MODUL 1

Integral Fungsi Eksponen, Fungsi Trigonometri, Fungsi Logaritma

Dr. Subanar

PENDAHULUAN

Dalam mata kuliah Kalkulus I Anda telah mengenal bahwa integrasi adalah proses balikan dari diferensiasi. Jadi untuk mengintegralkan suatu fungsi kita harus sudah mengenal dengan baik cara-cara mencari derivatif suatu fungsi, khususnya rumus-rumus pokok diferensiasi. Modul ini akan membicarakan teknik pengintegralan fungsi eksponen, trigonometri dan pengintegralan menuju bentuk fungsi logaritma. Sehingga setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mencari integral:

a. fungsi eksponen;
b. fungsi trigonometri;
c. menuju bentuk fungsi logaritma;
d. fungsi eksponen, fungsi trigonometri, menuju bentuk fungsi logaritma dengan cara substitusi;
e. fungsi campuran.

KEGIATAN BELAJAR 1

Integral Fungsi Eksponen

Karena $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$ dan $\dfrac{da^x}{dx} = a^x$ ln a maka

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad \text{dan}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ 12}$$

Praktisnya:

$\int e^{g(x)} g'(x) \, dx$ dapat disederhanakan menjadi

$\int e^u \, du$ dengan substitusi

$$u = g(x), \; du = g'(x) \, dx$$

Contoh 1.1

a. Tentukan $\int 9e^{3x} \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 3x$, $du = 3 \, dx$

$$\int 9e^{3x} \, dx = 3\int e^u du = 3e^u + C = 3e^{3x} + C$$

Bila dari awal Anda sudah mengenal bahwa

$$3e^{3x} = \frac{de^{3x}}{dx}$$

maka Anda tidak perlu melakukan substitusi dan cukup menulis

$$\int 9e^{3x} \, dx = 3\int 3e^{3x} \, dx = 3e^{3x} + C$$

b. Tentukan $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sqrt{x}, du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int e^u \, du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Bila Anda mengenal bahwa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right)$$

maka Anda tidak perlu melakukan substitusi dan dapat mengintegralkannya secara langsung

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

c. Tentukan $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx$

Penyelesaian:

Kita dapat membawa integral ini dalam bentuk

$$\int \frac{du}{u}$$

dengan substitusi

$$u = e^{3x} + 1, du = 3e^{3x} \, dx$$

Maka

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+1\right) + C$$

d. Hitunglah $\displaystyle\int e^x \left(e^x + 1\right)^{\frac{1}{5}} dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = e^x + 1, du = e^x\, dx$

Sehingga $\int e^x \left(e^x + 1\right)^{\frac{1}{5}} dx = \int u^{\frac{1}{5}}\, \text{du} = \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{6}\left(e^x + 1\right)^{\frac{6}{5}} + C$

e. Hitunglah $\int 7^{6x}\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = 6x , maka du = 6 dx

Sehingga $\int 7^{6x}\, dx = \frac{1}{6}\int 7^u\, du$

$$= \frac{1}{6}\, \frac{7^u}{\ln 7} + C = \frac{7^{6x}}{6 \ln 7} + C$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Hitunglah

1) $\int e^{7x}\, dx$

2) $\int \frac{dx}{e^x}$

3) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

4) $\int x^3\, e^{x^4}\, dx$

5) $\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx$

6) $\int e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt$

7) $\int (x + 3) e^{\left(x^2 + 6x\right)}\, dx$

8) $\int 2^{5x}\, dx$

9) $\int \pi^{\sin x} \cos x \, dx$

10) $\int \left(3 - e^x\right) dx$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) misalkan $u = 7x$
2) misalkan $u = e^{-x}$
3) misalkan $u = \sin x$
4) misalkan $u = x^4$
5) misalkan $u = 1 + e^x$
6) misalkan $u = 1 + e^{2t}$
7) misalkan $u = x^2 + 6x$
8) misalkan $u = 5x$
9) misalkan $u = \sin x$
10) pisahkan menjadi $\int 3 \, dx - \int e^x \, dx$

RANGKUMAN

Untuk memecahkan integral fungsi eksponen Anda diharapkan dapat memilih substitusi yang tepat sehingga persoalan menjadi sederhana.

Rumus dasar yang ada pada bagian ini adalah:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

TES FORMATIF 1

Dalam soal-soal 1 - 10, carilah integral tak tentunya.

