MODUL 1

Pengenalan Pemodelan

Dr. Tjang Daniel Chandra

PENDAHULUAN

Matematika merupakan suatu ilmu yang mempunyai banyak penerapan, misalnya di bidang fisika, biologi, teknik. Untuk mempelajari suatu fenomena alam dapat digunakan matematika dengan terlebih dahulu membuat suatu model matematika.

Pada modul ini kita akan mempelajari tentang arti model dan model matematika. Kemudian, dilanjutkan dengan prosedur atau langkah-langkah penyusunan model matematika.

Kompetensi umum yang diharapkan dicapai setelah mempelajari modul ini adalah Anda dapat menjelaskan hakikat pemodelan matematika dan garis besar langkah penyusunannya.

Sementara kompetensi khusus yang diharapkan dicapai setelah mempelajari modul ini adalah Anda dapat:

1. menjelaskan makna model matematika dan tujuan penyusunan suatu model matematika;
2. mengenali langkah-langkah penyusunan suatu model matematika.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengenalan Model

A. MAKNA MODEL

Untuk memperoleh pengertian tentang proses yang terlibat dalam pemodelan matematika, perhatikan dua kotak yang terdapat dalam Gambar 1.1 di bawah ini.

Sistem dunia nyata	Dunia matematika
Fenomena atau perilaku yang diamati	Model Aturan dan operasi matematika Kesimpulan matematis

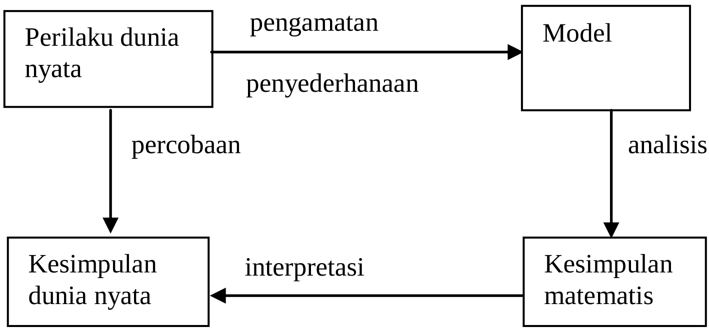
Gambar 1.1.
Dunia Nyata dan Dunia Matematika

Misalkan kita ingin memahami suatu perilaku atau fenomena yang terdapat di dunia nyata. Kita ingin membuat prediksi tentang perilaku tersebut di masa yang akan datang dan menganalisis akibat dari situasi yang berbeda terhadap perilaku tersebut. Contohnya, jika terjadi kasus pemogokan buruh pada suatu pabrik. Kita tertarik untuk memprediksi akibat dari gaji yang dinaikkan terhadap kesehatan pabrik di masa yang akan datang. Contoh lainnya, ketika kita menyelidiki populasi dari dua spesies yang saling berinteraksi, kita ingin mengetahui apakah spesies-spesies tersebut tetap eksis dalam lingkungan mereka ataukah suatu spesies akan menjadi dominan sehingga mengakibatkan kepunahan spesies lainnya, atau dalam bidang manajemen perikanan, sangat penting untuk menentukan pemanenan yang optimal sehingga tidak menyebabkan kepunahan ikan.

Bagaimana kita dapat mengkonstruksi dan menggunakan model dalam dunia matematika untuk menolong kita memahami dunia nyata secara lebih baik? Sebelum kita membahas tentang bagaimana kita menghubungkan kedua dunia tersebut bersama-sama, kita perhatikan terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan sistem dunia nyata dan mengapa pertama-tama kita tertarik untuk mengkonstruksi suatu model matematika suatu sistem.

Suatu sistem adalah suatu kumpulan objek yang diikat oleh suatu interaksi yang saling bergantung. Pembuat model tertarik untuk memahami bagaimana suatu sistem tertentu bekerja, apa yang menyebabkan perubahan dalam sistem, dan kepekaan dari sistem terhadap perubahan tertentu. Dia juga tertarik untuk memprediksi perubahan apa yang mungkin terjadi dan bilamana perubahan tersebut terjadi. Bagaimana informasi demikian dapat diperoleh?

Sebagai contoh, anggaplah tujuan kita adalah mengambil kesimpulan tentang suatu fenomena yang diamati di dunia nyata. Suatu prosedur yang mungkin adalah dengan melakukan eksperimen atau percobaan terhadap suatu perilaku dunia nyata dan mengamati pengaruhnya terhadap perilaku dunia nyata tersebut. Hal ini digambarkan pada bagian kiri dari Gambar 1.2.



Gambar 1.2.
Pengambilan Kesimpulan tentang Perilaku dari Sistem Dunia Nyata

Meskipun prosedur melakukan eksperimen tersebut dapat menghasilkan kesimpulan yang cukup akurat, ada beberapa situasi di mana kita tidak ingin melakukan prosedur tersebut. Misalnya, ada kendala biaya dalam melakukan sebuah eksperimen. Sebagai contoh, menentukan berapa tingkat konsentrasi obat yang dapat membahayakan, atau mempelajari akibat radiasi dari kegagalan di suatu pabrik bertenaga nuklir di dekat pemukiman penduduk.

Diskusi di atas menggarisbawahi adanya kebutuhan untuk mengembang-kan suatu metode tak langsung dalam mempelajari sistem dunia nyata. Skema pada Gambar 1.2 menyarankan suatu metode alternatif untuk memperoleh kesimpulan tentang dunia nyata. Pertama-tama, kita melakukan pengamatan tentang perilaku yang sedang dipelajari dan menentukan faktor-faktor yang tampaknya terlibat. Biasanya, kita tidak dapat mengidentifikasi semua faktor yang terlibat dalam perilaku sehingga kita membuat asumsi-asumsi yang menyederhanakan atau menghilangkan beberapa faktor. Sebagai contoh, pada awal pengamatan, kita dapat mengabaikan faktor perpindahan penduduk pada saat mempelajari pertumbuhan populasi penduduk. Selanjutnya, kita membuat dugaan sementara tentang faktor-faktor yang sudah kita pilih sehingga menghasilkan suatu model tentang perilaku. Setelah mengkonstruksi model, kemudian kita mengaplikasikan analisis matematis yang mengarah kepada kesimpulan tentang model. Perhatikan bahwa kesimpulan ini hanya berhubungan dengan model, bukan tentang sistem dunia nyata yang sedang diselidiki. Karena kita membuat penyederhanaan dalam mengkonstruksi suatu model dan terdapat kemungkinan kesalahan dalam pengamatan, kita harus berhati-hati dalam mengambil kesimpulan tentang perilaku dunia nyata.

