MODUL 1

Pengenalan Pemodelan

Dr. Rustanto Rahardi, M.Si.

PENDAHULUAN

Materi Modul 1 ini secara umum mengenalkan tentang makna model dan secara khusus mengenalkan tentang makna model matematika. Makna tersebut memberikan rincian tentang klasifikasi pembentukan model dan memberikan mekanisme pembentukan model secara umum. Metode dasar dalam proses penentuan model matematika disebut dengan **pemodelan matematika**. Sebagai kajian awal menyederhanakan model secara umum sebagai kajian tentang pembentukan model matematika sederhana. Agar kajian ini mudah dipahami, maka pada setiap kegiatan belajar dalam modul ini dilengkapi dengan contoh-contoh sederhana, latihan, rangkuman di akhir materi, dan tes formatif untuk mengetahui tingkat ketuntasan mempelajari modul ini. Petunjuk penyelesaian setiap latihan diberikan agar Anda dapat membandingkan hasil pekerjaan Anda. Setiap tes formatif diberikan kuncinya di akhir modul.

Manfaat dan relevansi

Banyak permasalahan di dunia ini yang memerlukan bantuan matematika sebagai upaya menyelesaikan masalahnya. Kadang-kadang penyelesaiannya memerlukan penyederhanaan masalahnya dalam bentuk model matematika. Memodelkan secara tepat itulah yang mempunyai manfaat bagi kita untuk menyelesaikan permasalahan yang dimodelkan. Sehubungan dengan itu, maka Anda perlu memahami langkah-langkah dan membuat model matematika yang relevan dengan permasalahannya.

Deskripsi/Cakupan materi modul

Materi akan diawali dengan bahasan secara umum tentang model dan secara khusus tentang model matematika. Selanjutnya akan dibahas tentang klasifikasi pembentukan model. Pembahasan itu diperlukan untuk menentukan langkah-langkah pembentukan model secara umum. Sebagai pengenalan Anda akan diajak untuk menentukan model matematika secara sederhana.

Menggunakan gagasan Newton yang dituangkan dalam hukumnya, modul ini akan memberikan langkah-langkah membangun model. Model yang diperoleh dalam bentuk persamaan diferensial orde satu. Penyelesaian persamaan ini sebagai bahan untuk menganalisis dan melihat perilaku yang dimodelkan.

Kompetensi Umum

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda mampu membuat model matematika sederhana dan menjelaskan perilaku yang dimodelkan berdasarkan karakteristik model atau penyelesaian modelnya.

Kompetensi Khusus:

1. Menjelaskan makna dari model matematika.
2. Menjelaskan tahapan pemodelan matematika dari masalah sederhana.
3. Menentukan klasifikasi model berdasarkan keterkaitannya dengan waktu.
4. Menentukan klasifikasi model berdasarkan sifat keluarannya.
5. Menentukan model matematika dari suatu permasalahan sederhana.
6. Menjelaskan alasan menggunakan model matematika dari suatu gejala alam.
7. Menjelaskan faktor-faktor yang mempengaruhi suatu model.
8. Menentukan model sederhana dengan menggunakan Hukum Newton.
9. Menentukan fenomena objek berdasarkan sifat solusi modelnya.

Susunan Kegiatan Belajar (KB)

1. Kegiatan Belajar 1: Pengenalan Model.
2. Kegiatan Belajar 2: Pemodelan dalam Persamaan Diferensial.

Petunjuk Cara Belajar

Bacalah modul ini dengan cermat mulai dari kegiatan belajar satu hingga berikutnya. Sebelum mempelajari kegiatan belajar berikutnya tuntaskan dulu pemahaman anda tentang materi kegiatan belajar yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal hingga tes formatif sampai benar-benar paham dengan mencocokkan rambu-rambu jawaban yang ada pada setiap akhir modul, kemudian pastikan 80% jawaban Anda benar.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengenalan Model

A. PENGANTAR

Bagian tersulit menggunakan matematika untuk mempelajari aplikasi adalah terjemahan dari kehidupan nyata ke dalam formalisme matematika. Terjemahan ini biasanya sulit karena melibatkan konversi asumsi tidak tepat menjadi formula yang tepat. KB 1 ini akan mengawali membahas makna dari model dan model matematika. Pembahasan dilanjutkan dengan uraian tentang manfaat model, klasifikasi model, langkah-langkah pembentukan model secara umum, dan pembentukan model matematika sederhana. Anda akan diajak untuk mencermati suatu permasalahan sederhana kemudian menentukan modelnya, serta menentukan perilaku selanjutnya dari benda yang dimodelkan. Model dapat berupa bangun geometri bidang datar maupun bangun geometri ruang serta dapat berupa persamaan atau pertidaksamaan yang memuat variabel-variabel.

B. URAIAN MATERI DAN CONTOH

1. Makna Model

Sering kata model terdengar di telinga kita, sering pula muncul dalam suatu kalimat. Misalnya, model rumah, model pakaian, model sepatu, model pergerakan angin, pergerakan janin di dalam perut, pergerakan jantung, suhu badan, dan lain-lain. **Secara umum model** mengandung makna sebagai perwakilan dari benda sesungguhnya, contoh, bentuk gambar suatu benda, atau miniatur. Ada keselarasan antara benda sesungguhnya dengan model yang memerankannya. Model-model secara umum itu memudahkan untuk menangkap bentuk atau fenomena dari sesuatu yang telah dimodelkan.

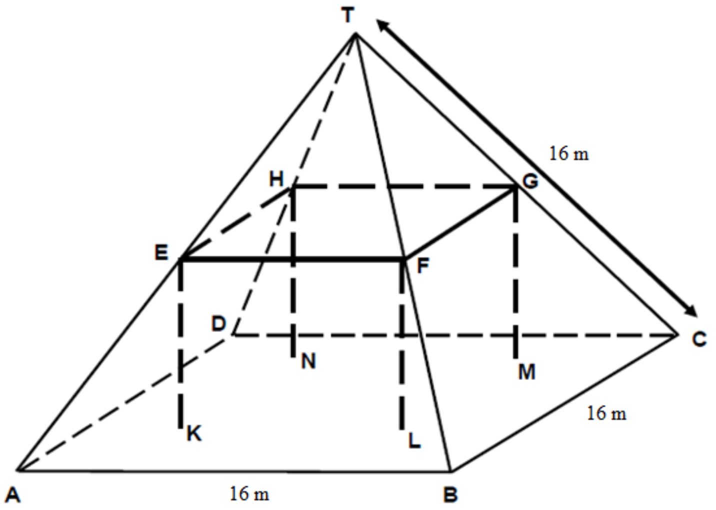
2. Model Matematika

Suatu permasalahan nyata umumnya dapat disederhanakan menjadi suatu model. Model dapat berupa sketsa gambar bangun-bangun geometri bidang datar maupun ruang. Kadang-kadang juga dapat berbentuk persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan, atau lainnya walaupun tidak mudah mewujudkannya. Bentuk-bentuk itu memuat suatu besaran atau variabel atau lambang yang menggunakan prinsip operasi seperti tambah, kurang, kali, atau bagi. Keterkaitan bentuk-bentuk dan prinsip operasi yang digunakan harus diuji kesesuaiannya dengan masalah nyata yang dihadapi. Apabila telah diperoleh kesesuaian dengan perilaku benda nyatanya maka bentuk yang memuat variabel-variabel merupakan model matematikanya. Penyelesaian dari model matematika inilah yang dapat memudahkan untuk mengamati fenomena-fenomena atau gejala-gejala yang diakibatkan oleh sesuatu yang dimodelkan.

Sebagai contoh seorang guru ingin mengajak peserta didiknya belajar matematika ruang dimensi dua dan tiga. Agar peserta didiknya tidak alergi terhadap matematika, maka guru mengajak peserta didiknya untuk mengamati model gambar rumah berikut ini.

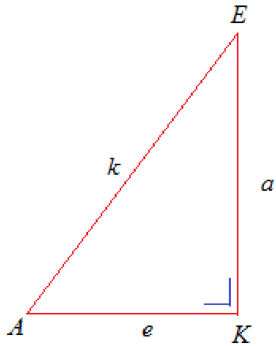
Gambar 1.1
Rumah loteng untuk diamati peserta didik

Guru mengajak peserta didik untuk membuat perencanaan memborong bagian loteng rumah yang memiliki bentuk sebagaimana dalam gambar. Setelah berdiskusi panjang lebar kemudian guru memberikan model sederhana rangka loteng tersebut ke dalam bangun geometri ruang sebagaimana Gambar 1.2. Sekarang mulai nampak bahwa permasalahan memborong lantai loteng sebagai permasalahan matematika.



