$\underset{\sim}{y}.\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}$

$\underset{\sim}{z}.\underset{\sim}{x}=$ tidak dapat dihitung

$Q\underset{\sim}{z}=\begin{pmatrix}-15\\ -22\\ -15\end{pmatrix}$

b. $\underset{\sim}{y}P\underset{\sim}{x}=9$

$\underset{\sim}{y}Q\underset{\sim}{z}=-126$

3) $\underset{\sim}{1}'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\bar{X}}=\frac{1}{n}\underset{\sim}{1}'X=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\bar{X}}_1 & \underset{\sim}{\bar{X}}_2 & \underset{\sim}{\bar{X}}_3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}169,3 & 70,6 & 117,5\end{pmatrix}$

RANGKUMAN

Telah kita pelajari beberapa cara operasi antara matriks dengan matriks, matriks dengan vektor , dan matriks dengan skalar , beserta sifat-sifatnya, yaitu:

1. Jika $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ dan $C = \left(c_{ij}\right)$ maka
   $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$
   $A + B = B + A$
   $A + B + C = A + \left(B + C\right) = \left(A + B\right) + C$
2. Jika $A = \left(a_{ij}\right)$ dan k = skalar/bilangan, maka
   $kA = \left(ka_{ij}\right) = \left(a_{ij}k\right) = Ak$
3. Jika $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{jk}\right)$ dan $C = \left(c_{ik}\right)$, maka $C = A.B$ dengan
   $c_{ik} = \sum_{j=1}^{J} a_{ij}\, b_{jk}$
4. Dengan memperhatikan aturan penjumlah dan aturan penggandaan
   $A \cdot B \cdot C = A \cdot \left(B \cdot C\right) = \left(A \cdot B\right) \cdot C$
   $\left(A + B\right)C = A \cdot C + B \cdot C$
   $A\left(B + C\right) = A \cdot B + A \cdot C$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Dua matriks dapat di jumlahkan jika ….
   A. tipenya sama
   B. banyaknya baris sama
   C. banyaknya kolom sama
   D. banyaknya komponen sama

2) Dua matriks dapat digandakan jika ….
   A. tipenya sama
   B. banyaknya baris matriks pengganda sama dengan banyaknya kolom matrik yang diganda
   C. banyaknya kolom matriks pengganda sama dengan banyaknya baris matriks yang diganda
   D. banyaknya komponen sama

3) Supaya matriks $A = \begin{pmatrix} x-2y & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & x+y \end{pmatrix}$ sama maka pasangan (x, y) haruslah ….
   A. (-1,5)
   B. (1,-5)
   C. (5,1)
   D. (1,5)

4) Pasangan (x , y) yang didapat dari $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ adalah ….
   A. (2,3)
   B. (3,1)
   C. (1,3)
   D. (3,2)

5) Harga x yang memenuhi $\begin{pmatrix} x & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -7 \\ 5/4 \end{pmatrix} = 0$ adalah ….
   A. $x = -\dfrac{1}{2}$ dan $x = -1$
   B. $x = \dfrac{1}{2}$ dan $x = -1$
   C. $x = -\dfrac{1}{2}$ dan $x = 1$
   D. $x = \dfrac{1}{2}$ dan $x = 1$

6) Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sama dengan ….

A. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -4 & 13 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

7) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ maka ….

A. BC = CB
B. AD = DA
C. AC = CA
D. AB = BA

8) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ maka $A - \frac{1}{2}B =$ ….

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ maka. $A \cdot B =$ ….

A. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -8 & 1 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 2 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

10) Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ maka matriks D yang memenuhi $A + D = B$ adalah ….

A. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Matriks Khusus

Berikut ini akan diuraikan tentang beberapa matriks khusus, terutama matriks yang banyak digunakan dalam analisis data statistik.

Matriks nol adalah suatu matriks yang semua komponennya adalah bilangan nol. biasanya ditulis dengan notasi *0*.