Secara ringkas, kita mempunyai suatu prosedur dalam pemodelan.

1. Melalui pengamatan, identifikasikan faktor-faktor utama yang terlibat dalam perilaku dunia nyata.
2. Buat dugaan hubungan di antara faktor-faktor tersebut.
3. Terapkan analisis matematika ke model yang terjadi.
4. Interpretasikan kesimpulan matematis dalam masalah dunia nyata.

B. MODEL MATEMATIKA

Pada pembahasan di atas, kita telah mendiskusikan pemodelan sebagai suatu proses. Sekarang marilah kita mengarahkan perhatian kita pada penyusunan model matematika. Secara sederhana model matematika dapat didefinisikan sebagai suatu konstruksi matematis yang didesain untuk mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata. Konstruksi tersebut dapat berupa konstruksi grafis, simbolik, simulasi, dan eksperimen. Model simbolik dapat merupakan suatu rumus atau persamaan seperti hukum Newton kedua. Model simulasi dapat berupa program komputer atau model atau protipe dari pesawat untuk mempelajari tekanan udara.

Selanjutnya, kita akan mulai dengan menyajikan suatu garis besar prosedur yang menolong dalam penyusunan model matematika.

Langkah 1. Mengidentifikasi Masalah. Apa yang ingin Anda lakukan atau temukan? Langkah ini merupakan langkah yang sulit karena kita sering mengalami kesulitan dalam menentukan apa yang harus dikerjakan. Dalam situasi dunia nyata tidak ada seseorang yang memberikan kepada kita suatu problema matematika untuk diselesaikan. Biasanya kita harus memilih di antara sejumlah besar data dan mengidentifikasi suatu aspek tertentu yang ingin kita pelajari. Selanjutnya, kita harus secara tepat merumuskan masalah sehingga dapat menerjemahkan pernyataan verbal yang menggambarkan masalah dalam simbol matematika.

Langkah 2. Membuat Asumsi. Umumnya kita tidak dapat berharap untuk menampung semua faktor yang mempengaruhi masalah yang sudah diidentifikasi dalam suatu model matematika. Kita dapat menyederhanakan masalah dengan mengurangi sejumlah faktor yang dipertimbangkan. Kemudian, hubungan di antara variabel-variabel yang tersisa harus ditentukan. Jadi, kerumitan suatu masalah dapat dikurangi dengan mengasumsikan hubungan-hubungan yang relatif sederhana. Ada dua kegiatan utama dalam langkah ini, yaitu sebagai berikut.

a. Mengklasifikasikan variabel. Faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi perilaku yang teridentifikasi pada langkah 1? Daftarkan faktor-faktor tersebut sebagai variabel. Variabel yang ingin dijelaskan oleh model disebut variabel bergantung. Variabel sisanya disebut variabel bebas. Ada dua alasan untuk mengabaikan variabel bebas. Pertama, pengaruh dari variabel relatif kecil jika dibandingkan dengan faktor-faktor lain yang terlibat dalam perilaku. Selanjutnya, kita dapat mengabaikan suatu faktor yang pengaruhnya sama dengan faktor-faktor lainnya.
b. Menentukan hubungan di antara variabel-variabel yang sudah dipilih. Sebelum kita dapat membuat hipotesis hubungan di antara variabel, umumnya kita harus membuat beberapa penyederhanaan tambahan. Suatu problem dapat cukup rumit sehingga pada awalnya kita tidak dapat melihat hubungan di antara semua variabel. Dalam kasus demikian, kita dapat membuat submodel, yaitu kita mempelajari satu atau lebih variabel bebas secara terpisah. Akhirnya kita akan menghubungkan semua submodel secara bersama-sama. Dalam kegiatan belajar berikutnya, kita akan mempelajari suatu teknik, misalnya perbandingan, yang akan menolong dalam membuat hipotesis hubungan di antara variabel.

Langkah 3. Menyelesaikan atau menginterpretasikan Model. Sekarang, kombinasikan semua submodel untuk menjadi suatu model. Dalam beberapa kasus, model dapat terdiri atas persamaan atau pertidaksamaan matematika yang harus diselesaikan untuk menemukan informasi yang kita cari. Sering kali suatu pernyataan masalah memerlukan suatu penyelesaian model yang optimal atau terbaik.

Pada langkah ini, kita dapat tidak menemukan penyelesaian model atau tidak dapat menginterpretasikan model. Dalam hal ini, kita harus kembali ke langkah 2 untuk membuat asumsi tambahan untuk menyederhanakan. Atau bahkan kita harus kembali ke langkah 1 untuk mendefinisikan kembali masalah.

Langkah 4. Memeriksa kebenaran Model. Sebelum kita menggunakan model, kita harus menguji model tersebut. Ada beberapa pertanyaan yang dapat diajukan sebelum kita melaksanakan pengumpulan data (suatu langkah yang dapat memerlukan biaya dan waktu yang banyak). *Pertama*, apakah model menjawab masalah yang diidentifikasi pada langkah 1 atau model tersebut menjadi terpisah dari isu utama pada saat kita menyusun model. *Kedua*, apakah model dapat digunakan secara mudah, misalnya apakah kita dapat mengumpulkan data yang diperlukan untuk melaksanakan model? *Ketiga*, apakah model tersebut masuk akal? Apakah kita tidak membuat kesalahan matematika dalam langkah 3 atau membuat kesalahan asumsi pada langkah 2?

Jika pertanyaan-pertanyaan di atas sudah dijawab dengan memuaskan maka kita dapat menguji model dengan menggunakan data yang diperoleh dari pengamatan. Kita perlu berhati-hati pada saat menggunakan data tersebut. Asumsi yang dibuat pada langkah 2 menyebabkan data mungkin hanya berlaku untuk interval tertentu dan tidak berlaku untuk interval lainnya. Misalnya, hukum Newton kedua hanya berlaku jika laju objek lebih kecil daripada laju cahaya.