Gambar 1.2
Model rangka loteng rumah

Berdasarkan model rangka inilah guru beserta peserta didiknya melakukan perhitungan-perhitungan tertentu. Tentu saja ada unsur matematikanya yang menjadi tujuan utama pembelajaran. Perlu ditegaskan bahwa, ukuran rumah dan modelnya tidaklah sama persis, tetapi ada keselarasan. Sebagai contoh untuk membuat tiang *KE*, *LF*, *MG*, dan *NH* maka perlu dihitung tingginya. Menghitung tinggi itu memerlukan konsep *Pythagoras* melalui salah satu model segitiga siku-siku *AKE*.



Gambar 1.3
Segitiga siku-siku *AKE* dengan panjang sisi masing-masing *a*, *e*, dan *k*

Pythagoras memberikan hubungan

$$a^2 + e^2 = k^2 \qquad (1.1)$$

Persamaan (1.1) dikenal sebagai model matematika untuk menyelesaikan masalah tentang tinggi tiang *KE*. Model matematika tersebut memuat tiga variabel *a*, *e*, dan *k*. Nampak ada keterkaitan antara permasalahan matematika dengan besaran atau variabel. Pak guru tersebut menyelesaikan masalah dengan membuat miniatur dari lantai loteng kemudian menyederhanakan lagi dalam bentuk model matematika. Model matematika inilah yang memudahkan untuk menghitung tinggi tiang *KE*.

Kadang-kadang juga ada permasalahan di dunia nyata yang fenomenanya dapat diamati melalui model matematika. Hasil fenomenanya tergantung dari waktu atau besaran-besaran tertentu yang mempengaruhinya. Sebagai contoh peramalan cuaca adalah menggunakan data cuaca sebelumnya, diantaranya besaran kelembaban udara. Jadi dapat dikatakan bahwa **model matematika mempunyai makna** suatu konstruksi matematis yang didesain untuk menyelesaikan masalah atau mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata. Kegunaan yang dapat diperoleh dari model matematika antara lain:

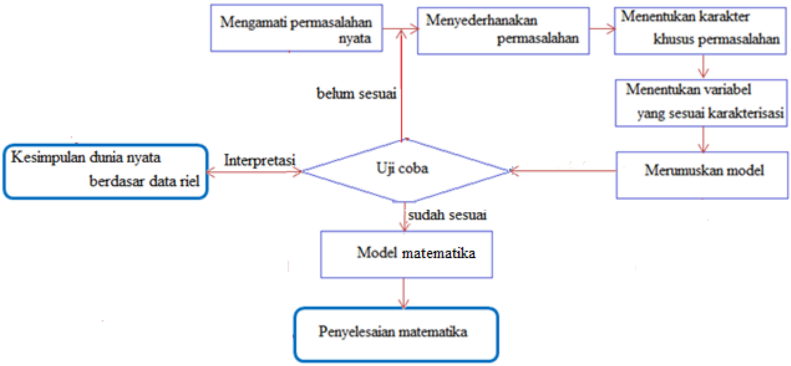
a. permasalahan menjadi sederhana,
b. menyelesaikan permasalahan menjadi lebih sederhana karena didasarkan dari model matematikanya,

c. mendeskripsikan perilaku yang dimodelkan berdasarkan model matematikanya atau penyelesaian modelnya, dan
d. sebagai dasar perencanaan atau bahan dalam mengambil keputusan, dan lain-lain.

Tidak semua permasalahan nyata penyelesaiannya disederhanakan dalam bentuk persamaan matematika atau pertidaksamaan matematika atau lainnya, akan tetapi dapat juga berupa sekumpulan data kemudian dianalisis perilaku data-data yang diperoleh untuk dijadikan bahan menarik kesimpulan. Oleh karena itu untuk model matematika mempunyai berbagai macam bentuk tergantung **cara memperolehnya**, **tergantung pada variabel waktu**, dan **tergantung pada sifat keluarannya**. Model berdasarkan cara memperolehnya seperti **model teoritik**, **mekanistik**, dan **empiris**. Model yang memperolehnya berdasar teori-teori yang berlaku merupakan model teoritik. Contoh model teoritik seperti menentukan tiang *KE* di atas diperoleh berdasar teorema *Pythagoras*. Model memperolehnya dengan mekanisme membangkitkan fenomena merupakan model mekanistik. Sedangkan model yang memperolehnya berdasarkan pengamatan seperti model gambar rumah merupakan model empiris.

Model yang tergantung ada tidaknya variabel waktu adalah **model statik** dan **dinamik**. Model statik tidak tergantung pada waktu, misalnya adalah model persamaan (1.1) tidak tergantung pada waktu. Model ini dikembangkan pada Modul 2 dan 5. Model dinamik tergantung pada waktu, misalnya ketika kita ingin mengetahui perilaku dua spesies yang saling berinteraksi pada setiap saat (dibahas lebih lengkap pada Modul 7, 8, dan 9). Model yang tergantung pada sifat keluarannya adalah model **deterministik** dan model **stokastik**. Model deterministik keluarannya pasti sedangkan stokastik ada ketidakpastian pada keluarannya.

Masalah selanjutnya adalah bagaimana kita dapat mengkonstruksi dan menggunakan model dalam matematika untuk memahami dunia nyata. Apakah model yang telah dikonstruksikan dapat menyatakan dengan tepat perilaku yang kita modelkan? Kenyataannya tidak sederhana, banyak upaya yang harus dilalui hingga tahap akhir pemodelan. Ada tahapan memvariabelkan besaran-besaran tertentu yang ada dalam suatu permasalahan, tetapi juga dimungkinkan tidak perlu menentukan bentuk variabelnya. Tahapan-tahapan secara umum dalam proses penentuan model matematika adalah sebagaimana dalam Bagan 1.1. Bagan ini masih dimungkinkan untuk disederhanakan lagi atau bahkan ada penambahan alur. Prinsipnya bagan ini merupakan salah satu alternatif dalam rangka menentukan tahapan-tahapan pemodelan matematika.



Bagan 1.1
Tahapan-tahapan pemodelan matematika

Tahap 1 Mengamati permasalahan nyata

Adanya permasalahan yang akan ditentukan penyelesaiannya atau dilihat fenomena-fenomenanya. Biasanya permasalahannya masih belum operasional.

Tahap 2 Menyederhanakan permasalahan

Masalah yang masih umum disederhanakan dengan mengabaikan beberapa faktor yang dianggap kurang penting.

Tahap 3 Menentukan karakter khusus permasalahan

Permasalahan yang sederhana diidentifikasi spesifikasinya sehingga dapat diperoleh masalah khusus yang operasional.

Tahap 4 Menentukan variabel yang sesuai karakteristik

Identifikasi setiap fenomena yang mempengaruhi permasalahan ke dalam suatu variabel.

Tahap 5 Merumuskan model

Menganalisis hubungan antar variabel menjadi rumusan model. Rumuskan model dari yang paling sederhana, dalam arti gunakan variabel seminimal mungkin. Jika rumusan model sudah sesuai dengan fenomena riil, maka dapat dicoba untuk menambahi variabel yang dianggap sesuai.

Tahap 6 Uji Coba

Menguji cobakan rumusan model matematika dan membandingkan dengan data-data riil. Apabila model sudah sesuai dengan fenomena riil selanjutnya menyelesaikan model secara matematika sebaliknya jika belum sesuai maka kembali Tahap 2.

Tahap 7 Model matematika

Model yang sudah memadai atau valid selanjutnya dipandang sebagai model matematika dari permasalahan semula.

Contoh 1.1

Mula-mula Hisam dan Tony mempunyai kelereng yang sama banyaknya. Namun, kemudian Hisam mendapat tambahan kelereng dari kakaknya30 kelereng. Karena itu, sekarang Tony mempunyai kelereng yang banyaknya $\frac{1}{3}$ dari kelereng Hisam. Tentukan model matematika untuk permasalahan tersebut kemudian tentukan banyaknya kelereng Hisam semula.

Tahap 1 Membaca dan mencermati masalah.

Tahap 2 Kelereng Hisam dan Tony sama banyaknya. Kelereng Hisam ditambah 30 maka kelereng Tony sepertiganya.

Tahap 3 Setelah Hisam dapat tambahan 30 kelereng, maka sekarang kelereng Tony sepertiganya.

Tahap 4 Misalkan mula-mula banyaknya kelereng Hisam adalah x, berarti kelereng Hisam sekarang adalah x + 30.
Misalkan banyaknya kelereng Tony adalah y.

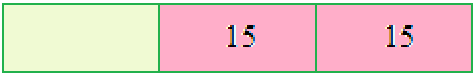
Tahap 5 dari tahap 4 diperoleh hubungan $x = y$ dan $y = \dfrac{x+30}{3}$.

Jadi model matematika dari permasalahan tersebut merupakan sistem persamaan linear dengan 2 variabel x dan y, yaitu

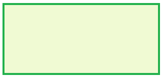
$$\begin{cases} y = x, \\ y = \dfrac{x+30}{3} \end{cases}$$

Tahap 6

Kelereng Hisam :



Kelereng Tony :



Karena banyaknya kelereng Tony sekarang adalah sepertiga kelereng Hisam maka berdasarkan data riil banyaknya kelereng Hisam semula adalah 15.