Dengan memperhatikan aturan penjumlahan dan aturan penggandaan maka untuk setiap matriks *A* berlaku:

$$A + 0 = 0 + A = A \text{ dan } A.0 = 0, \text{ serta } 0.A = 0$$

Matriks segitiga atas $A = \left(a_{ij}\right)$ adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i > j$.

Contoh 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ adalah matriks segi tiga atas

Matriks segitiga bawah $A = \left(a_{ij}\right)$ adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i < j$.

Contoh 1.15

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ adalah matriks segitiga bawah

Contoh 1.16

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ adalah matriks segitiga atas, karena $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$,

tetapi juga merupakan matriks segitiga bawah, karena $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$

Matriks yang berbentuk seperti dalam *contoh 1.16* tersebut adalah suatu *matriks diagonal*, yang biasa ditulis sebagai

$$A = diag\left(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya sama, yaitu $a_{ii} = k$ untuk semua *i*.

Matriks identitas atau *matriks unit*, ditulis dengan notasi *I* adalah matriks skalar dengan $a_{ii} = k = 1$ untuk semua *i*.

Contoh 4

$$C = diag\left(3, 4, 7, 0\right) = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & 4 & & \\ & & 7 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah suatu matriks diagonal

D = diag (4, 4, 4, 4)
= 4 diag (1, 1, 1, 1) adalah suatu matriks skalar

E = diag (1, 1, 1) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ adalah matriks identitas tipe 3 atau matriks untuk tipe 3.

Suatu sifat dari matriks identitas adalah untuk setiap matriks bukur sangkar tipe n, berlaku:

$$AI = IA = A$$

Transpose suatu matriks $A = (a_{ij})$, ditulis dengan notasi A' atau A^t adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Dengan demikian, jika A bertipe $(m \times n)$ maka

$$A' = A^t = (a_{ji}) \text{ bertipe } (n \times m).$$

Beberapa sifat yang berlaku adalah

$$(A\,B\,C)' = C'\,B'\,A' \;;\; (A+B)' = A' + B'$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A' & D' \\ B' & E' \\ C' & F' \end{pmatrix}$$

Contoh 1.18

Jika $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ maka, $\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ maka $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Matriks simetri adalah suatu matriks dengan sifat $A = A'$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk i, j. Dengan demikian suatu matriks simetri pasti bujur sangkar.

Beberapa sifat yang perlu mendapat perhatian adalah:

1. jika A dan B simetri, belum tentu AB simetri;
2. untuk sebarang matriks A berlaku sifat AA' atau $A'A$ simetri.

Contoh 1.19

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ adalah matriks simetri, sebab $A = A'$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

bukan matriks simetri, sebab ada $a_{ij} \neq a_{ji}$, yaitu a_{23} = -2 yang tidak sama dengan $a_{32} = 1$ ($a_{23} \neq a_{32}$)

Dalam analisis data multivariat, matriks korelasi dan matriks kovariansi adalah contoh konkret matriks simetri.

Matriks idempoten adalah matriks bujur sangkar dengan sifat

$$A \,.\, A = A$$

Contoh 1.20

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ adalah suatu matriks idempoten karena

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

Catatan:

Untuk menunjukkan bahwa A idempoten *harus* diperiksa bahwa semua komponen dalam $A \,.\, A$ dan A yang sesuai letaknya sama.

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *bukan* matriks idempoten karena dapat ditunjukkan bahwa

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \neq B$$

Untuk menunjukkan bahwa $BB \neq B$ cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu komponen BB dan B yang sesuai letaknya tidak sama, mengapa? Kalau kurang jelas, coba tinjau ulang Kegiatan Belajar 2 tentang kesamaan dua matriks.

Beberapa sifat matriks idempoten adalah:

1. jika A idempoten maka A^r idempoten untuk setiap bilangan bulat r positif;
2. jika A idempoten maka $I - A$ idempoten, tetapi $A - I$ tidak idempoten;
3. jika A dan B saling komutatif terhadap aturan penggandaan dan idempoten maka AB idempoten.