Kita juga harus berhati-hati dalam menarik kesimpulan tentang hasil pengujian model. Kita tidak dapat membuat dugaan secara umum, hanya karena model berlaku untuk data khusus yang kita peroleh. Suatu model tidak dapat menjadi suatu hukum (ketetapan) hanya karena terbukti berlaku secara berulang-ulang untuk kasus-kasus data tertentu. Melalui data-data yang dikumpulkan, kita diyakinkan bahwa model kita masuk akal.

Langkah 5. Mengimplementasikan (Melaksanakan) Model. Suatu model tidak akan berguna jika tidak dilaksanakan. Kita harus dapat menggunakan dan menjelaskan model kita dengan menggunakan istilah-istilah yang dapat dimengerti oleh pengguna model. Suatu model yang menggunakan program komputer harus dapat dengan mudah dijalankan. Jika program itu sulit dioperasikan, maka pengguna tidak akan menggunakan model tersebut.

Langkah 6. Memperbaiki Model. Ingat kembali bahwa model diturunkan dari masalah khusus yang diidentifikasi dalam langkah 1 dan dari asumsi yang dibuat dalam langkah 2. Oleh karena itu, penting untuk melihat kembali apakah masalah semula mengalami perubahan, atau suatu faktor yang sebelumnya dihilangkan sekarang menjadi faktor yang penting. Apakah salah satu dari submodel perlu di ubah? Jika hal tersebut perlu dilakukan maka kita harus memperbaiki model kita.

C. CONTOH PEMODELAN

Sekarang kita mendemonstrasikan contoh proses pemodelan yang telah dibahas di atas dengan penekanan pada mengindentifikasi masalah dan variabel yang penting.

Contoh 1.1

Skenario: Perhatikan aturan umum yang diberikan pada pelajaran mengemudi: berikan jarak satu panjang mobil kita dengan mobil di depan Anda untuk setiap kenaikan laju 10 km/jam jika berkendaraan pada keadaan normal, dan jarak yang lebih jauh jika cuaca jelek. Jadi, jika kita berkendaraan dengan laju 50 km/jam, maka jarak mobil kita dengan mobil di depan kita adalah lima kali panjang mobil kita. Hal ini bertujuan jika mobil di depan kita melakukan pengereman mendadak, maka kita masih mempunyai waktu dan jarak yang aman untuk mengerem. Aturan ini dapat diterapkan cukup mudah, tetapi seberapa bagus aturan tersebut?

Identifikasi masalah: Tujuan akhir kita adalah untuk menguji aturan ini dan menyarankan aturan lain jika aturan ini gagal. Akan tetapi, pernyataan masalah - seberapa bagus aturan ini? - merupakan pernyataan yang samar/tidak jelas. Kita peru menyatakan suatu masalah secara lebih khusus atau menanyakan suatu pertanyaan yang jawabannya akan menolong kita untuk mencapai tujuan kita dengan menggunakan suatu analisis matematis.

Perhatikan pernyataan masalah berikut *Prediksikan suatu total jarak berhenti dari mobil sebagai fungsi dari laju kendaraan tersebut.*

Asumsi: Kita mulai analisis kita dengan suatu model yang cukup jelas untuk jarak total berhenti:

jarak total untuk berhenti = jarak reaksi + jarak pengereman.

Jarak reaksi adalah jarak yang ditempuh kendaraan dari saat pengemudi merasa perlu untuk berhenti sampai saat menginjak pedal rem. Sedangkan jarak pengereman adalah jarak yang ditempuh oleh kendaraan pada saat pengemudi menginjak pedal rem sampai kendaraan berhenti.

Pertama-tama kita mengembangkan suatu submodel untuk jarak reaksi. Jarak reaksi merupakan fungsi dari beberapa variabel dan kita mulai dengan hanya mendaftar dua dari variabel tersebut.

jarak reaksi = f(waktu respons, laju).

Kita dapat melanjutkan mengembangkan submodel lebih terperinci. Sebagai contoh, waktu respons dipengaruhi oleh faktor individu dalam berkendaraan juga oleh sistem operasi kendaraan. Waktu respons merupakan waktu dari saat pengemudi menyentuh pedal rem sampai rem mulai bekerja dan bergantung kepada pengemudi, misalnya daya refleks, kewaspadaan, dan daya penglihatan. Karena kita hanya mengembangkan suatu aturan umum, kita dapat hanya memasukkan nilai dan kondisi rata-rata untuk variabel-variabel yang terakhir. Setelah semua variabel yang dianggap penting untuk submodel telah diidentifikasi, kita dapat mulai menentukan hubungan di antara variabel-variabel tersebut.

Selanjutnya perhatikan jarak pengereman. Berat dan laju kendaraan merupakan faktor penting yang perlu diperhitungkan. Efisiensi dari rem, tipe dan kondisi roda, permukaan jalan, dan kondisi cuaca adalah faktor-faktor lain yang berpengaruh. Seperti sebelumnya, kita dapat mengasumsikan nilai rata-rata untuk faktor-faktor yang terakhir. Jadi, submodel awal kita menghasilkan jarak pengereman sebagai fungsi dari laju dan berat kendaraan:

jarak pengereman = h(berat, laju).

Akhirnya, kita mendiskusikan secara singkat tiga langkah terakhir dalam proses pemodelan. Kita ingin menguji model kita terhadap data real. Apakah dugaan yang dihasilkan oleh model sesuai dengan situasi real berkendaraan? Jika tidak, kita harus menilai asumsi-asumsi kita, dan mungkin menyusun kembali salah satu atau kedua submodel kita. Jika model kita dapat melakukan prediksi situasi real berkendaraan secara akurat, apakah aturan yang dinyatakan di atas bersesuaian dengan model kita? Jawaban pertanyaan ini memberikan suatu dasar untuk menjawab seberapa bagus aturan tersebut? Aturan apa pun yang kita peroleh (untuk melaksanakan model) harus dapat dimengerti dan digunakan dengan mudah supaya dapat dilaksanakan dengan efektif. Selanjutnya pada contoh ini, tampaknya memperbaiki model bukanlah merupakan isu yang penting. Meskipun demikian, kita harus peka terhadap pengaruh pada model karena perubahan, seperti daya pengereman, sistem roda.