Berdasarkan model matematika dari sistem persamaan linear dapat diperoleh,

$$3\,x = x + 30$$

atau

$$x = 15.$$

Kesimpulan, banyaknya kelereng Hisam semula adalah 15.

Berdasarkan cara memperolehnya model dari contoh 1.1.1 merupakan model teoritik. Sedangkan jika ditinjau dari keterkaitan waktunya maka termasuk model statik dan jika ditinjau dari sifat keluarannya maka termasuk model deterministik. Mekanisme pembentukan model contoh sederhana seperti itu dapat disederhanakan prosesnya, yaitu

Tahap 1 Pahami bacaannya kemudian identifikasi apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan.

Tahap 2 Tentukan variabel yang sesuai dengan data-data pada Tahap 1.

Tahap 3 Konstruksikan suatu diagram atau suatu pola untuk menentukan keterkaitan antar variabel yang telah ditetapkan.

Tahap 4 Rumuskan model matematikanya.

Penyelesaian model matematika merupakan penyelesaian masalah semula.

Contoh 1.2

Kue A dan kue B harganya Rp2.000,00. Kue A harganya Rp400,00 lebih mahal daripada kue B. Tentukan model matematika yang merumuskan permasalahan ini. Kemudian tentukan besarnya harga kue A.

Langkah 1 Diketahui: Kue A dan kue B harganya 2.000
Kue A harganya Rp400,00 lebih mahal daripada kue B.
Ditanyakan: - model matematika permasalahan ini
Harga kue A

Langkah 2 Misalkan harga kue A adalah x dan harga kue B adalah y.

Langkah 3 Keterkaitan antar variabel itu adalah: $x + y = 2000$ dan harga kue A = harga kue B + 400.

Langkah 4 Diperoleh hubungan:

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ x = y + 400 \end{cases}$$

Dari sistem model ini dapat diperoleh $y = 800$ sehingga $x = 1200$.
Jadi harga kue A adalah Rp 1.200,00.

Contoh 1.3

Dua kilogram anggur dan satu kilogram mangga harganya Rp30.000,00. Dua kilogram anggur dan tiga kilogram mangga harganya Rp35.000,00. Tentukan model matematika dari permasalahan ini kemudian tentukan harga lima kilogram anggur dan tiga kilogram mangga.

Diketahui: 2 kg anggur dan 1 kg mangga = 30.000
2 kg anggur dan 3 kg mangga = 35.000

Ditanyakan: Model matematika permasalahan di atas
Harga 5 kg anggur dan 3 kg mangga.

Misalkan harga 1 kg anggur adalah x dan harga 1 kg mangga adalah y.
Maka model matematikanya adalah

$$\begin{cases} 2x + y = 30.000 \\ 2x + 3y = 35.000 \end{cases}$$

Dengan mengurangkan persamaan kedua dengan persamaan pertama dalam sistem persamaan linear ini dapat diperoleh

$$2y = 5.000$$

atau

$$y = 2.500,$$

dengan mensubstitusikan persamaan ini ke dalam persamaan pertama sistem itu diperoleh

$$2x + 2.500 = 30.000$$

atau

$$x = 13.750.$$

5 kg anggur dan 3 kg mangga =
$(5 \times 13.750) + (3 \times 2.500) = 68750 + 7.500 = 76.250.$

Jadi harga lima kilogram anggur dan tiga kilogram mangga adalah Rp76.250,00.

Contoh 1.4

Empat tahun yang lalu umur Aurel 1/3 umur ayahnya dan 8 tahun yang akan datang umurnya ½ umur ayahnya. Tentukan model matematika dari permasalahan ini kemudian tentukan jumlah umur Aurel dan ayahnya?

Diketahui:
4 tahun yang lalu umur Aurel 1/3 umur ayahnya.
8 tahun yang akan datang umurnya ½ umur ayahnya.

Ditanyakan: - model matematika dari permasalahan ini
- jumlah umur Aurel dan ayahnya.

Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun dan umur Aurel sekarang adalah y tahun.
4 tahun yang lalu diperoleh persamaan

$$y - 4 = \frac{x-4}{3}$$

atau

$$3y - 12 = x - 4$$

atau

$$3y - x = 8$$

8 tahun yang akan datang diperoleh persamaan

$$y + 8 = \frac{x+8}{2}$$

atau

$$2y + 16 = x + 8$$

atau

$$2y - x = -8$$

Jadi model matematika dari permasalahan ini adalah sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 3y - x = 8 \\ 2y - x = -8 \end{cases}$$

Penyelesaian sistem itu dapat diperoleh dengan mengurangkan kedua persamaan

$$y = 16$$

Substitusi persamaan ini ke dalam persamaan pertama dari sistemnya diperoleh

$$3.16 - x = 8$$

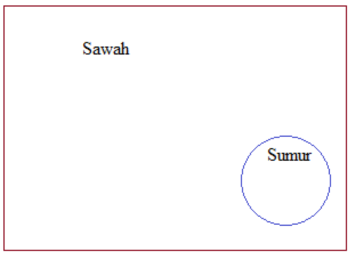
atau

$$x = 40$$

Jadi jumlah umur Aurel dan ayahnya adalah $y + x = 56$.

Contoh berikut ini merupakan model dalam bentuk bangun geometri bidang datar. Penyelesaian masalahnya tidak memerlukan model matematika dalam bentuk semacam persamaan atau pertidaksamaan atau yang memuat variabel-variabel, tetapi cukup dengan pengamatan dan memperhatikan sifat-sifat dari bangun datarnya saja.

Contoh 1.5



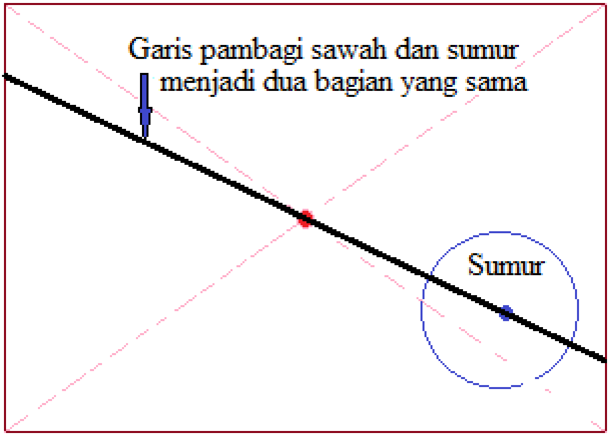
Sukardi dan adiknya memperoleh warisan sebidang sawah berbentuk persegi panjang yang ada sumurnya, yang modelnya sebagaimana pada gambar. Mereka berdua ingin membagi dua bagian hanya dengan 1 buah garis lurus, sehingga mempunyai luas yang sama.

Sukardi dan adiknya memberikan model sawah dan sumurnya sebagaimana gambar di samping.

Dapatkah Anda menemukan caranya?

Amati gambar itu dan renungkan bagaimana cara membagi persegi panjang maupun lingkaran menjadi dua bagian yang sama. Setiap garis pembagi lingkaran dalam dua bagian yang sama pasti melalui pusatnya.

Bagaimana dengan garis pembagi dua dari persegi panjang? Garis pembagi itu adalah setiap garis yang melalui titik potong kedua diagonal persegi panjang. Jadi jawaban permasalahan di atas adalah garis yang melalui pusat permukaan sumur dan titik potong diagonal persegi panjang permukaan sawah.



Model garis pembagi sawah dan sumur menjadi dua bagian yang sama.

Contoh 1.6

Gino mempunyai sebuah peternakan yang terdiri dari kambing dan ayam. Hisam menghitung bahwa ada 7 binatang dan total ada 20 kaki binatang. Tentukan model matematika dari permasalahan ini kemudian tentukan banyaknya masing-masing dari ayam dan kambing.

Diketahui:7 binatang dan total ada 20 kaki binatang

Ditanyakan: - model matematika dari permasalahan
- banyaknya masing-masing dari ayam dan kambing

Misalkan banyaknya ayam adalah x dan banyaknya kambing adalah y. Berarti kita mempunyai persamaan

$$x + y = 7.$$

Karena kaki seekor ayam ada 2 dan kaki seekor kambing ada 4, maka kita mempunyai persamaan

$$2x + 4y = 20.$$

Jadi model matematika dari permasalahan ini adalah sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

Solusi dari sistem ini adalah $x = 4$ dan $y = 3$.

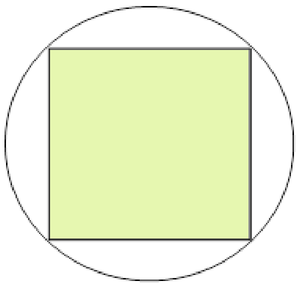
Jadi banyaknya masing-masing dari ayam dan kambing adalah 4 ekor dan 3 ekor.