Suatu matriks bujur sangkar yang mempunyai sifat $A^2 = 0$ disebut *matriks nilpoten*, sedangkan yang mempunyai sifat $A^2 = I$ disebut *matriks unipoten*.

Suatu matriks A dikatakan *ortogonal* jika berlaku sifat

$$A'A = I = AA'$$

Norm dari suatu vektor real $\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ didefinisikan sebagai

$$n(\underset{\sim}{x}) = \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Setiap vektor real $\underset{\sim}{x}$ yang bukan vektor $\underset{\sim}{0}$ dapat diubah menjadi *vektor satuan* dengan cara mengalikan dengan suatu skalar $1 \big/ \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}}$. Dengan demikian, vektor satuan dari vektor $\underset{\sim}{x}$ adalah $\underset{\sim}{u} = \left(\sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}} \right)^{-1} \underset{\sim}{x}$ yang disebut *bentuk ternormal* dari $\underset{\sim}{x}$ (karena $\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{u} = 1$)

Dua vektor $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ yang tidak nol dikatakan *saling ortogonal* jika $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{x} = 0$, sedangkan $\underset{\sim}{u}$ dan $\underset{\sim}{v}$ dikatakan *ortonormal* jika saling ortogonal dengan masing-masing adalah vektor satuan $\left(\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{u} = 1 = \underset{\sim}{v}'\underset{\sim}{v} \text{ dan } \underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}'\underset{\sim}{u} = 0\right)$

Dengan demikian suatu matriks ortogonal adalah matriks bujur sangkar dengan setiap vektor barisnya maupun vektor kolomnya ortonormal.

Contoh 1.21

Jika $\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ dan $\underset{\sim}{y}' = \begin{pmatrix}6 & 3 & -2 & -2\end{pmatrix}$ maka $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ saling ortogonal karena

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 \\ 3 \\ -2 \\ -2\end{pmatrix}$$

$$6+6-4-8=0$$

Jika $A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ maka A adalah ortogonal.

Hal ini dapat diperiksa melalui $A'A = AA' = I$ atau memeriksa bahwa setiap baris atau kolomnya ortonormal.

Bentuk kuadrat suatu matriks A adalah $\underset{\sim}{x}'A\underset{\sim}{x}$. Bentuk ini mempunyai peranan yang penting dalam analisis variansi karena pada dasarnya dengan pemilihan matriks A yang cocok, setiap jumlah kuadrat dapat dinyatakan dalam suatu bentuk kuadrat.

Contoh 1.22

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim}{x}_i - \bar{x}\right)^2 = \underset{\sim}{x}'C\underset{\sim}{x} \text{ dengan } C = I_n - \frac{1}{n}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{1}'$$

$$\underset{\sim}{x}' \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2$$

$$+ 7x_2^2 - 2x_3x_2 + 3x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$= x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 5x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Secara umum $\underset{\sim}{x}'A\underset{\sim}{x} = \sum_i x_i^2 a_{ii} + \sum_{i \neq j}\sum x_i x_j a_{ij}$

$$= \sum_i x_i^2 a_{ii} + \sum_{j>i}\sum x_i x_j \left(a_{ij} + a_{ji}\right)$$

Dua matriks bujur sangkar A dan B dikatakan saling komutatif (terhadap aturan penggandaan), jika $AB = BA$

Contoh 1.21

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka

A dan B saling komutatif karena

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = BA$$

Suatu matriks (bujur sangkar) B adalah *invers* dari matriks (bujur sangkar) A, ditulis $B = A^{-1}$, jika berlaku

$AB = BA = I$

Contoh 1.24

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

maka A adalah invers dari B atau B adalah invers dari A karena dapat ditunjukkan bahwa $AB = BA = I$

Contoh 1.25

$$\text{Jika } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ maka,}$$

A bukan invers dari B atau sebaliknya, karena walaupun $BA = I_2$ dapat ditunjukkan bahwa $BA \neq I_2$.