Contoh 1.2

Skenario: Di dalam suatu perusahaan, ada dua pemikiran, yaitu dari pihak karyawan tentang gaji dan kualitas kerja dan dari pihak perusahaan tentang bagaimana mengurangi biaya produksi. Untuk meningkatkan produksi, banyak hal yang perlu dipertimbangkan seperti penugasan karyawan. Suatu pertanyaan yang sering timbul adalah bagaimana menugaskan karyawan dengan memperhatikan bahwa pekerjaan tersebut sering membosankan dan menuntut tingkat keahlian yang berbeda.

Identifikasi masalah: Suatu pendekatan klasik dalam membuat pembagian tugas karyawan adalah untuk menjamin keuntungan maksimum perusahaan. Karyawan ditugaskan untuk mengoperasikan mesin sedemikian hingga diperoleh keuntungan maksimum dari produksi. Dalam situasi permintaan produk tetap, pendekatan ini berarti meminimumkan biaya produksi.

Kesulitan dengan pendekatan klasik ini adalah pendekatan ini memfokuskan hanya pada satu aspek dari masalah, yaitu keuntungan jangka pendek. Dalam beberapa situasi hasil dari prosedur penugasan demikian meliputi ketidakpuasan dalam pekerjaan, tingkat absensi, kualitas produk, dan produktivitas secara keseluruhan. Jadi, perusahaan dituntut untuk memikirkan juga keuntungan jangka panjang.

Meskipun memaksimumkan keuntungan adalah pertimbangan utama, faktor lainnya, seperti kualitas produksi dan kepuasan kerja harus diperhitungkan. Penggabungan berbagai faktor dalam pernyataan masalah bergantung kepada situasi tertentu. Misalkan diasumsikan perusahaan mempunyai kontrak dan mempunyai kapasitas untuk menghasilkan sejumlah produk yang tetap setiap bulannya. Kemudian kita mendefinisikan masalah sebagai berikut. *Meminimumkan biaya produksi dan memenuhi tingkat permintaan, kontrol produksi, dan kepuasan kerja.*

Asumsi: Berdasarkan identifikasi masalah, biaya produksi merupakan fungsi dari gaji individu, produktivitas masing-masing individu pada masing-masing pekerjaan, banyaknya produk yang rusak yang dibuat oleh masing-masing individu pada masing-masing pekerjaan tiap satu-satuan waktu, dan pengurangan dalam kualitas dan produktivitas sebagai fungsi dari waktu yang dihabiskan oleh individu untuk melaksanakan pekerjaan tertentu.

Sekarang marilah kita memeriksa apakah kita dapat memperoleh data yang diperlukan. Data tentang gaji karyawan dapat diperoleh dengan mudah. Kita dapat mengukur produktivitas individu dengan mengukur hasil keluaran masing-masing mesin dan juga banyaknya produksi yang rusak. Pengurangan efisiensi dengan menugaskan seseorang untuk mengerjakan pekerjaan yang sama untuk suatu periode yang diperpanjang mungkin sukar untuk diukur. Kita berharap bahwa setelah mengamati dan mengadakan wawancara dengan beberapa karyawan, kita dapat menyusun suatu pedoman untuk mencegah penurunan produktivitas, namun tetap mempertahankan kepuasan kerja. Sebagai contoh, kita dapat menentukan seseorang individu seharusnya tidak ditugaskan untuk mengerjakan suatu pekerjaan tertentu yang membosankan lebih dari dua jam setiap harinya.

Dalam proses pemodelan ini, kita memperhatikan banyak aspek dari masalah. Kita harus berhati-hati terhadap kecenderungan untuk menghilangkan faktor hanya karena faktor tersebut sulit untuk diukur. Suatu pelajaran yang bisa diambil dari contoh ini adalah kita harus memperhatikan semua faktor yang berhubungan dan berusaha untuk menentukan kepekaan model terhadap berbagai asumsi yang dibuat.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jika kita ingin mengamati suatu perilaku atau fenomena dalam dunia nyata, kegiatan apakah yang biasanya dilakukan!
2) Jelaskan keuntungan dan kelemahan melakukan eksperimen sehingga orang merasa perlu mengembangkan metode lain dalam mempelajari sistem dunia nyata!
3) Apakah yang dimaksud dengan metode lain pada soal nomor 2) dan bagaimana prosedur melaksanakan metode tersebut?
4) Mengapakah kita harus berhati-hati dalam menarik kesimpulan dan menginterpretasikan dalam pemodelan?
5) Apa saja yang menarik seorang pembuat model dalam memahami suatu sistem tertentu?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Kegiatan yang biasa dilakukan adalah melakukan eksperimen atau percobaan terhadap perilaku dunia nyata tersebut dan mengamati pengaruhnya terhadap perilaku dunia nyata tersebut.
2) Keuntungan eksperimen adalah dapat menghasilkan kesimpulan yang cukup akurat tentang sistem dunia nyata. Kelemahan eksperimen adalah faktor biaya dan kadang kala kita tidak menginginkan kegagalan dalam eksperimen.
3) Metode lain yang dimaksud pada soal nomor 2) adalah suatu metode alternatif untuk memperoleh kesimpulan tentang dunia nyata, yaitu dengan membuat model. Prosedur penyusunan model adalah mengidentifikasi faktor-faktor yang terlibat, membuat dugaan hubungan di antara faktor-faktor tersebut, menerapkan analisis matematika ke model, dan menginterpretasikan kesimpulan dalam masalah dunia nyata.
4) Karena kesimpulan tentang model hanya berhubungan dengan model dan bukan tentang dunia nyata. Di samping itu, kita membuat penyederhanaan dalam mengkonstruksi suatu model dan terdapat kemungkinan kesalahan dalam mengamati faktor-faktor yang terlibat.

5) Faktor-faktor yang menarik seorang pembuat model adalah bagaimana suatu sistem bekerja, apa yang menyebabkan perubahan dalam sistem, kepekaan sistem terhadap perubahan tertentu, perubahan apa yang mungkin terjadi dan bilamana perubahan tersebut terjadi, dan bagaimana informasi tentang sistem dapat diperoleh.