Sudahkan Anda benar-benar memahami KB 1 ini? Agar kemampuan Anda meningkat maka kerjakan semua soal latihan di bawah. Selanjutnya bandingkan pekerjaan Anda dengan Petunjuk Jawaban Latihan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Pak Wagio memiliki peternakan Sapi. Suatu hari penggembalanya menghitung dan mengatakan bahwa jumlah kaki dan kepala kambingnya ada 315. Tentukan model untuk masalah tersebut dan tentukan banyaknya kambing yang dimiliki Pak Wagio.
2) Lingkaran di samping mempunyai jari-jari 10 cm. Berapa luas persegi terbesar yang dapat dimuat dalam lingkaran tersebut?



3) Dua botol besar dan satu botol kecil dapat menampung 5 liter air. Botol besar dapat menampung 1 liter air lebih banyak daripada botol kecil.

Tentukan model untuk masalah tersebut dan tentukan banyaknya air yang dapat ditampung dua botol kecil.

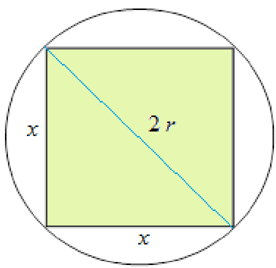
4) Edo, Budi, dan Agus suka bermain kelereng. Banyaknya kelereng mereka bertiga adalah 95 butir. Kelereng Agus 10 butir lebih banyak daripada Budi. Kelereng Edo 5 butir lebih sedikit daripada Budi. Tentukan model untuk masalah tersebut dan tentukan banyaknya kelereng Agus.

5) Pak Tekun, Pak Kuat, dan Pak Gigih adalah petani. Pada suatu ketika mereka memanen padi mereka bersama-sama. Jumlah beras mereka bertiga adalah 9 ton. Jumlah beras Pak Tekun 1 ton lebih banyak daripada jumlah beras Pak Kuat. Jumlah beras Pak Gigih 5 kuintal lebih sedikit daripada jumlah beras Pak Tekun. Tentukan model untuk masalah tersebut dan tentukan banyaknya beras yang dihasilkan Pak Tekun.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui: Banyaknya kaki dan kepala kambing 315.
Ditanyakan: Model matematika permasalahan di atas dan banyaknya kambing
Misalkan banyaknya kambing adalah x. Banyaknya kaki dan kepala setiap kambing berturut-turut adalah 4 dan 1.
Maka diperoleh hubungan variabel dengan kuantitas tersebut adalah
$$4\,x + 1.\,x = 315.$$
Jadi model matematikanya adalah $4\,x + x = 315$.
Sedangkan banyaknya kambing dapat diperoleh dengan menentukan x dari model tersebut, yaitu $5\,x = 315$.
Jadi banyaknya kambing adalah $x = 63$.

2) Diketahui: Jari-jari lingkaran 10 cm.
Persegi di dalam lingkaran.
Ditanyakan:
   a. Model matematika permasalahan di atas
   b. Luas persegi terbesar yang dapat dimuat dalam lingkaran tersebut



Misalkan panjang sisi persegi tersebut adalah x dan jari-jari adalah r. Karena diagonal persegi selalu melalui pusat lingkaran maka panjang diagonalnya adalah dua kali jari-jari.
Dengan memandang segitiga siku-siku sama kaki dengan hipotenusa adalah diagonal persegi dan sisi siku-sikunya adalah sisi persegi maka diperoleh hubungan
$x^2 + x^2 = 4r^2$.
Karena r = 10 maka,
$2x^2 = 400$
atau

$$x^2 = 200$$

Model matematika dari permasalahan tersebut adalah
$l(x) = x^2$,
dan persegi terbesar yang dapat dimuat dalam lingkaran adalah 200 cm^2.

3) Diketahui:2 botol besar dan 1 botol kecil dapat menampung 5 liter air. Botol besar dapat menampung 1 liter air lebih banyak daripada botol kecil.
Ditanyakan:model untuk masalah tersebut dan banyaknya air dalam 2 botol kecil.
Misalkan banyaknya maksimal air dalam botol besar x liter dan banyaknya maksimal air dalam botol kecil y liter.
Model matematikanya adalah

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Penyelesaian model itu adalah

$$2(y+1) + y = 5$$

atau

$$y = 1.$$

Jadi banyaknya air dalam 2 botol kecil adalah $2y$ = 2 liter.

4) Diketahui: Kelereng Edo + kelereng Budi + kelereng Agus = 95
Kelereng Agus = 10 butir +kelereng Budi
Kelereng Edo = kelereng Budi - 5
Ditanyakan: model untuk masalah tersebut dan banyaknya kelereng Agus.

Misalkan banyaknya: kelereng Edo, kelereng Budi, dan kelereng Agus masing-masing adalah x, y, dan z.
Maka model matematika permasalahan tersebut adalah

$$\begin{cases} x + y + z = 95 \\ z = 10 + y \\ x = y - 5 \end{cases}$$

Penyelesaian model itu adalah

$$(y-5) + y + (10 + y) = 95$$

atau

$$3y + 5 = 95$$

atau

$$y = 30$$

Jadi banyaknya kelereng Agus adalah $z = 10 + y = 40$.

5) Diketahui: Jumlah beras Pak Tikno, Pak Wiro, dan Pak Jono adalah 9 ton.
Beras Pak Tikno 1 ton lebih banyak daripada beras Pak Wiro.
Beras Pak Jono 5 kuintal lebih sedikit daripada beras Pak Tikno.
Ditanyakan: Tentukan model untuk masalah tersebut dan tentukan banyaknya beras yang dihasilkan Pak Tikno.
Misalkan banyaknya beras Pak Tikno, Pak Wiro, dan Pak Jono masing-masing adalah x ton, y ton, dan z ton.
Maka model matematika permasalahan tersebut adalah

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x = y + 1 \\ x - \dfrac{1}{2} = z \end{cases}$$

Penyelesaian model itu adalah

$$(y+1) + y + \left((y+1) - \frac{1}{2} \right) = 9$$

atau

$$3y + \frac{3}{2} = 9$$

atau

$$3y = \frac{15}{2}$$

atau

$$y = \frac{5}{2}\ .$$

Jadi banyaknya beras yang dihasilkan Pak Tikno adalah $x = y + 1 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$ ton.

RANGKUMAN

Secara umum model mengandung makna sebagai perwakilan dari benda sesungguhnya, contoh, bentuk gambar suatu benda, atau miniatur. Ada keselarasan antara benda sesungguhnya dengan model yang memerankannya. Sedangkan model matematika mempunyai makna suatu konstruksi matematis yang didesain untuk menyelesaikan masalah atau mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata.

Model matematika mempunyai berbagai macam bentuk tergantung cara memperolehnya, tergantung pada variabel waktu, dan tergantung pada sifat keluarannya. Model berdasarkan cara memperolehnya seperti model teoritik, mekanistik, dan empiris. Model yang tergantung ada tidaknya variabel waktu adalah model statik dan dinamik. Model yang tergantung pada sifat keluarannya adalah model deterministik dan model stokastik.

Tahapan pembentukan model sederhana adalah:

Tahap 1 Pahami bacaannya kemudian identifikasi apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan.

Tahap 2 Tentukan variabel yang sesuai dengan data-data pada Tahap 1.

Tahap 3 Konstruksikan suatu diagram atau suatu pola untuk menentukan keterkaitan antar variabel yang telah ditetapkan.

Tahap 4 Rumuskan model matematikanya.

Penyelesaian model matematika merupakan penyelesaian masalah semula.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu konstruksi matematis yang didesain untuk menyelesaikan masalah atau mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata merupakan makna dari model ....
   A. empiris
   B. teoritik
   C. matematika
   D. stokastik

2) Suatu permasalahan sederhana yang dapat ditentukan model matematikanya akan dapat dilihat fenomenanya melalui tahapan ....
   A. identifikasi hasil pengamatan
   B. variabel-variabel yang mempengaruhi masalahnya
   C. diagram konstruksi keterkaitan antar variabel yang telah ditetapkan
   D. rumusan model matematikanya

3) Jenis model yang tergantung terhadap keterkaitan waktu adalah model ....
   A. mekanistik
   B. empiris
   C. statik
   D. dinamik

4) Jenis model yang berdasarkan sifat keluarannya adalah ....
   A. deterministik
   B. empiris
   C. mekanistik
   D. dinamik

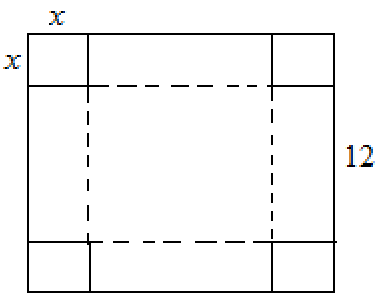
5) Berikut ini yang benar terhadap pemodelan matematika adalah ....
   (i) Permasalahan nyata selalu dapat ditentukan model matematikanya secara tepat
   (ii) Perilaku yang dimodelkan secara matematika dapat dilihat dari solusi modelnya
   (iii) Model deterministik dijamin kevalidannya.
   A. (i) benar
   B. (i) dan (ii) benar

C. (ii) dan (iii) benar
D. Tidak ada yang benar

6) Jumlah dua bilangan adalah 40 dan hasil kalinya adalah *p*. Model matematika yang sesuai dengan permasalahan ini adalah ....
A. $p = x^2 - 20x$
B. $p = x^2 + 40x$
C. $p = 20x - x^2$
D. $p = 40x - x^2$

7) Suatu bilangan jika dikalikan dengan 8 kemudian dikurangkan dengan 20 hasilnya adalah 100. Model matematika yang menyatakan jumlah tersebut adalah ....
A. $8x + 20 = 100$
B. $8x - 20 = 100$
C. $8x + 20y = 100$
D. $8x - 20y = 100$

8) Gambar di bawah adalah persegi dengan panjang sisi 12 satuan panjang. Pada setiap sudutnya dipotong persegi dengan panjang sisi *x* satuan panjang, kemudian dibuat kotak tanpa tutup. Jika *V* menyatakan volume kotak, maka model matematikanya adalah ....