1) $\int 2^{-x}\ dx$

A. $-2^{-x}+C$

B. $\dfrac{2^{-x}}{ln 2}+C$

C. $-\dfrac{2^{-x}}{ln 2}+C$

D. $2^{-x}+C$

E. $\dfrac{2^{-x}}{2 ln 2}+C$

2) $\int x10^{-x^2}\ dx$

A. $2.10^{-x^2}+C$

B. $-\dfrac{1}{2}.\dfrac{10^{-x^2}}{ln10}+C$

C. $-2.\dfrac{10^{-x^2}}{ln10}+C$

D. $-2.10^{-x^2}+C$

E. $2.\dfrac{10^{-x^2}}{ln10}+C$

3) $\int e^{\text{cotg}\, x}\ \text{cosec}^2\ x\ dx$

A. $e^{\text{cotg}\, x}+C$

B. $-e^{\text{cotg}\, x}+C$

C. $e^{\text{cosec}\, x}+C$

D. $-e^{\text{cosec}\,x}+C$

E. $\frac{1}{2}e^{\text{cotg}\,x}+C$

4) $\int\left(1+e^{-x}\right)^2\,dx$

A. $\left(1+e^{-x}\right)+C$

B. $\frac{1}{3}\left(1+e^{-x}\right)^3+C$

C. $-\frac{1}{3}\left(1+e^{-x}\right)^3+C$

D. $1-e^{-x}+e^{-2x}+C$

E. $x-2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

5) $\int e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^2\,dx$

A. $\frac{1}{3}\left(1+e^{-x}\right)^3+C$

B. $3\left(1+e^{-x}\right)^3+C$

C. $-\frac{1}{3}\left(1+e^{-x}\right)^3+C$

D. $e^{-3x}+C$

E. $\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

6) $\int\left(2+e^{-x^2}\right)x\,e^{-x^2}\,dx$

A. $\left(2+e^{-x^2}\right)+C$

B. $\frac{1}{4}\left(2+e^{-x^2}\right)^2+C$

C. $\frac{1}{2}\left(2+e^{-x^2}\right)^2+C$

D. $-\frac{1}{4}\left(2+e^{-x^2}\right)^2+$

E. $\frac{1}{2}\left(2+e^{-x^2}\right)^2+C$

7) $\int e^{(x-2)/3}\ dx$

A. $3e^{(x-2)/3}+C$

B. $\frac{1}{3}e^{(x-2)/3}+C$

C. $-3e^{(x-2)/3}+C$

D. $-\frac{1}{3}e^{(x-2)/3}+C$

E. $\frac{2}{3}e^{(x-2)/3}+C$

8) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

A. $-e^{-\frac{1}{x}}+C$

B. $e^{-\frac{1}{x}}+C$

C. $-2e^{-\frac{1}{x}}+C$

D. $2e^{-\frac{1}{x}}+C$

E. $e^{-\frac{1}{x^2}}+C$

9) $\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}\ dx$

A. $-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$

B. $\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$

C. $e^{\frac{3}{x}}+C$

D. $-e^{\frac{3}{x}}+C$

E. $-\frac{1}{3}x\,e^{\frac{3}{x}}+C$

10) $\int x e^{x^2-3}\ dx$

A. $e^{x^2-3}+C$

B. $-2e^{x^2-3}+C$

C. $2e^{x^2-3}+C$

D. $\frac{1}{2}e^{x^2-3}+C$

E. $-\frac{1}{2}e^{x^2-3}+C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Integral Fungsi Trignometri

Dengan menggunakan rumus diferensiasi dasar, kita mempunyai

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \; dx = tg\; x + C$$

$$\int cosec^2 x \; dx = -cotg\; x + C$$

$$\int \sec x \;\; tg\;\; x \; dx = \sec x + C$$

$$\int cosec\, x \; cotg\; x \; dx = -cosec\, x + C$$

Contoh 1.2

a. Tentukan $\int \sin x \cos x \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$

Maka $\int \sin x \cos x \; dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

b. Tentukan $\int \sec^3 x \;\; tg\;\; x \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sec x\; dx$, $du = \sec x \;\; \text{tg}\; x\; dx$

Maka $\sec^3 x \;\; tg\; x \; dx = \underbrace{\sec^2 x}_{u^2} \underbrace{(\sec x \;\; tg\; x) dx}_{du} = u^2\, du$

dan $\int \sec^3 x \;\; tg\; x \; dx = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

Bila anti derivatif sudah jelas, maka kita tidak perlu membuat substitusi:

(1) $\int cos\ 3x\, dx = \frac{1}{3} sin\ 3x + C$

(2) $\int \sec^2 \frac{\pi}{2} x\ dx = \frac{2}{\pi} tg \frac{\pi}{2} x + C$

(3) $\int \sec(\pi - t)\ \ tg(\pi - t) dt = -\sec(\pi - t) + C$

Dengan sendirinya, kita dapat menurunkan hasil-hasil tersebut dengan substitusi.

Untuk (1) ambil

$$u = 3x\ ,\ du = 3\ dx$$

Maka

$$\int cos\ 3x\ \ dx = \frac{1}{3}\int cos\ \ u\ \ \ du = \frac{1}{3} sin\ \ u + C = \frac{1}{3} sin\ 3x + C$$

Untuk (2) ambil

$$u = \frac{\pi}{2} x, du = \frac{\pi}{2} dx$$

Maka

$$\int \sec^2 \frac{\pi}{2} x\ dx = \frac{2}{\pi}\int \sec^2\ u\ \ du = \frac{2}{\pi}\ tg\ u + C = \frac{2}{\pi}\ tg\ \ \frac{2}{\pi} x + C$$

Untuk (3) ambil

$$u = \pi - t\ ,\ du = -dt$$

Maka $\int \sec(\pi - t)\ \ tg(\pi - t) dt = -\int \sec\ u\ \ tg\, u\ \ \ du$

$$= -\sec\ u + C = -\sec(\pi - t) + C$$

c. Hitunglah $\int x \cos \pi x^2\ dx$

Penyelesaian:

Ambil $u = \pi x^2$, $du = 2\pi x\ dx$

$$\text{Maka } x \;\; cos \;\; \pi x^2 \, dx = \underbrace{cos \;\; \pi x^2}_{cos\ u} \; \underbrace{x\, dx}_{\frac{1}{2\pi} du} \; = \frac{1}{2\pi} \;\; cos \;\; u \;\; du$$

dan

$$\int x \; cos \; \pi x^2 \; dx = \frac{1}{2\pi} \int cos \;\; u \;\; du = \frac{1}{2\pi} sin \; u + C = \frac{1}{2\pi} sin \; \pi x^2 + C$$

d. Tentukan $\int x^2 \;\; \text{cosec}^2 \; x^3 \;\; \text{cotg}^4 \; x^3 \;\; dx$

Penyelesaian:

Bentuk di atas dapat disederhanakan dengan substitusi

$$u = x^3 \text{ , } du = 3x^2 \;\; dx$$

Maka

$$\begin{aligned} x^2 \, \text{cosec}^2 \; x^3 \, \text{cotg}^4 \; x^3 \;\; dx &= \underbrace{\text{cotg}^4 \; x^3}_{\text{cotg}^4 u} \; \underbrace{\text{cosec}^2 \; x^3}_{\text{cosec}^2 u} \; \underbrace{x^2 \, dx}_{\frac{1}{3} du} \\ &= \frac{1}{3} \text{cotg}^4 \, u \;\;\; \text{cosec}^2 \, u \;\;\; du \end{aligned}$$

dan

$$\int x^2 \;\; \text{cosec}^2 \; x^3 \;\; \text{cotg}^4 \; x^3 \;\; dx = \frac{1}{3} \int \text{cotg}^4 \, u \; \text{cosec}^2 \, u \;\; du$$

Kita dapat menghitung integral pada ruas kanan dengan memisalkan

$$t = \text{cotg } u \text{ , } dt = - \text{cosec}^2 \; u \; du$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \text{cotg}^4 \, u \;\;\; \text{cosec}^2 \, u \;\; du &= -\frac{1}{3} \int t^4 \;\; dt = -\frac{1}{15} t^5 + C \\ &= -\frac{1}{15} \text{cotg}^5 \, u + C \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\int x^2 \;\; \text{cosec}^2 \; x^3 \;\; \text{cotg}^4 \; x^3 \;\; dx = -\frac{1}{15} \text{cotg}^5 \, u + C = -\frac{1}{15} \text{cotg}^5 \; x^3 + C$$

Kita sampai pada hasil akhir ini dengan melakukan dua substitusi berturut-turut. Pertama kita misalkan $u = x^3$ dan kemudian t = cotg u. Sebenarnya kita dapat menghemat pekerjaan dengan memisalkan u = cotg x^3 dari awal. Dengan
$u = \text{cotg}\, x^3$, $du = -\text{cosec}^2\, x^3 \,.\, 3x^2\ dx$

Kita mendapatkan

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3 \operatorname{cotg}^4 x^3 \ dx = \underbrace{\operatorname{cotg}^4 x^3}_{u^4} \ \underbrace{\operatorname{cosec}^2 x^3\, x^2\, dx}_{-\frac{1}{3}du} = -\frac{1}{3}u^4\, du$$

dan

$$\int x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3 \operatorname{cotg}^4 x^3 \ dx = -\frac{1}{3}\int u^4\, du = -\frac{1}{15}u^5 + C$$
$$= -\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 x^3 + C$$

Catatan:
Semua integral yang kita hitung dengan substitusi di atas dapat dihitung tanpa substitusi. Semua yang diperlukan adalah pengertian yang baik tentang aturan rantai.

1. $\int \sin x \cos x \ dx$. Cosinus adalah turunan dari sinus.

Jadi $\int \sin x \cos x \ dx = \int \sin x \frac{d}{dx}(\sin x)dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

2. $\int \sec^3 x \ \ tg\ x \ \ dx$. Tulis integran sebagai

$$sec^2\, x(sec\, x \ \ tg\ x) = sec^2\, x \frac{d}{dx}(sec\, x)$$

Maka

$$\int \sec^3 x \ \ tg\ x \ \ dx = \int \sec^2 x \frac{d}{dx}(\sec x)dx = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

3. $\int x \cos \pi x^2\ dx$. Cosinus adalah turunan sinus. Akibatnya

$$\frac{d}{dx}\left(\sin \pi x^2\right) = \cos \pi x^2 \,.\, 2\pi x \ \text{ dan } \ x\cos \pi x^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\left(\sin \pi x^2\right)$$

Jadi

$$\int x\ cos\ \pi x^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d}{dx}\left(sin\ \pi x^2\right)dx = \frac{1}{2\pi} sin\ \pi x^2 + C$$

4. $\int x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3 \ \operatorname{cotg}^4 x^3 \ dx$. Integral ini kelihatannya sukar, tetapi kalau Anda bisa melihatnya dengan benar, bentuk tersebut menjadi sederhana. Anda telah mengetahui bahwa turunan cotangen adalah negatif cosecan kuadrat. Karena itu, dengan aturan rantai,

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cotg} x^3\right) = -\operatorname{cosec}^2 x^3 .3x^2$$

dan $x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3 = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cotg} x^3\right)$

Jadi

$$\int x^2 \operatorname{cosec}^2 x^3 \ \operatorname{cotg}^4 x^3 \ dx = -\frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^4 x^3 \ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{cotg} x^3\right) dx$$

$$= -\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 x^3 + C$$

Tidak ada yang salah dikatakan dengan perhitungan integral menggunakan substitusi. Semua yang dilakukan di sini adalah bahwa dengan pengalaman tertentu, Anda dapat menghitung banyak integral tanpa melakukan substitusi.