RANGKUMAN

Pada bagian ini kita mempelajari pentingnya model dalam mempelajari suatu perilaku atau fenomena dunia nyata. Prosedur dalam penyusunan model matematika dan beberapa contoh penerapan prosedur tersebut.

TES FORMATIF 1

Kerjakanlah soal-soal dibawah ini!

1) Apakah yang dimaksud dengan model matematika itu?
2) Konstruksi apa saja yang terdapat dalam pemodelan matematika? Jelaskan jawaban Anda?
3) Jelaskan dua kegiatan utama dalam langkah membuat asumsi dalam pemodelan matematika!
4) Apakah yang harus kita lakukan jika problem yang kita hadapi cukup rumit sehingga kita tidak dapat melihat hubungan di antara semua variabel?
5) Apakah yang harus kita lakukan jika kita tidak dapat menyelesaikan atau menginterpretrasikan model yang dibuat?

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{50} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Model Diskrit

A. MODEL DISKRIT

Dalam penyusunan model matematika, sering kita tertarik untuk menjelaskan perilaku atau membuat dugaan. Dalam kegiatan belajar ini, kita akan mengarahkan perhatian kita ke perubahan dalam model. Suatu paradigma yang sering digunakan adalah

nilai pada masa mendatang = nilai pada saat sekarang + perubahan

Sering kali, kita ingin untuk meramalkan masa yang akan datang berdasarkan apa yang kita ketahui sekarang (pada saat ini) dan menjumlahkan dengan perubahan yang sudah diamati dengan teliti. Dalam kasus-kasus demikian, sebenarnya kita mulai dengan mempelajari perubahan itu sendiri berdasarkan formula

perubahan = nilai pada masa mendatang - nilai pada saat sekarang.

Dengan mengumpulkan data selama suatu periode waktu dan membuat grafik dari data tersebut, sering kali kita dapat melihat pola dari model dan menangkap kecenderungan dari perubahan. Jika perilaku terjadi pada periode waktu diskrit, penyusunan model mengarah kepada **persamaan beda**, yang akan kita pelajari dalam kegiatan belajar ini. Sedangkan jika perilaku terjadi secara kontinu terhadap waktu, penyusunan model akan mengarahkan kepada persamaan diferensial, yang akan kita pelajari dalam modul berikutnya. Kedua metode tersebut sangat berguna untuk mempelajari perubahan dan untuk menjelaskan serta memprediksi perilaku.

Kita mulai pembahasan kita tentang perubahan diskrit dengan mengamati perilaku yang dapat dimodelkan *secara tepat* oleh persamaan beda. Ketika kita mengamati perbedaan, sering kita tertarik untuk memahami mengapa terjadi perubahan seperti itu, menganalisis akibat dari kondisi-kondisi yang berbeda, atau menduga apa yang akan terjadi di masa yang akan datang. Suatu model matematika akan menolong kita untuk memahami lebih baik suatu perilaku dan mengadakan eksperimen matematis dengan mempelajari pengaruh dari kondisi-kondisi yang berbeda.

Contoh 1.3

Misalkan seseorang mempunyai tabungan di bank sebesar Rp1.000.000,00 dan memperoleh bunga sebesar 1% per bulan. *Barisan* bilangan berikut menyajikan jumlah tabungan dalam beberapa bulan pertama:

$$A = \{1.000.000,\ 1.010.000,\ 1.020.100,\ 1.030.301,\ \dots\}$$

Untuk suatu barisan bilangan $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, beberapa beda pertama didefinisikan sebagai berikut.

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1,$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2,$$
$$\Delta a_3 = a_4 - a_3, \dots$$

Secara umum, beda pertama ke-n didefinisikan sebagai

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Sebagai contoh, beberapa beda pertama dari barisan yang menyajikan nilai dari jumlah tabungan adalah sebagai berikut.

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 1.010.000 - 1.000.000 = 10.000,$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 1.020.100 - 1.010.000 = 10.100,$$
$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 1.030.301 - 1.020.100 = 10.201.$$

Perhatikan bahwa beda pertama menyajikan *perubahan dalam barisan* selama suatu periode, atau dalam contoh ini adalah bunga yang dihasilkan.

Beda pertama sangat berguna untuk memodelkan perubahan yang terjadi dalam interval diskrit. Pada contoh di atas, kita mengetahui bahwa perubahan dari nilai tabungan dari suatu bulan ke bulan lainnya hanyalah bunga yang dibayar pada bulan tersebut. Jika n menyatakan banyaknya bulan dan a_n adalah nilai tabungan setelah n bulan, maka perubahan dalam masing-masing bulan disajikan oleh beda ke-n

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0,01\, a_n.$$

Ekspresi ini dapat ditulis kembali sebagai persamaan beda sebagai berikut.

$$a_{n+1} = a_n + 0{,}01\, a_n.$$

Kita juga mengetahui nilai awal dari tabungan yang kemudian memberikan model sistem dinamik, yaitu model yang menyatakan hubungan di antara suku-suku dalam suatu barisan, sebagai berikut.

$$a_{n+1} = 1{,}01\, a_n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (1.1)$$
$$a_0 = 1.000.000,$$

di mana a_n menyajikan jumlah tabungan yang bertambah setelah n bulan. Perhatikan karena n menyatakan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2, 3, …}, persamaan (1.1) menyatakan suatu himpunan tak hingga dari persamaan aljabar, disebut dengan sistem dinamik. Juga perhatikan bahwa sistem dinamik menggambarkan perubahan dari suatu periode (dalam contoh di atas merupakan bulan) ke periode berikutnya. Rumus persamaan beda merupakan suatu metode untuk menghitung suku berikutnya jika diketahui tepat suku sebelumnya dalam barisan, tetapi kita tidak dapat menghitung suatu suku tertentu secara langsung (misalnya besarnya tabungan setelah 100 bulan).