A. $V = x^2 - 24x + 144$
B. $V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$
C. $V = x^3 - 24x^2 + 64x$
D. $V = 4x^3 + 24x + 144$

9) Faisal mengendarai sepeda dengan kecepatan *x* km/jam. Ruli mengendarai sepeda dengan kecepatan 5 km/jam lebih cepat dari Faisal. Jika jumlah perjalanan mereka selama 4 jam adalah 110 km, maka persamaan yang menyatakan jumlah perjalanan (lintasan) yang ditempuh keduanya adalah ....
A. $4x + 4(x+5) = 110$
B. $4x + 5(x+4) = 110$

C. $4x - 4(x+5) = 110$

D. $5x + 4(x+5) = 110$

10) Suatu bangun persegi panjang diketahui lebar 2/3 kali ukuran panjang, sedangkan panjangnya $(6a + 9)$dm. Jika luas bangun tidak lebih dari 170 dm^2, maka model matematika yang menyatakan luas tersebut adalah ....

A. $(3a+6)(6a+9) \leq 170$

B. $(3a+9)(6a+6) \leq 170$

C. $(6a+6)(6a+9) \leq 170$

D. $(4a+6)(6a+9) \leq 170$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Pemodelan dalam Persamaan Diferensial

A. PENGANTAR

Sering kali mahasiswa merasa sulit untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam bentuk pemodelan matematika. Mereka menganggap banyak hal yang mempengaruhi permasalahan untuk divariabelkan serta langkah-langkah menentukan model matematikanya. Langkah pemodelan seperti perhitungan numerik sampai dengan analisisnya sering kali membuat mereka frustrasi dalam melakukan sebuah pemodelan. KB 2 ini mencoba untuk meningkatkan kemampuan mereka memodelkan suatu permasalahan dalam bentuk persamaan diferensial. Sesi modul ini juga dilengkapi dengan beberapa simulasi perilaku model di titik keseimbangan dan juga analisis kestabilannya. Model yang dibahas pada sesi ini lebih banyak berkaitan dengan penerapan Hukum Newton.

B. URAIAN MATERI DAN CONTOH

Banyak dari prinsip-prinsip atau hukum yang mendasari fenomena alam yang bentuk pernyataannya atau hubungannya melibatkan angka. Bila dinyatakan dalam istilah matematika hubungan adalah persamaan dan nilai turunan (*derivatif*).Persamaan yang mengandung *derivatif* adalah persamaan diferensial. Oleh karena itu, untuk memahami dan menyelidiki masalah yang melibatkan gerak cairan, aliran arus dalam sirkuit listrik, disipasi panas dalam benda padat, propagasi dan deteksi gelombang seismik, atau kenaikan atau penurunan populasi, dan masih banyak lagi, maka perlu untuk mengetahui sesuatu tentang persamaan diferensial. Jadi salah satu bentuk model matematika adalah persamaan diferensial.

Model persamaan diferensial yang menarik bagi yang bukan matematikawan terutama karena kemungkinan menggunakannya untuk menyelidiki berbagai macam masalah dalam ilmu fisika, biologi, dan sosial. Salah satu alasan untuk ini adalah bahwa model matematika dan solusi persamaannya berhubungan dengan variabel dan parameter dari suatu masalah, sehingga persamaan dari modelnya sering memungkinkan untuk **membuat prediksi tentang bagaimana proses akan mewakili perilaku**

dalam berbagai keadaan. Model-model yang dibahas seperti dalam KB 1 memberikan hasil yang pasti (statik), sedangkan pada KB 2 ini mungkin **sangat memakan waktu atau mahal dalam melakukan percobaan**. Namun demikian, pemodelan matematika dan percobaan atau pengamatan keduanya sangat penting dan memiliki peran yang agak penting dalam melengkapi penyelidikan ilmiah. Model matematika perlu divalidasi ulang terhadap perbandingan prediksi mereka dengan hasil eksperimen. Namun demikian, analisis matematis mungkin memberikan arah yang paling menjanjikan untuk mengeksplorasi eksperimental, dan dapat menunjukkan cukup tepat tentang data eksperimen.

Bagian awal dari sesi ini kita merumuskan dan menyelidiki model matematika sederhana yang berkaitan dengan persamaan diferensial dan menggunakan bantuan hukum Newton. Terlepas dari aplikasi bidang tertentu ada tiga langkah yang dapat diidentifikasi yang selalu hadir dalam proses pemodelan matematika. Sebenarnya langkah-langkah ini tidak jauh berbeda dengan tahapan-tahapan yang telah di bahas di KB 1 modul ini. Namun demikian, ketiga langkah ini tetap diberikan di sini sebagai tambahan wawasan bagi Anda. Sesi ini akan membahas fenomena objek yang telah dimodelkan berdasarkan solusi model matematikanya. Melalui karakteristik model matematika dan sifat-sifat yang melekat dalam persamaannya kemudian fenomena objek dipelajari tanpa bentuk fungsi solusinya.

Mengkonstruksi Model. Menggambarkan situasi fisik ke istilah matematika dan langkah-langkah ini telah dikenalkan pada KB 1. Mungkin yang paling penting pada tahap ini adalah untuk menyatakan secara jelas prinsip alam yang diyakini mengatur proses. Sebagai contoh, telah diamati bahwa dalam beberapa keadaan panas mengalir dari benda bersuhu tinggi ke benda bersuhu rendah. Benda-benda bergerak sesuai dengan hukum gerak Newton, dan populasi serangga yang terisolasi tumbuh pada tingkat sebanding dengan populasi saat ini. Masing-masing pernyataan ini melibatkan tingkat perubahan (turunan) dan akibatnya, ketika dinyatakan secara matematis, mengarah ke persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan bagian dari model matematis dari proses.

Penting untuk disadari bahwa model matematika dalam bentuk persamaan hampir selalu hanya deskripsi perkiraan proses yang sebenarnya (deskripsi sebenarnya dari model sudah banyak dibahas di KB 1 modul ini). Sebagai contoh, tubuh bergerak dengan kecepatan sebanding dengan kecepatan cahaya tidak diatur oleh hukum Newton, populasi serangga tidak tumbuh tanpa batas seperti yang dinyatakan karena keterbatasan pada pasokan makanan mereka, dan perpindahan panas dipengaruhi oleh faktor lain selain perbedaan suhu. Atau, seseorang dapat mengadopsi sudut pandang bahwa persamaan matematika menggambarkan secara persis operasi dari model fisik yang disederhanakan, yang telah dibangun (atau dipahami) sehingga dapat mewujudkan fenomena yang paling penting dari proses yang sebenarnya. Kadang-kadang,proses pemodelan matematika melibatkan perubahan konsep dari proses diskrit ke proses kontinu. Misalnya, jumlah perubahan populasi serangga dengan jumlah yang diskrit, namun jika populasinya besar, tampaknya masuk akal untuk menganggap itu sebagai variabel kontinu dan bahkan membicarakan tentang turunannya. Langkah ini sesuai dengan Tahap 1 hingga Tahap 3 pada tahapan-tahapan pemodelan matematika yang ada pada KB 1.