Kegiatan belajar ini kita tutup dengan memberikan dua rumus penting

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \quad \text{dan}$$

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Anda dapat menurunkan rumus ini dengan mengingat bahwa

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right) \ \text{dan} \ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dalam kegiatan belajar 2 Anda telah mengenal bahwa dengan memisalkan $u = \sin x$, diperoleh

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Hitunglah kembali integral di atas dengan memisalkan $u = \cos x$ dan kemudian cocokkan kedua jawaban tersebut.

2) Hitunglah

$$\int \sec^2 x \;\; tg\, x \;\; dx$$

(a) Dengan memisalkan $u = \sec x$
(b) Dengan memisalkan $u = \text{tg } x$
(c) Cocokkan jawab (a) dan (b)

Hitung!

3) $\int \cos^2 \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x \, dx$

4) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$

5) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + tg\, x}} \, dx$

6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx$

7) $\int \text{cosec}(1 - 2x) \, \text{cotg}(1 - 2x) \, dx$

8) $\int x^{-\frac{1}{2}} \sin x^{\frac{1}{2}} \, dx$

9) $\int \sqrt{1+\text{cotg}\, x}\ \text{cosec}^2\ x\, dx$

10) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$

Petunjuk Jawaban Latihan

3) misalkan $u = \frac{\pi}{2} x$
4) misalkan $u = ctg\ x$
5) misalkan $u = 1 + tg\ x$
6) misalkan $u = 1 + \cos^2 x$
7) ubah bentuk cosec $(1+2x)$ dan cotg $(1-2x)$ menjadi $\frac{1}{\sin(1-2x)}$ dan $\frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)}$
dan misalkan $u = \sin(1-2x)$
8) misalkan $u = x^{\frac{1}{2}}$
9) misalkan $u = 1 + ctg\ x$
10) misalkan $u = tg\ x$

RANGKUMAN

Pada kegiatan belajar ini terdapat rumus-rumus:

1. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
2. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
3. $\int \sec^2 x\ dx = tgx + C$
4. $\int \text{cosec}^2\ x\ dx = -\text{cotg}\, x + C$
5. $\int \sec x\ tg\ x\ dx = \sec x + C$
6. $\int \text{cosec}\, x\ \text{cotg}\, x\ dx = -\text{cosec}\, x + C$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk soal 1 sampai 10, carilah integral tak tentunya.

1) $\int \cos(3x-1)\, dx$

   A. $3\sin(3x-1)+C$

   B. $\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

   C. $-3\sin(3x-1)+C$

   D. $-\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

   E. $\sin(3x-1)+C$

2) $\int \sin 2\pi x\, dx$

   A. $-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+C$

   B. $-2\pi\cos 2\pi x+C$

   C. $\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+C$

   D. $2\pi\cos 2\pi x+C$

   E. $\cos 2\pi x+C$

3) $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

   A. $5\sin^5 x+C$

   B. $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

   C. $-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

D. $\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

E. $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

4) $\int x \sec^2 x^2 \, dx$

A. $2\,tg\, x + C$

B. $2\,tg^2\, x + C$

C. $2\,tg\, x^2 + C$

D. $\frac{1}{2}tg\, x^2 + C$

E. $\frac{1}{2}tg^2\, x + C$

5) $\int \sqrt{1+\sin x}\, \cos x \, dx$

A. $\frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} \cos x + C$

B. $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C$

C. $\frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

D. $\frac{3}{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

E. $-\frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

6) $\int x \sin^3 x^2 \cos x^2 \, dx$

A. $\frac{1}{8}\sin^4 x^2 + C$

B. $-\frac{1}{8}\sin^4 x^2 + C$

C. $\frac{1}{4}\sin^4 x^2 + C$

D. $-\frac{1}{4}\sin^4 x^2 + C$

E. $\frac{1}{8}\sin^4 x^2 \cos x^2 + C$

7) $\int \cos^2 5x \, dx$

A. $\frac{x}{5} + \frac{1}{10}\sin 10x + C$

B. $\frac{x}{2} + \frac{1}{20}\sin 10x + C$

C. $\frac{x}{10} + \frac{1}{20}\sin 10x + C$

D. $\frac{x}{10} + \frac{1}{10}\sin 10x + C$

E. $\frac{x}{10} + \frac{1}{5}\sin 10x + C$

8) $\int \sin^2 3x \, dx$

A. $\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\sin 6x + C$

B. $\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\sin 6x + C$

C. $\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\sin 6x + C$

D. $\frac{x}{3} + \frac{1}{12}\sin 16x + C$

E. $\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x + C$

9) $\int x^2 \sin\left(4x^3 - 7\right)\, dx$

A. $\frac{1}{3}\cos\left(4x^3 - 7\right) + C$

B. $-\frac{1}{4}\cos\left(4x^3 - 7\right) + C$

C. $\frac{1}{4}\cos\left(4x^3 - 7\right) + C$

D. $-\frac{1}{12}\cos\left(4x^3 - 7\right) + C$

E. $\frac{1}{12}\cos\left(4x^3 - 7\right) + C$

10) $\int \sin(3 - 2x)\, dx$

A. $-\frac{1}{2}\cos(3 - 2x) + C$

B. $\frac{1}{2}\cos(3 - 2x) + C$

C. $2\cos(3 - 2x) + C$

D. $-2\cos(3 - 2x) + C$

E. $\frac{2}{3}\cos(3 - 2x) + C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Integral dengan Hasil Berbentuk Fungsi Invers Trigonometri