Kita dapat memodifikasi contoh di atas. Misalnya setiap bulan kita mengambil tabungan sebesar Rp50.000,00. Maka perubahan setiap periode (bulan) adalah bunga tabungan yang dihasilkan selama bulan itu dikurangi dengan pengambilan tabungan bulanan atau

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0{,}01\, a_n - 50.000.$$

Dalam banyak kasus, penggambaran perubahan secara matematis tidak akan setepat prosedur yang diilustrasikan di sini. Sering kali diperlukan untuk menggambarkan grafik perubahan, mengamati pola, dan kemudian menggambarkan perubahan dalam istilah matematis, yaitu kita mencoba untuk menemukan

$$\textit{perubahan} = \Delta a_n = \textit{suatu fungsi}.$$

Perubahan dapat merupakan suatu fungsi dari suku-suku barisan sebelumnya (seperti contoh tabungan tanpa menarik tabungan setiap bulannya), atau dapat juga mengandung suku-suku tambahan (seperti banyaknya uang tabungan yang diambil setiap bulannya atau suatu ekspresi yang memuat periode n). Jadi, dalam mengkonstruksi model yang menyajikan perubahan dalam interval diskrit, kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} perubahan &= \Delta a_n = a_{n+1} - a_n \\ &= f(\text{suku-suku dalam barisan, suku-suku tambahan}) \end{aligned}$$

Memodelkan perubahan dengan cara ini merupakan suatu seni untuk menentukan atau mendekati suatu fungsi f yang menyajikan perubahan. Pada bagian berikutnya, kita akan menggunakan persamaan beda untuk menghampiri perubahan yang sudah diamati. Setelah mengumpulkan data tentang perubahan, dan mengamati pola dari perilaku, kita akan menggunakan perbandingan untuk menguji model kita.

B. MENGHAMPIRI PERUBAHAN DENGAN PERSAMAAN BEDA

Dalam kebanyakan contoh, menggambarkan perubahan secara matematis tidak perlu seakurat seperti pada contoh tabungan. Umumnya, kita harus menggambarkan perubahan, memperhatikan pola, dan kemudian menghampiri perubahan dengan menggunakan istilah-istilah matematika. Pada bagian ini, kita akan menghampiri suatu perubahan yang diamati untuk melengkapi pernyataan

$$perubahan = \Delta a_n = \text{suatu fungsi } f.$$

Dengan demikian, memodelkan perubahan menjadi suatu seni untuk menghampiri fungsi f yang menyatakan perubahan. Kita akan mulai dengan membedakan perbedaan yang terjadi secara kontinu dan perubahan yang terjadi dalam interval diskrit.

Ketika mengkonstruksi suatu model yang melibatkan perubahan, ada suatu perbedaan penting, yaitu perubahan yang terjadi dalam interval waktu diskrit (misalnya bunga tabungan) dan perubahan yang terjadi secara kontinu (misalnya perubahan temperatur). Persamaan beda menyajikan perubahan dalam kasus interval waktu diskrit. Sekarang kita akan memperhatikan beberapa model di mana kita menghampiri suatu perubahan kontinu dengan data yang diambil dalam interval waktu diskrit. Hanya sedikit model yang secara tepat menyajikan dunia nyata. Umumnya, model matematika hanya menghampiri perilaku dunia nyata, yaitu suatu penyederhanaan yang diperlukan untuk menyajikan suatu perilaku dunia nyata dengan suatu konstruksi matematis.

Contoh 1.4

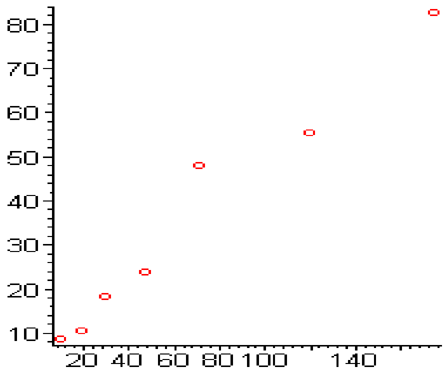
Pada contoh ini kita akan membahas tentang data yang diperoleh dari suatu percobaan mengukur pertumbuhan bakteri. Data disajikan dalam bentuk tabel di bawah ini. Selanjutnya, digambar grafik yang menyatakan hubungan banyaknya bakteri terhadap perubahan jumlah bakteri. Grafik menyajikan asumsi bahwa perubahan populasi sebanding dengan besar populasi pada saat ini, yaitu $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k\, p_n$, di mana p_n menyatakan banyaknya bakteri setelah n jam (atau satuan pengukuran waktu lainnya) dan k adalah suatu konstanta positif.

Meskipun grafik dari data pada Gambar 2.1. tidak menggambarkan secara persis garis lurus yang melalui titik asal, grafik tersebut dapat dihampiri oleh suatu garis yang melalui titik asal. Dengan menggambarkan garis tersebut, kita dapat memperkirakan bahwa gradien dari garis adalah sekitar 0,6. Dengan menggunakan nilai perkiraan k = 0,6 untuk gradien dari garis, kita dapat mengusulkan suatu model perbandingan

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = 0{,}6\, p_n,$$

yang menghasilkan dugaan $p_{n+1} = 1{,}6\, p_n$. Perhatikan bahwa model memprediksi atau menduga bahwa populasi terus bertambah.

Waktu dalam Jam (n)	Banyaknya Bakteri yang Diamati (p_n)	Perubahan Banyaknya Bakteri ($p_{n+1} - p_n$)
0	9,6	
1	18,3	8,7
2	29,0	10,7
3	47,2	18,2
4	71,1	23,9
5	119,1	48,0
6	174,6	55,5
7	257,3	82,7



Gambar 1.3.
Banyaknya Bakteri terhadap Perubahan Jumlah Bakteri

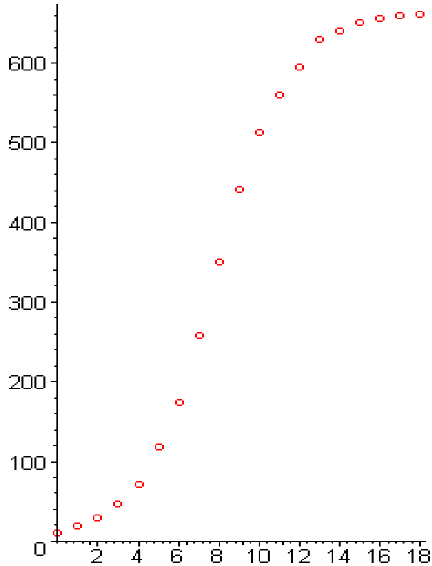
Selanjutnya, kita dapat memperbaiki model kita. Perhatikan bahwa jika kelahiran dan kematian keduanya sebanding dengan populasi selama suatu periode, maka perubahan populasi itu sendiri seharusnya juga sebanding dengan populasi. Akan tetapi, sumber daya alam (misalnya makanan) hanya dapat mencukupi sampai suatu tingkat maksimum dari populasi. Jika tingkat maksimum ini didekati, maka laju pertumbuhan seharusnya melambat. Data pada Gambar 1.4 menunjukkan apa yang sesungguhnya terjadi pada pertumbuhan bakteri pada suatu daerah terbatas jika waktunya bertambah.