Analisis Model. Setelah masalah selesai dirumuskan secara matematis, seseorang sering dihadapkan dengan masalah memecahkan satu atau lebih persamaan diferensial, atau mencari tahu sebanyak mungkin tentang sifat-sifat dari solusi.Ini mungkin terjadi bahwa masalah matematikanya cukup sulit dan jika demikian, sifat-sifat dari solusinya selanjutnya dapat diindikasikan pada tahap masalah matematis dengan batasan tertentu. Sebagai contoh, persamaan tak linear dapat didekati dengan suatu persamaan linear, atau koefisien yang menunjukkan perubahan secara lambat dapat diganti dengan sebuah konstanta. Tentu saja, setiap perkiraan tersebut harus diperiksa dari sudut pandang fisik untuk memastikan bahwa masalah matematika sederhana masih mencerminkan fenomena penting dari proses fisiknya. Pada saat pemodelan, ada banyak faktor-faktor yang mungkin mempengaruhi model. Mula-mula, beberapa faktor dapat diabaikan, akan tetapi jika model yang dibuat sudah sesuai dengan fenomena alam, maka dapat ditambahkan beberapa faktor lainnya. Perlu ditegaskan bahwa, dalam pemodelan harus memperhatikan hukum fisika dan hasil-hasil percobaan. Langkah ini sesuai dengan Tahap 4 dan Tahap 5 pada tahapan-tahapan pemodelan matematika yang ada pada KB 1.

Perbandingan dengan Eksperimen atau Pengamatan. Akhirnya, setelah memperoleh solusi (atau setidaknya beberapa informasi tentang hal itu), Anda harus menginterpretasikan informasi berdasarkan masalah yang muncul. Secara khusus, Anda harus selalu memeriksa bahwa solusi matematika yang muncul menggambarkan fisik masuk akal. Jika memungkinkan, menghitung nilai dari solusi pada titik yang dipilih dan membandingkan mereka dengan nilai-nilai dari pengamatan eksperimen. Atau, tanyakan apakah perilaku dari solusi setelah waktu yang lama konsisten dengan pengamatan. Atau, meneliti solusi yang sesuai dengan nilai-nilai khusus tertentu dari parameter dalam masalah. Tentu saja, fakta bahwa solusi matematika tampaknya masuk akal tidak menjamin itu pasti benar. Namun, jika prediksi dari model matematika secara serius tidak konsisten dengan pengamatan dari sistem fisik yang dimaksudkan, ini menunjukkan bahwa baik kesalahan telah dibuat dalam memecahkan masalah matematika, atau model matematika itu sendiri membutuhkan perbaikan, atau pengamatan harus dilakukan dengan perhatian yang lebih serius.Langkah ini sesuai dengan Tahap 6 dan Tahap 7 pada tahapan-tahapan pemodelan matematika yang ada pada KB 1.

Sebuah persamaan diferensial yang menggambarkan beberapa proses fisik sering disebut model matematika. Pada KB 2 ini kita mulai dengan model yang mengarah ke persamaan yang mudah untuk dipecahkan. Perlu dicatat bahwa, umumnya persamaan diferensial sederhana salah satunya menggambarkan model proses fisika. Seorang ilmuwan yang bernama Henri Poincare mengatakan bahwa"Fisika ada karena adanya matematika yang menyediakan bahasa di mana ia dapat berbicara. Dengan demikian, layanan terus dipertukarkan antara analisis matematika murni dan fisika.Ini benar-benar luar biasa bahwa di antara karya-karya analisis yang paling berguna untuk fisika yang mereka dibudidayakan untuk kecantikan mereka sendiri. Sebagai gantinya, fisika, mengekspos masalah baru yang berguna untuk matematika karena merupakan model bagi seorang seniman."

Contoh 1.5

Misalkan sebuah benda jatuh di atmosfer dekat permukaan laut. Rumuskan sebuah persamaan diferensial yang menggambarkan gerak benda tersebut.

Kita mulai dengan memperkenalkan huruf untuk mewakili berbagai kuantitas kemungkinan kepentingan masalah ini. Gerak berlangsung selama selang waktu tertentu, jadi mari kita gunakan t untuk menunjukkan waktu. Juga, mari kita gunakan v untuk mewakili kecepatan dari benda jatuh.

Perubahan kecepatan tergantung dengan waktu, jadi wajar apabila$v$dianggap sebagai fungsi dari t, dengan kata lain, t adalah variabel *independen* (bebas) dan v adalah variabel *dependent* (bergantung). Pilihan satuan ukuran agak bebas, dan tidak ada dalam aturan khusus untuk menyarankan satuan yang sesuai, sehingga kita bebas untuk membuat pilihan yang masuk akal. Untuk lebih spesifik, mari kita mengukur waktu t dalam hitungan detik dan kecepatan v dalam meter/detik. Selanjutnya, kita akan mengasumsikan bahwa $v$bernilai positif dalam arah ke bawah, yaitu ketika benda jatuh.

Hukum fisika yang mengatur gerak benda adalah hukum kedua Newton, yang menyatakan bahwa massa benda kali percepatannya sama dengan gaya total pada benda. Dalam istilah matematika hukum ini dinyatakan oleh persamaan

$$F = ma. \tag{1.2}$$

Dalam persamaan ini m adalah **massa** benda, a merupakan **percepatan**, dan F adalah gaya totalyang diberikan pada benda. Untuk menjaga kekonsistenan satuan, maka mengukur satuan m dalam kilogram, a dalam meter/detik^2, dan F dalam Newton. Tentu saja,a ini terkait dengan v dengan $a = dv/dt$, jadi dapat ditulis ulang persamaan(1.2) dalam bentuk

$$F = m\left(\frac{dv}{dt}\right) \tag{1.3}$$

Selanjutnya, pertimbangkan gaya yang bekerja pada benda karena jatuh. Gravitasi memberikan gaya resultan yang sama dengan berat benda, atau mg, dengan g adalah **percepatan gravitasi**. Secara eksperimental, g telah ditentukan besarannya kurang lebih sama dengan 9,8 m/detik^{2}di dekat permukaan bumi. Ada juga gaya hambatan udara, atau gaya gesek, yang memberikan model lebih sulit. Asumsi ini mengatakan bahwa hambatan udara memberikan gaya yang melawan gaya gravitasi dan gaya ini meningkat seiring dengan meningkatnya v kecepatan benda jatuh. Kita bisa memilih γv atau γv^2sebagaiistilahgesekan udara, di mana γ adalah parameter **koefisien gesekan**. Ekspresi γv atau γv^2meningkat dengan meningkatnya v, sehingga mereka memenuhi asumsi. Namun, kemungkinan besar kami akan mencoba ekspresi pertama γv karena itu adalah ekspresi paling sederhana yang memenuhi asumsi. Bahkan, ternyata γv menghasilkan model yang baik untuk benda jatuh dengan kepadatan rendah seperti kepingan salju, tapi γv^2 adalah model yang lebih tepat untuk benda padat seperti hujan. Dengan demikian gaya gesek benda berkepadatan rendah memiliki besaran γv. Seperti yang telah disampaikan di awal pembahasan bahwa penentuan besaran ini sangat memakan waktu atau mahal dalam melakukan percobaan, sehingga untuk menentukan besaran dari γ juga tergantung pada objek yang jatuh ke bumi. Oleh karena itu, dalam pembahasan KB 2 Modul 1 besaran γ diasumsikan dengan memberi nilai tertentu atau dalam bentuk konstanta.

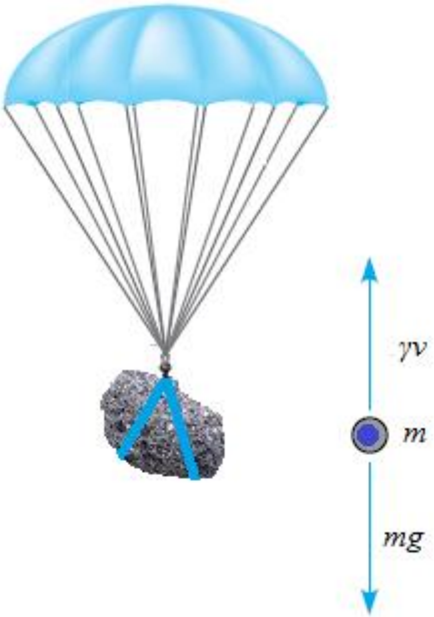
Dalam menulis ekspresi untuk gaya total F perlu kita ingat gravitasi yang selalu bernilai positif arah ke bawah, sementara gaya gesekan arah ke atas(negatif), seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.5, jadi

$$F = mg - \gamma v \tag{1.4}$$

dan persamaan (1.3) menjadi

$$m = \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{1.5}$$

Persamaan (1.5) merupakan **model matematika dari kecepatan suatu benda jatuh** ke bumi dekat permukaan laut. Perhatikan bahwa model memuat tiga konstanta m, g, dan γ. Konstanta$m$ dan γ sangat tergantung pada benda tertentu yang jatuh, dan biasanya akan berbeda untuk benda yang berbeda. Akan tetapi, $g$bernilai sama untuk semua benda.Waktu t dan ketiga konstanta inilah merupakan faktor-faktor yang mempengaruhi model. Mencermati Gambar 1.4 betapa mahal biaya untuk melakukan percobaan objek seperti dalam gambar yang harus berkali-kali diuji coba untuk dijatuhkan ke bumi. Dari uji coba yang berkali-kali dapat diperoleh data ketinggian dan waktu sampai ke permukaan bumi.