Dalam modul Kalkulus I Anda telah mengenal fungsi-fungsi invers trigonometri sebagai berikut:

y = arc sin $x \Leftrightarrow x$ = sin y $\quad x \in [-1,1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

y = arc cos $x \Leftrightarrow x$ = cos y $\quad x \in [-1,1], y \in [0,\pi]$

dan $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

y = arc tg $x \Leftrightarrow x$ = tg y $\quad x \in [-\infty,\infty], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

y = arc cotg $x \Leftrightarrow x$ = cotg y $\quad x \in [-\infty,\infty], y \in [0,\pi]$

dan $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

y = arc sec $x \Leftrightarrow x$ = sec y $\quad |x| \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ bila $x \geq 1$

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2}-1}$ $\quad$ dan $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ bila $x \leq -1$

y = arc cosec $x \Leftrightarrow x$ = cosec y $\quad |x| \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ bila $x \geq 1$

dan $\frac{dy}{dx} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2}-1}$ $\quad$ dan $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ bila $x \leq -1$

Dari hasil di atas kita dapatkan integral-integral di bawah ini

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + C$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos } x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C$$

$$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc cotg } x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec } x + C$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc cosec } x + C$$

Perluasan bentuk integral di atas adalah sebagai berikut

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\frac{x}{a} + C$$

Dari $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

Misalkan $u = \frac{x}{a}$ maka $du = \frac{dx}{a}$. Sehingga,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sin}\,u + C = \text{arc sin}\frac{x}{a} + C$$

Dengan cara yang sama, akan di dapat bentuk-bentuk integral berikut ini:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc cos}\frac{x}{a} + C \quad \text{atau}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\text{arc cos}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arc tg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arc cotg}\frac{x}{a} + C \quad \text{atau}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{1}{a}\text{arc cotg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc cosec}\frac{x}{a} + C \quad \text{atau}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\text{arc cosec}\frac{x}{a} + C$$

Contoh 1.3

a. Hitunglah $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x$, maka $du = 2\ dx$. Sehingga

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\text{arc sin}\, u + C = \frac{1}{2}\text{arc sin}\, 2x + C$$

b. Hitunglah $\int \frac{dx}{9+x^2}$

Penyelesaian:

Kita tulis

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{9\left[1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

Dengan substitusi $u = \frac{x}{3}, du = \frac{1}{3}dx$, kita mendapat

$$\frac{1}{9}\int \frac{3du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\text{arc tg}\, u + C = \frac{1}{3}\text{arc tg}\frac{x}{3} + C$$

c. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^3$, didapat $du = 3x^2\,dx$, sehingga

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{\frac{1}{3}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\text{arc sin}\, u + C = \frac{1}{3}\text{arc sin}\, x^3 + C$$

d. $\int \frac{dx}{9x^2+16}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 3x$, didapat $du = 3\,dx$ atau $dx = \frac{1}{3}du$. Sehingga

$$\int \frac{dx}{9x^2+16} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+4^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}\text{ arc tg}\frac{u}{4} + C = \frac{1}{12}\text{ arc tg}\frac{3x}{4} + C$$

e. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

Misalkan $u = x + 1$, maka $du = dx$. Sehingga

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x+1}{2} + C$$

f. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x$, maka $du = 2\,dx$ atau $dx = \frac{1}{2}\,du$.

Sehingga, $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2-3^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-3^2}}$

$$= \frac{1}{3}\text{ arc sec}\frac{u}{3} + C \quad = \frac{1}{3}\text{ arc sec}\frac{2x}{3} + C$$

g. Hitunglah $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-4}}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = e^{2x}$, maka $du = 2e^{2x}\,dx$ atau $dx = \frac{1}{2e^{2x}}du = \frac{1}{2u}du$

Sehingga,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-4}} = \frac{1}{4}\text{arcsec}\frac{u}{2} + C = \frac{1}{4}\text{arcsec}\frac{e^{2x}}{2} + C$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Hitunglah integral-integral di bawah ini.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

2) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

5) $\int \frac{dx}{1+7x^2}$

6) $\int \frac{dx}{16+9x^2}$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-5x^2}}$

9) $\int \frac{x+1}{4+x^2}\ dx$

10) $\int \frac{(2x-3)}{\sqrt{1-4x^2}}\ dx$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) misalkan $u = 4x$
2) misalkan $u = 5x$
3) misalkan $u = 3x$
4) misalkan $u = \frac{4}{3}x$
5) misalkan $u = x\sqrt{7}$

6) ubah menjadi $\frac{1}{16}\int \frac{dx}{1+\frac{9}{16}x^2}$ dan misalkan $u = \frac{3}{4}x$

7) ubah menjadi $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$ dan misalkan $u = \frac{x}{2}$

8) ubah menjadi $\frac{1}{12}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{12}x^2}}$ dan misalkan $u = x\sqrt{\frac{5}{12}}$

9) ubah menjadi $\frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{1+\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}$ dan ikuti pola-pola sebelumnya.

10) uraikan menjadi $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} - \int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ dan ikuti pola-pola sebelumnya.