Perhatikan kolom ketiga pada tabel, terlihat bahwa perubahan populasi setiap jam menjadi semakin kecil karena sumber daya alam menjadi semakin terbatas. Dari grafik populasi terhadap waktu, tampak bahwa populasi mendekati suatu nilai batas atau yang disebut dengan daya kapasitas. Misalkan berdasarkan grafik, kita memperkirakan bahwa daya kapasitas adalah 665. Pada saat p_n mendekati 665, perubahan menjadi lambat. Karena 665 - p_n mengecil pada saat p_n mendekati 665, perhatikan model

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k(665 - p_n)\, p_n,$$

yang menyebabkan Δp_n menjadi semakin kecil saat p_n mendekati 665.

Waktu dalam Jam (n)	Banyaknya Bakteri yang Diamati (p_n)	Perubahan Setiap Jam ($p_{n+1} - p_n$)
0	9,6	
1	18,3	8,7
2	29,0	10,7
3	47,2	18,2
4	71,1	23,9
5	119,1	48,0
6	174,6	55,5
7	257,3	82,7
8	350,7	93,4
9	441,0	90,3
10	513,3	72,3
11	559,7	46,4
12	594,8	35,1
13	629,4	34,6
14	640,8	11,4
15	651,1	10,3
16	655,9	4,8
17	659,6	3,7
18	661,8	2,2



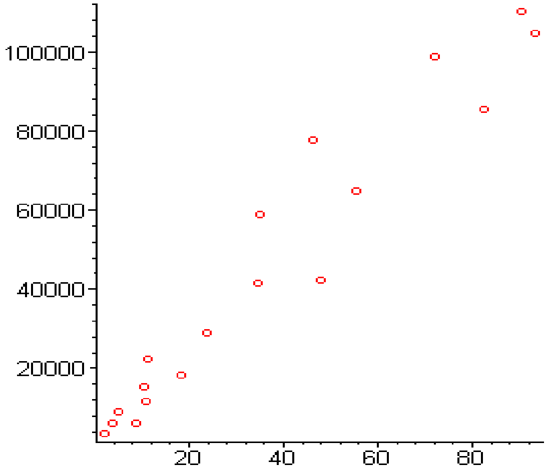
Gambar 1.4.
Grafik Pertumbuhan Bakteri terhadap Waktu,
Bakteri Mendekati Batas Maksimum Populasi

Sekarang kita ingin menguji model yang diusulkan di atas. Untuk itu, kita gambar $(665 - p_n)\, p_n$ terhadap $(p_{n+1} - p_n)$ untuk mengetahui apakah ada perbandingan yang beralasan. Kemudian menemukan konstanta perbandingan k.

Dengan memperhatikan Gambar 1.5, terlihat bahwa grafik mendekati suatu garis lurus yang melalui titik asal. Jika kita menerima argumen bahwa ada perbandingan di antara $(665 - p_n)\, p_n$ dengan $(p_{n+1} - p_n)$, maka kita dapat memperkirakan gradien dari garis tersebut, yaitu $k \approx 0{,}00082$. Jadi, kita memperoleh model

$$p_{n+1} - p_n = 0{,}00082(665 - p_n)\, p_n.$$

$p_{n+1} - p_n$	$(665 - p_n)\, p_n$
8,7	6.291,4
10,7	11.834,61
18,2	18.444,00
23,9	29.160.16
48,0	42.226,29
55,5	65.016,69
82,7	85.623,84
93,4	104.901,21
90,3	110.225,01
72,3	98.784,00
46,4	77.867,61
35,1	58.936,41
34,6	41.754,96
11,4	22.406,64
10,3	15.507,36
4,8	9.050,29
3,7	5.968,69
2,2	3.561,84



Gambar 1.5.
Menguji Model Pertumbuhan

Selanjutnya, kita akan menyelesaikan model di atas dengan secara numerik. Model di atas dapat dituliskan sebagai

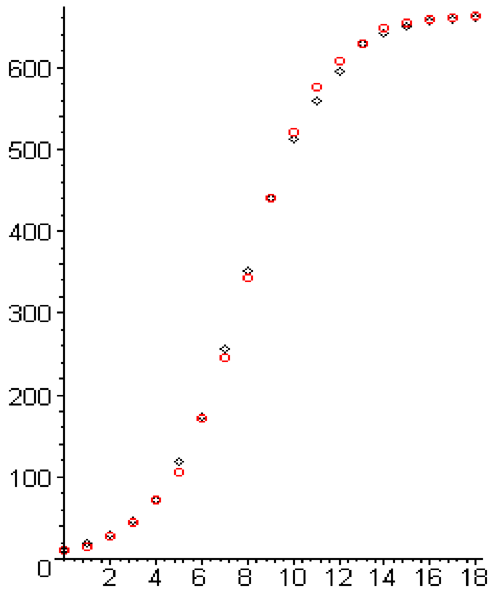
$$p_{n+1} = p_n + 0{,}00082(665 - p_n)\, p_n.$$

Perhatikan bahwa ruas kanan persamaan di atas merupakan bentuk kuadrat dalam p_n. Sistem dinamik demikian disebut tak linear dan secara umum tidak mempunyai solusi analitis, yaitu kita tidak dapat menemukan suatu formula yang menyatakan p_n dalam n. Akan tetapi, jika kita diberikan bahwa p_0 = 9,6, kita dapat mensubstitusikan ke persamaan di atas untuk memperoleh p_1 :

$$p_1 = p_0 + 0{,}00082(665 - p_0)\, p_0 = 9{,}6 + 0{,}00082(665 - 9{,}6)9{,}6 = 14{,}76.$$

Dengan cara yang sama, kita dapat mensubstitusi p_1 = 14,76 untuk memperoleh p_2 = 28. Dengan mengulangi cara di atas (disebut iterasi), kita dapat memperoleh penyelesaian numerik dari model. Penyelesaian numerik dari model prediksi ini disajikan pada Gambar 1.6. Nilai prediksi (dugaan) dan observasi digambar bersama dalam satu diagram terhadap waktu. Simbol lingkaran menyatakan nilai observasi, sedangkan simbol berlian menyatakan nilai dugaan. Tampak bahwa model menyajikan kecenderungan yang sama dengan model.