Dalam praktek masalah yang timbul bukanlah menunjukkan apakah suatu matriks adalah invers suatu matriks tertentu, tetapi masalah yang lebih menarik perhatian adalah bagaimana mencari invers suatu matriks, jika matriks tersebut mempunyai invers.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   Hitunglah:

   a) $C'\left(A + B'\right)$

   b) $A' - 3B$

   c) $\left(A \cdot B\right)'$

   d) $B'A'$

   Tunjukkan:

   e) apakah A idempoten

   f) apakah B ortogonal

2) Jika X bertipe $\left(n \times k\right)$ dan $X'X$ punya invers, tunjukkan bahwa $(I_n - X(X'X)^{-1} X')$ simetri dan idempoten.

3) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, apakah A nilpoten atau unipoten?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $C'(A+B') = \begin{pmatrix} 13 & 21 & -13 \\ 12 & 29 & 3 \\ 0 & 11 & 23 \end{pmatrix}$

b. $(AB)' = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 14 \\ -2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

c. $A' - 3B = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 5 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

d. $B'A' = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 14 \\ -2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

e. tunjukkan apakah $A.A = A$.

f. tunjukkan apakah $A'A = I = AA'$

2) Gunakan rumus

$(A \pm B)' = A' \pm B'$

$(A^{-1})' = (A')^{-1}$

oleh karena $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 13 \\ 10 & 17 & 16 \\ 7 & 12 & 11 \end{pmatrix} \neq 0$ maka matriks A bukan matriks nilpotent dan $A^2 \neq I$ maka matriks A bukan matriks unipoten.

RANGKUMAN

Dalam kegiatan belajar ini telah dipelajari berbagai macam bentuk khusus matriks yang akan banyak digunakan dalam analisis data statistik.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka matriks A ….
   A. selalu punya invers
   B. belum tentu punya invers
   C. simetri
   D. idempoten

2) Jika X adalah suatu matriks bertipe $(n\times p)$ dengan $X'X$ punya invers maka $(I - X(X'X)^{-1}X')$ ….
   A. simetri – idempoten
   B. tidak simetri – idempoten
   C. simetri – tidak idempoten
   D. tidak simetri – tidak idempoten

3) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ maka ….
   A. $AB = BA$
   B. $(AB)' = A' B'$
   C. $AB = I_2$
   D. $(AB)' = B'A'$

4) Matriks A yang memenuhi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = I_2$ adalah ….

   A. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5) Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar yang idempoten dan saling komutatif maka AB ….
A. tidak idempoten
B. idempoten
C. simetri
D. jawaban A, B, C tidak ada yang benar

6) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka $\underset{\sim}{x}' B \underset{\sim}{x} = \ldots.$
A. 11
B. 55
C. 44
D. 66

7) Jika A, B, $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$, seperti dalam nomor 6 maka $\underset{\sim}{x}\ A\ \underset{\sim}{y} = \ldots.$
A. 25
B. 43
C. 26
D. tidak dapat dihitung

8) Jika A, B, $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$, seperti dalam soal nomor 6, maka $A \,.\, B$ ….
A. idempoten
B. nilpoten
C. unipoten
D. jawaban A, B, C tidak ada yang benar

9) Jika $X'X = X$ maka ….
   A. $X = X'$
   B. $X = X^2$
   C. $X' = X^2$
   D. semua jawaban A, B dan C, benar

10) Jika A dan B simetri maka $A.B$ ….
   A. simetri
   B. simetri hanya jika A dan B saling komutatif
   C. komutatif
   D. semua jawaban A, B, dan C tidak ada yang benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D
2) C
3) A
4) D
5) D
6) C
7) A
8) A
9) B
10) A

Tes Formatif 2

1) A
2) C
3) C
4) A
5) D
6) C
7) D
8) A
9) B
10) A

Tes Formatif 3

1) B
2) A
3) D
4) C
5) B
6) B
7) D
8) D
9) D
10) B

Daftar Pustaka

Graybill, F.A. 1969. *Introduction to Matrices With Applications In Statistics*. California: Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont.

Searle, S.R. 1982. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York: John Wiley & Sons.