RANGKUMAN

Pada kegiatan belajar ini terdapat enam bentuk integral dasar. Dengan melihat contoh-contoh dan setelah mengerjakan soal latihan dapat ditarik kesimpulan bahwa Anda harus jeli memilih substitusi.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk soal 1 sampai 10, carilah integral tak tentunya.

1) $\int \frac{dx}{7+\frac{x^2}{9}}$

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{3}{\sqrt{7}}\ x + C$

B. $3\sqrt{7}\ \mathrm{arc\,tg}\, 3\sqrt{7}\ x + C$

C. $3\sqrt{7}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{3\sqrt{7}}\ x + C$

D. $\frac{3}{\sqrt{7}}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{3\sqrt{7}}\ x + C$

E. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{7}} + C$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-10}}$

A. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

B. $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

C. $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{\sqrt{10}} + C$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

E. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$

A. $\frac{1}{4} \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{2} + C$

B. $\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{2} + C$

C. $2 \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{2} + C$

D. $4 \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{2} + C$

E. $\frac{1}{4} \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{4} + C$

4) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(x+2) + C$

B. $\operatorname{arc\,tg}(x+2) + C$

C. $\operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$

D. $2\ \text{arc}\,\text{tg}\left(x+2\right)+C$

E. $\frac{1}{2}\ \text{arc}\,\text{tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

5) $\int \frac{x\,dx}{x^4+4}$

A. $\frac{1}{4}\text{arc}\,\text{tg}\frac{x^2}{2}+C$

B. $\frac{1}{2}\text{arc}\,\text{tg}\frac{x^2}{2}+C$

C. $\text{arc}\,\text{tg}\frac{x^2}{4}+C$

D. $\frac{1}{4}\ \text{arc}\,\text{tg}\frac{x^2}{4}+C$

E. $2\ \text{arc}\,\text{tg}\frac{x^2}{2}+C$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} Z$

A. $2\ \text{arc}\sin\left(1-2x\right)+C$

B. $\frac{1}{2}\ \text{arc}\sin\left(1-2x\right)+C$

C. $-\text{arc}\sin\left(1-2x\right)+C$

D. $\frac{1}{4}\ \text{arc}\sin\left(1-2x\right)+C$

E. $\frac{1}{2}\ \text{arc}\sin\left(1-x\right)+C$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

A. $\text{arc}\sin\left(x-3\right)+C$

B. $\text{arc}\sin\left(x-2\right)+C$

C. $\text{arc}\sin\left(x-4\right)+C$

D. $\arcsin \dfrac{x-1}{2} + C$

E. $\arcsin \dfrac{x-2}{2} + C$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

A. $\operatorname{arcsec} x + C$

B. $\arcsin \sqrt{x} + C$

C. $\dfrac{1}{2} \arcsin \sqrt{x} + C$

D. $\dfrac{1}{2} \operatorname{arcsec} \sqrt{x} + C$

E. $2 \operatorname{arcsec} \sqrt{x} + C$

9) $\displaystyle\int \frac{2\sec^2 x \; dx}{\sqrt{1-4\operatorname{tg}^2 x}}$

A. $\arcsin \operatorname{tg} x + C$

B. $\arcsin 2\operatorname{tg} x + C$

C. $2\arcsin \operatorname{tg} x + C$

D. $2\arcsin \operatorname{tg} 2x + C$

E. $2\arcsin 2\operatorname{tg} x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{\cos x \; dx}{\sin^2 x + 4}$

A. $\dfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) + C$

B. $2 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) + C$

C. $\dfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(\sin x) + C$

D. $2 \operatorname{arc\,tg}(\sin x) + C$

E. $\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 4. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 4

Integral Menuju Bentuk Fungsi Logaritma

Dalam kegiatan belajar ini Anda akan mempelajari integral yang mempunyai bentuk

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$
3. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

Rumus-rumus dasar yang bersesuaian dengan integral di atas adalah sebagai berikut.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$
3. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$

Rumus-rumus di atas dengan mudah dapat dibuktikan dengan menderivatifkan rumus sebelah kanan. Di sini akan diilustrasikan untuk rumus 1.

Kita mempunyai:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}.\,2x\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\ \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Contoh 1.4

a. Hitunglah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$

Misalkan $u = x + 1$, maka $du = dx$. Sehingga

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}}=\ln\left(u+\sqrt{u^2+2}\right)+C$$

$$=\ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}\right)+C$$

$$=\ln\left((x+1)+\sqrt{x^2+2x+3}\right)+C$$

b. Hitunglah $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

Misalkan $u = x + 2$, maka $du = dx$, sehingga

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$$

c. Hitunglah $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$$

Misalkan $u = 2x$, maka $dx = \frac{1}{2}\ du$, sehingga

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-3^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+3^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\ 2x+\sqrt{4x^2+9}\right| + C$$

d. Hitunglah $\int \frac{dx}{3-2x^2}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x\sqrt{2}$, maka $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du$, sehingga

$$\int \frac{dx}{3-2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - u^2} \qquad = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right| + C$$

e. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}}\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = e^{2x}$, maka $dx = 2e^{2x}\ du$, sehingga

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-9}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-9}\right| + C$$

Lanjutan integrasi fungsi trigonometri

Sekarang kita dapat menambah empat rumus integral fungsi trigonometri yang menuju bentuk fungsi trigonometri.