Gambar 1.4
Diagram arah gaya pada benda jatuh

Contoh 1.6

Untuk menyelesaikan persamaan (1.5) perlu menemukan fungsi $v = v(t)$ yang memenuhi persamaan. Sekarang, mari kita lihat apa yang bisa dipelajari tentang solusi tanpa harus menemukan bentuk fungsi solusinya. Misalkan bahwa m = 10 kg dan γ = 2 kg / detik. Satuan untuk γ tampak aneh, mengingat γv yang harus memiliki satuan gaya, yaitu, kg-m/detik^2. Kemudian persamaan (1.5) dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{v}{5} \qquad (1.6)$$

Solusi kesetimbangan dapat diperoleh ketika $\frac{dv}{dt} = 0$, sehingga solusi kesetimbangannya adalah $v = 49$. Solusi kesetimbangan dikatakan **stabil** apabila $t \to \infty$ maka semua solusi menuju ke solusi kesetimbangan, jika semua solusi menjauh maka dikatakan **tak stabil**, dan jika ada yang menjauh dan ada yang mendekati solusi kesetimbangan maka dikatakan **semi stabil**.

Ingat bahwa $\frac{dv}{dt}$ merupakan kemiringan dari v dan teorema yang berkaitan dengan itu (lihat Modul 5 KB 1) diantaranya adalah:

1. $\frac{dv}{dt} > 0$ maka v fungsi naik
2. $\frac{dv}{dt} < 0$ maka v fungsi turun
3. $\frac{d^2v}{dt^2} > 0$ maka kurva terbuka/cekung ke atas
4. $\frac{d^2v}{dt^2} < 0$ maka kurva terbuka/cekung ke bawah.

Persamaan (1.6) dapat ditulis menjadi,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{49 - v}{5} \tag{1.7}$$

Berdasarkan aturan rantai, bahwa

$$\frac{d}{dt} f(v) = \frac{df(v)}{dt}\frac{dv}{dt}$$

maka turunan kedua ruas persamaan (1.7) terhadap t, diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{49 - v}{5}\right)$$

atau

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dv}\left(\frac{49 - v}{5}\right)\frac{dv}{dt}$$

atau

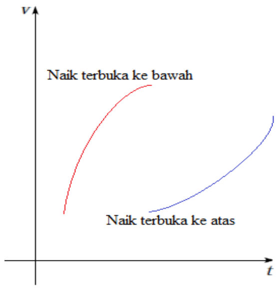
$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{5}\frac{(49 - v)}{5}$$

atau

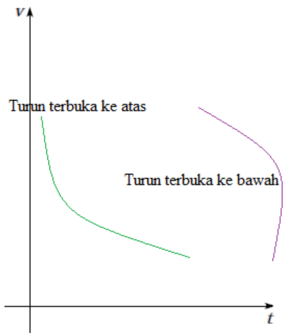
$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{(49 - v)}{25} \tag{1.8}$$

Oleh karena itu fenomena v dapat dianalisis melalui persamaan 1.7 dan persamaan 1.8 dengan langkah-langkah berikut ini.

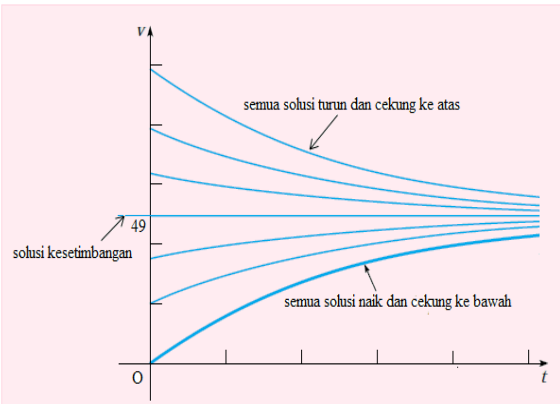
1. Jika $v > 49$ maka:
   a. $\frac{dv}{dt} < 0$ berarti fungsi v turun, dan
   b. $\frac{d^2v}{dt^2} > 0$ berarti fungsi v terbuka/cekung ke atas,



2. Jika $v < 49$ maka:
   a. $\frac{dv}{dt} > 0$ berarti fungsi v naik, dan
   b. $\frac{d^2v}{dt^2} < 0$ berarti fungsi v terbuka/cekung ke bawah.



Jadi solusi kesetimbangan dari masalah ini adalah stabil dan grafik selengkapnya dapat dilihat pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5

Bidang arah solusi kesetimbangan yang stabil dari $\frac{dv}{dt} = \frac{49 - v}{5}$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Untuk benda berkepadatan rendah, perlahan-lahan benda jatuh dengan asumsi bahwa gaya gesek sebanding dengan kecepatan. Untuk yang padat, benda jatuh lebih cepat itu lebih akurat untuk diasumsikan bahwa gaya gesek sebanding dengan kuadrat kecepatan.

1) Tulis model matematika untuk kecepatan benda jatuh dari massa *m* jika gaya gesek sebanding dengan kuadrat kecepatan.
2) Tentukan kesetimbangan kecepatannya.
3) Jika *m* = 10kg, tentukan koefisien gesekan ketika kecepatannya 49 m/detik.
4) Menggunakan data dalam bagian (3), gambar bidang arah dan bandingkan dengan Gambar 1.5.

Kerjakan dahulu latihan soal di atas, apabila sudah selesai atau mengalami kesulitan cocokkan atau lihat jawaban Anda pada penyelesaian di bawah ini.

Petunjuk Jawaban Latihan

Gaya gesek sebanding dengan kuadrat kecepatan, oleh karena itu:

1) Model matematikanya adalah

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2 .$$

2) Solusi kesetimbangan terjadi apabila

$$\frac{dv}{dt} = 0 ,$$

sehingga diperoleh

$$0 = mg - \gamma v^2$$

atau

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\ .$$

3) Jika m = 10 dan $v = 49$, maka $\dfrac{dv}{dt} = 0$ dan $\gamma = \dfrac{mg}{v^2} = \dfrac{98}{49^2} = \dfrac{2}{49}$.

4) Jika m = 10, g = 9,8, dan $\gamma = \dfrac{2}{49}$, maka model matematikanya adalah

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{1}{245}v^2$$

atau

$$\frac{dv}{dt} = \frac{49^2 - v^2}{245}$$

atau

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(49 - v)(49 + v)}{245}$$

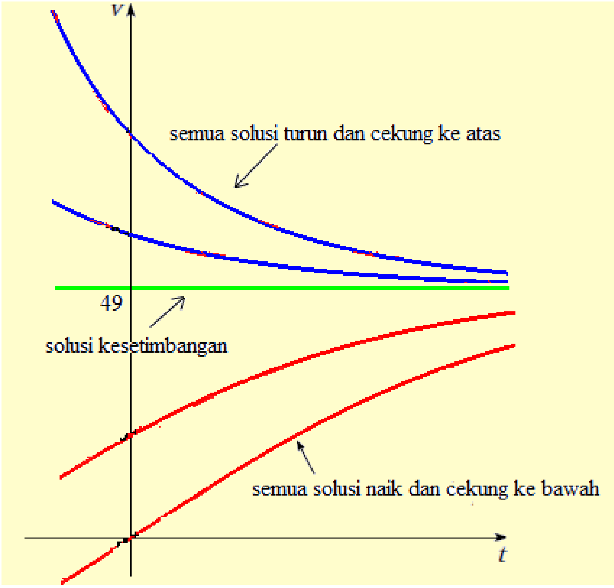
Sedangkan

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \left(\frac{2v}{245}\right)\frac{(49 - v)(49 + v)}{245}.$$

Oleh karena itu fenomena model dapat dianalisis dengan langkah-langkah berikut ini.

Jika $v > 49$ maka $\dfrac{dv}{dt} < 0$ berarti fungsi v turun dan $\dfrac{d^2v}{dt^2} > 0$ berarti fungsi v terbuka ke atas.

Jika 0 < v < 49 maka $\dfrac{dv}{dt} > 0$ berarti fungsi v naik dan $\dfrac{d^2v}{dt^2} < 0$ berarti fungsi v terbuka ke bawah. Berdasarkan analisis inilah kemudian disketsa perilaku model sebagaimana dalam Gambar 1.6. Nampak pula solusi kesetimbangannya adalah stabil.



Gambar 1.6

Bidang arah solusi kesetimbangan yang stabil dari $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{(49-v)(49+v)}{245}$

Solusi Gambar 1.6 lebih cepat mendekati 49 dibanding solusi pada Gambar 1.5.

RANGKUMAN

Model matematika dalam bentuk persamaan diferensial menarik bagi yang bukan matematikawan karena memungkinkan untuk membuat prediksi tentang bagaimana proses dapat mewakili perilaku yang dimodelkan dalam berbagai keadaan.

Model matematika dari suatu kecepatan benda jatuh ke bumi diantaranya adalah:

1. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v$ untuk benda dengan kepadatan rendah,

2. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2$ untuk benda padat (kepadatan tinggi).