1. $\int \text{tg}\, x\ dx = \ln\left|\sec x\right| + C$
2. $\int \text{cotg}\, x\ dx = \ln\left|\sin x\right| + C$
3. $\int \sec x\ dx = \ln\left|\sec x + \text{tg}\, x\right| + C$
4. $\int \text{cosec}\, x\ dx = \ln\left|\text{cosec}\, x - \text{cotg}\, x\right| + C$

Rumus-rumus di atas dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\int \text{tg}\, x\ dx = \int \frac{\text{sinn}\, x}{\text{cosn}\, x}\ dx$$

Misalkan u = cos x, maka du = –sin x dx.

Sehingga,

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|\, u\,| + C$$

$$= -\ln|\cos x\,| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x\,| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$$

Misalkan $u = \sin x$, maka $du = \cos x\ dx$.
Sehingga,

$$\int \operatorname{cotg} x\ dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\, u\,| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

3. $$\int \sec x\ dx = \int \sec x\ \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\ \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\ dx$$

Misalkan u = sec$x$ + tg x, maka $du = \left(\sec x\ \operatorname{tg}\ x + \sec^2 x\right)\ dx$

Sehingga,

$$\int \sec x\ dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\, u\,| + C \quad = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x\,| + C$$

Rumus 4 harap Anda buktikan sendiri.

Contoh 1.4

a. Hitunglah $\int \operatorname{cotg} \pi x\ dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \pi x$, $du = \pi\ dx$. Sehingga

$$\int \text{cotg}\, \pi x \; dx = \frac{1}{\pi} \int \text{cotg}\, u \; du = \frac{1}{\pi} \ln \left| \sin u \right| + C$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \left| \sin \pi x \right| + C$$

b. Hitunglah $\int \sec 2x \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x$, $du = 2\; dx$. Sehingga

$$\int \sec 2x \; dx = \frac{1}{2} \int \sec u \; du = \frac{1}{2} \ln \left| \sec u + \text{tg } u \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \sec 2x + \text{tg } 2x \right| + C$$

c. $\int \frac{\cos 3x}{2 + \sin 3x} \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2 + \sin 3x$, $du = 3 \cos 3x \; dx$.

Sehingga,

$$\int \frac{\cos 3x}{2 + \sin 3x} \; dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln \left| u \right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| 2 + \sin 3x \right| + C$$

d. Hitunglah $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \text{tg}\, x} \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 1 + \text{tg}\; x$, maka $du = \sec^2 x \; dx$. Sehingga

$$\int \frac{\sec^2 x}{1 + \text{tg}\, x} \; dx = \ln \left| \left(1 + \text{tg}\, x \right) \right| + C$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Carilah integral di bawah ini

1) $\int \frac{dx}{9-16x^2}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-25}$

3) $\int \frac{dx}{25x^2-17}$

4) $\int \frac{dx}{10+3x-x^2}$

5) $\int \frac{dx}{x^2}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+1}}$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-1}}$

11) $\int \text{tg} \quad 3x\ dx$

12) $\int \sec \frac{1}{2} \ \pi\, x\ dx$

13) $\int \text{cosec} \ \ \pi\, x\ dx$

14) $\int \text{cotg}\ (\pi - x)\ \ dx$

15) $\int e^{x}\ \text{cotg}\ e^{x}\ dx$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) uraikan menjadi $\int \frac{dx}{(3+4x)(3-4x)}$ dan misalkan $u=4x$
2) ………………………………..
3) uraikan menjadi $\int \frac{dx}{\left(5x-\sqrt{17}\right)\left(5x+\sqrt{17}\right)}$ dan misalkan $u=5x$
4) uraikan menjadi $\int \frac{dx}{(5-x)(2+x)}$
5) uraikan menjadi $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$
6) misalkan $u=5x$
7) ….
8) ….
9) misalkan $u=2x$
10) misalkan $u=5x$
11) ubah menjadi $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\cos 3x}$ dan misalkan $u=\cos 3x$
12) lihat rumus 3 dihalaman 131
13) lihat rumus 4 dihalaman 131
14) ubah menjadi $\int \frac{\cos(\Pi - x)}{\sin(\Pi - x)}\ dx$ dan misalkan $u=\sin(\Pi - x)$
15) misalkan $u=e^{x}$ dan lihat latihan no. 14).

RANGKUMAN

Rumus-rumus yang harus Anda ingat dalam bab ini adalah:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x+\sqrt{x^2+a^2} \right| + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x+\sqrt{x^2-a^2} \right| + C$
3. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
5. $\int \operatorname{tg} x \; dx = \ln \left| \sec x \right| + C$
6. $\int \operatorname{cotg} x \; dx = \ln \left| \sin x \right| + C$
7. $\int \sec x \; dx = \ln \left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| + C$
8. $\int \operatorname{cosec} x \; dx = \ln \left| \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x \right| + C$

TES FORMATIF 4

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk soal 1 sampai 10, carilah integral tak tentunya.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+26}}$

A. $\ln \left| (3x+1)+\sqrt{9x^2+6x+26} \right| + C$

B. $\frac{1}{3} \ln \left| (3x+1)+\sqrt{9x^2+6x+26} \right| + C$

C. $3\ \ln\left|(3x+1)+\sqrt{9x^2+6x+26}\right|+C$

D. $\frac{1}{5}\ln\left|(3x+1)+\sqrt{9x^2+6x+26}\right|+C$

E. $5\ \ln\left|(3x+1)+\sqrt{9x^2+6x+26}\right|+C$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

A. $\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$

B. $\frac{1}{2}\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$

C. $2\ \ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$

D. $\ln\left|(x-1)-\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$

E. $\frac{1}{2}\ \ln\left|(x-1)-\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$

3) $\int\frac{x\ dx}{x^4-36}$

A. $\frac{1}{12}\ \ln\left|\frac{x^2-6}{x^2+6}\right|+C$

B. $\frac{1}{6}\ \ln\left|\frac{x^2-6}{x^2+6}\right|+C$

C. $\frac{1}{24}\ \ln\left|\frac{x^2-6}{x^2+6}\right|+C$

D. $\frac{1}{12}\ \ln\left|\frac{x^2+6}{x^2-6}\right|+C$

E. $\frac{1}{24}\ \ln\left|\frac{x^2+6}{x^2-6}\right|+C$

4) $\int \frac{x\ dx}{81-6x^2}$

A. $\frac{1}{9}\ \ln\left|\frac{\sqrt{6}x+9}{\sqrt{6}x-9}\right|+C$

B. $\ln\left|\frac{\sqrt{6}x+9}{\sqrt{6}x-9}\right|+C$

C. $\frac{1}{18\sqrt{6}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{6}x+9}{\sqrt{6}x-9}\right|+C$

D. $\frac{1}{9\sqrt{6}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{6}x-9}{\sqrt{6x}+9}\right|+C$

E. $\frac{1}{9}\ \ln\left|\frac{\sqrt{6}x-9}{\sqrt{6}x+9}\right|+C$

5.) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+17}}$

A. $\ln\left|(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+17}\ \right|+C$

B. $2\ \ln\left|(2x+1)+\sqrt{4x^2-4x+17}\ \right|+C$

C. $2\ \ln\left|(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+17}\ \right|+C$

D. $\frac{1}{2}\ \ln\left|(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+17}\ \right|+C$

E. $\frac{1}{2}\ \ln\left|(2x+1)+\sqrt{4x^2-4x+17}\ \right|+C$

6) $\int \frac{\mathrm{cosec}^2\ x}{2+\mathrm{cotg}\ x}\ dx$

A. $\ln\ \mathrm{cotg}\ x+C$

B. $-\ln\ \mathrm{cotg}\ x+C$

C. $\ln\ (2+\mathrm{cotg}\ x)+C$

D. $-\ln\ (2+\mathrm{cotg}\ x)+C$

E. $2\ \ln\ (2+\mathrm{cotg}\ x)+C$

7) $\int \frac{\sin\ 2x}{3-2\cos 2\ x}\ dx$

A. $-\ln\left(3-2\ \cos\ 2x\right)+\ C$

B. $\frac{1}{2}\ln\left(3-2\ \cos\ 2x\right)+\ C$

C. $-\frac{1}{2}\ln\left(3-2\ \cos\ 2x\right)+\ C$

D. $-\frac{1}{4}\ln\left(3-2\ \cos\ 2x\right)+\ C$

E. $\frac{1}{4}\ln\left(3-2\ \cos\ 2x\right)+\ C$

8) $\int x\ \text{secn}\, x^2\ \ dx$

A. $\frac{1}{2}\ \ln\ \left|\sec x^2\ +\text{tg}\ x^2\right|+C$

B. $\ln\left|\sec x^2\ +\text{tg}\ x^2\right|+\ C$

C. $3\ \ln\left|\sec x^2\ +\text{tg}\ x^2\right|\ +\ C$

D. $\frac{1}{3}\ \ln\left|\sec x^2\ +\text{tg}\ x^2\right|+C$

E. $2\ \ln\left|\sec x^2\ +\text{tg}\ x^2\right|+\ C$

9) $\int \frac{\sec e^{-x}}{e^x} dx$

A. $\ln\left|\ \sec\ e^x+\text{tg}\, e^x\right|+C$

B. $2\ \ln\left|\ \sec\ e^x+\text{tg}\, e^x\right|+C$

C. $\ln\left|\ \sec\ e^{-x}+\text{tg}\, e^{-x}\right|+C$

D. $\text{-}\ln\left|\ \sec\ e^{-x}+\text{tg}\, e^{-x}\right|+C$

E. $2\ \ln\left|\ \sec\ e^{-x}+\text{tg}\, e^{-x}\right|+C$

10) $\int \frac{\text{tg}(\ln x)}{x}\,dx$

A. $\ln\left|\sec(\ln x)\right| + C$

B. $-\ln\left|\sec(\ln x)\right| + C$

C. $\ln\left|\text{cosec}\ (\ln x)\right| + C$

D. $-\ln\left|\text{cosec}\ (\ln x)\right| + C$

E. $\ln\left|\cos\ (\ln x)\right| + C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 4.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) C
2) B
3) B
4) E
5) C
6) D
7) A
8) B
9) A
10) D

Tes Formatif 2
1) B
2) A
3) E
4) D
5) C
6) A
7) B
8) E
9) D
10) B

Tes Formatif 1
1) D
2) B
3) A
4) C
5) A
6) C
7) B
8) E
9) B
10) A

Tes Formatif 2
1) A
2) A
3) C
4) C
5) D
6) D
7) E
8) A
9) D
10) A

Daftar Pustaka

Piskunov, N. (1972). *Differential And Integral Calculus*. Vol.1. MIR Publisher.

Salas, S.L. & Hille E. (1990). *Calculus, 6th edition*. John Wiley and Sons