Faktor-faktor yang mempengaruhi model ini adalah massa (m), gaya gravitasi (g), koefisien gaya gesek (γ), dan waktu (t).

Solusi kesetimbangan dapat diperoleh ketika $\dfrac{dv}{dt} = 0$. Solusi kesetimbangan dikatakan **stabil** apabila $t \to \infty$ maka semua solusi menuju ke solusi kesetimbangan, jika semua solusi menjauh maka dikatakan **tak stabil**, dan jika ada yang menjauh dan ada yang mendekati solusi kesetimbangan maka dikatakan **semi stabil**.

$\dfrac{dv}{dt}$ merupakan kemiringan dari v dan teorema yang berkaitan dengan itu diantaranya adalah:

1. $\dfrac{dv}{dt} > 0$ maka v fungsi naik
2. $\dfrac{dv}{dt} < 0$ maka v fungsi turun
3. $\dfrac{d^2v}{dt^2} > 0$ maka kurva terbuka ke atas
4. $\dfrac{d^2v}{dt^2} < 0$ maka kurva terbuka ke bawah.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika v, m,γ berturut-turut adalah kecepatan, massa, koefisien gesekan udara dari penerjun payung, maka model matematika gerak penerjun yang sesuai adalah ....

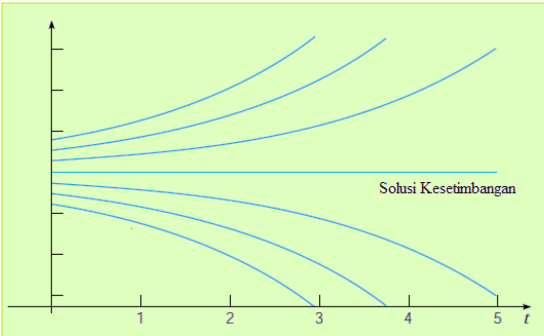
   A. $m\dfrac{dv}{dt} = \gamma v + mg$

   B. $m\dfrac{dv}{dt} = \gamma v - mg$

C. $m\dfrac{dv}{dt} = mg + \gamma v^2$

D. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2$

2) Berdasarkan grafik di bawah maka pernyataan yang benar adalah ....



A. solusi kesetimbangannya stabil
B. solusi kesetimbangannya tak stabil
C. solusi kesetimbangannya semi stabil
D. tidak ada yang benar

3) Misalkan suatu benda sangat padat jatuh ke bumi kecepatannya dimodelkan dengan persamaan diferensial $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v^3$ maka solusi kesetimbangannya adalah ....

A. $v = \sqrt[3]{\dfrac{mg}{\gamma}}$

B. $v = \sqrt{\dfrac{mg}{\gamma}}$

C. $v = -\sqrt[3]{\dfrac{mg}{\gamma}}$

D. $v = -\sqrt{\dfrac{mg}{\gamma}}$

4) Jenis solusi kesetimbangan soal nomor 3 adalah ....
   A. stabil
   B. tak stabil
   C. semi stabil
   D. salah semua

5) Faktor-faktor yang mempengaruhi pada proses pemodelan kecepatan benda jatuh ke bawah adalah:
   (i) gravitasi bumi

   (ii) gesekan udara

   (iii) massa benda

   (iv) kontur tanah di bumi

   A. (i) benar
   B. (i) dan (ii) benar
   C. (i), (ii), dan (iii) benar
   D. benar semuanya

6) Misalkan suatu benda jika dijatuhkan ke bumi memiliki model kecepatan dalam bentuk
   $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{10}.$$
   Misalkan $g = 9{,}8$ dan jika $t \to \infty$ maka solusi $v(t)$ yang memenuhi $v(0) = 20$ memiliki fenomena ....
   A. $v(t)$ mendekati 0
   B. $v(t)$ mendekati $v = 98$
   C. $v(t)$ menuju tak hingga
   D. grafik $v(t)$ cekung ke atas

7) Model matematika kecepatan benda jatuh yang sesuai dengan kepadatan rendah,besarnya massa 1, dan parameter koefisien gesekannya $\frac{2}{5}$ adalah ....

   A. $\frac{dv}{dt} = \frac{49 - 2v}{5}$

B. $\frac{dv}{dt} = \frac{49+2v}{5}$

C. $\frac{dv}{dt} = \frac{9.8-2v}{5}$

D. $\frac{dv}{dt} = \frac{9.8+2v}{5}$

8) Jika suatu benda jatuh ke bumi kecepatannya dimodelkan dengan

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v^2}{5}$$

maka kesetimbangan solusinya adalah ....

A. $v = 7$
B. $v = -7$
C. $v = 7$ dan $v = -7$
D. $v = 0$

9) Misalkan model pada soal nomor 8, maka fenomena v yang melalui koordinat titik $(t,v) = (0,9)$ adalah ....

A. fungsi v naik dan terbuka ke bawah
B. fungsi v naik dan terbuka ke atas
C. fungsi v turun dan terbuka ke bawah
D. fungsi v turun dan terbuka ke atas

10) Model matematika dari kecepatan benda bermassa m yang kepadatannya rendah dan memiliki keseimbangan $v(t) = mg$ dengan g gaya gravitasi adalah ....

A. $m\frac{dv}{dt} = g - v$

B. $m\frac{dv}{dt} = mg - v$

C. $m\frac{dv}{dt} = g + v$

D. $m\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{m}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C.
2) D.
3) D. Model yang tergantung ada tidaknya variabel waktu adalah model statik dan dinamik.
4) A. Model yang tergantung pada sifat keluarannya adalah model deterministik dan model stokastik.
5) C. Permasalahan nyata tidak selalu dapat ditentukan model matematikanya secara tepat.
6) D. $x + y = 40$ dan $xy = p$ maka $p = 40x - x^2$.
7) B. Misalkan bilangan tersebut x maka $8x - 20 = 100$.
8) B. $V = (12 - 2x)(12 - 2x)x$.
9) A. Misalkan kecepatan sepeda Faisal : x dan kecepatan sepeda Ruli : $x + 5$ maka selama 4 jam jarak yang mereka tempuh masing-masing adalah $4x$ dan $4(x+5)$. Jadi model matematika permasalahan tersebut adalah $4x + 4(x+5) = 110$.
10) D. Jika panjang $6a + 9$ maka lebarnya adalah $(4a + 6)$

Tes Formatif 2

1) D.
2) B. Apabila $t \to \infty$ semua solusi menjauhi solusi setimbang.
3) A. Solusi setimbang diperoleh dari $\frac{dv}{dt} = 0$ sehingga $mg - \gamma v^3 = 0$

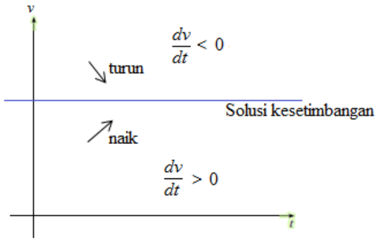
4) A. $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{\gamma v^3}{m} = \dfrac{\gamma\left(\dfrac{mg}{\gamma} - v^3\right)}{m}$.

Sehingga jika:

$v < \dfrac{mg}{\gamma}$ maka $\dfrac{dv}{dt} > 0$, berarti

v fungsi naik

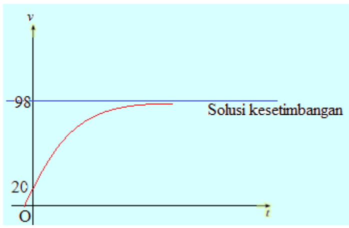
$v > \dfrac{mg}{y}$ maka $\dfrac{dv}{dt} < 0$, berarti v fungsi turun



5) Kontur tanah tidak berpengaruh pada model benda jatuh ke bumi.

6) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{98 - v}{10} \\ v = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} > 0$, berarti v fungsi naik

dan $\dfrac{d^2v}{dt^2} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{98 - v}{10}\right) < 0$ sehingga fungsi v terbuka ke bawah



7) $m\dfrac{dv}{dt} = g - \gamma v.$

8) $\dfrac{dv}{dt} = 0$ maka $49 - v^2 = 0$ atau $v \pm 7.$

9) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{(7 - v)(7 + v)}{5} \\ v = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} < 0$ berarti v fungsi turun

10) B $m\dfrac{dv}{dt} = mg - v$

Daftar Pustaka

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G.R. 2012. *Differential Equations*(4th ed). London: International Thomson Publishing Company.

Boyce, W.E., & DiPrima, R.C. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*(9th ed). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Braun, M. 1993. *Differential Equations and Their Applications*.New York: Springer-Verlag.

Giordano, F.R.,& Weir, M.D. 1994. *Differential Equations A Modeling Approach*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Habermen, R. 1977. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology* I: *An Introduction* (3th ed). New York: Springer-Verlag.

Nagle, R.K.,& Saft, E.B. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Robinson, M. 2011. *Symmetry and the Standard Model Mathematics and Particle Physics*. London: Springer Science Business Media, LLC.