Waktu dalam *jam*	Nilai *pengamatan*	Nilai *dugaan*
0	9,6	9,60
1	18,3	14,76
2	29,0	28,00
3	47,2	44,12
4	71,1	71,11
5	119,1	105,73
6	174,6	172,41
7	257,3	244,81
8	350,7	343,32
9	441,0	441,08
10	513,3	522,00
11	559,7	577,15
12	594,8	608,03
13	629,4	629,04
14	640,8	647,77
15	651,1	653,52
16	655,9	658,52
17	659,6	660,79
18	661,8	662,52



Gambar 1.6.
Model Dugaan dan Pengamatan

Berikut ini, kita hanya akan mengkonstruksi beberapa model tanpa mencari penyelesaiannya.

Contoh 1.5

Pada contoh ini kita akan mengkonstruksi empat model tentang populasi burung, masing-masing model berkorespondensi dengan asumsi yang berbeda. Model pertama adalah model sederhana yang mengasumsikan sumber daya alam yang berlimpah. Model kedua ditambahkan asumsi bahwa sumber daya alam terbatas. Dalam model ketiga dan keempat diasumsikan ada spesies lain yang tinggal di ekosistem. Khususnya, dalam model ketiga, kita mengasumsikan kedua spesies tersebut saling berkompetisi satu sama lain untuk memperebutkan sumber daya alam dan dalam model keempat kita mengasumsikan kedua spesies tersebut mempunyai hubungan pemangsa-mangsa.

Contoh 1.5a

Dalam model ini kita mengasumsikan bahwa perubahan populasi disebabkan karena kelahiran dan kematian. Juga diasumsikan bahwa selama masing-masing periode waktu jumlah kelahiran sebagai persentase dari populasi sekarang, yaitu bp_n untuk suatu konstanta positif b. Secara sama, asumsikan selama masing-masing periode waktu dimisalkan sejumlah persentase dari populasi yang ada meninggal, yaitu dp_n untuk suatu konstanta positif d. Dengan mengabaikan semua variabel lainnya, perubahan dalam populasi adalah kelahiran dikurangi kematian atau

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = bp_n - dp_n = kp_n,$$

di mana $k = b - d$ menyatakan konstanta pertumbuhan (karena untuk kebanyakan populasi k adalah suatu bilangan positif).

Contoh 1.5b

Sekarang asumsikan bahwa habitat hanya dapat menyediakan sumber alam untuk populasi burung sejumlah M, di mana M menyatakan daya kapasitas dari lingkungan. Jadi, jika populasi burung melebihi M, maka laju pertumbuhan menjadi negatif. Juga asumsikan bahwa laju pertumbuhan akan melambat jika p mendekati M. Asumsi-asumsi ini dapat dimodelkan sebagai

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k(M - p_n)\, p_n,$$

untuk suatu konstanta positif k.

Contoh 1.5c

Pada model ini diasumsikan bahwa ada spesies lain yang tinggal di habitat tersebut dan kedua spesies tersebut saling berkompetisi satu sama lain untuk memperebutkan sumber alam. Misalkan populasi dari spesies kedua setelah n periode adalah c_n. Anggaplah bahwa dengan ketidakhadiran spesies lainnya, masing-masing spesies dapat bertumbuh tanpa batas atau

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = k_1 c_n,$$

dan

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k_2 p_n,$$

di mana k_1 dan k_2 menyatakan laju pertumbuhan konstan (positif). Akibat kehadiran spesies kedua adalah mengurangi laju pertumbuhan dari spesies lainnya, dan sebaliknya.

Ada beberapa cara untuk memodelkan interaksi dua spesies yang saling merugikan, kita akan mengasumsikan bahwa penurunan ini sebanding dengan banyaknya interaksi yang mungkin di antara kedua spesies. Jadi, suatu submodel ditambahkan dengan mengasumsikan bahwa penurunan sebanding dengan hasil kali dari c_n dan p_n. Asumsi ini dapat dimodelkan dengan persamaan

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = k_1 c_n - k_3 c_n p_n,$$

dan

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k_2 p_n - k_4 c_n p_n.$$

Konstanta positif k_3 dan k_4 menyatakan intensitas relatif dari interaksi yang saling kompetitif.

Contoh 1.5d

Selanjutnya, kita asumsikan bahwa sumber makanan utama burung adalah mangsa tunggal, misalkan tikus. Kita menyatakan ukuran populasi dari tikus setelah n periode adalah m_n. Dengan ketidakhadiran pemangsa yaitu burung, maka populasi tikus akan bertambah. Kita dapat memodelkan akibat yang merugikan pada laju pertumbuhan tikus karena populasi burung dengan cara yang sama pada saat kita memodelkan kompetisi yang merugikan, yaitu

$$\Delta m_n = m_{n+1} - m_n = k_1 m_n - k_2 p_n m_n,$$

di mana k_1 dan k_2 adalah konstanta-konstanta positif.

Sebaliknya, jika sumber tunggal makanan burung adalah tikus, maka dengan ketidakhadiran tikus, jumlah populasi burung akan berkurang sampai nol. Misalkan dengan laju penurunan yang sebanding dengan p_n (atau $-k_3\, p_n$ untuk k_3 suatu konstanta positif). Kehadiran tikus dalam jumlah yang banyak akan meningkatkan laju pertumbuhan burung. Misalkan kita mengasumsikan kenaikan laju pertumbuhan burung sebanding dengan hasil kali p_n dan m_n. Asumsi-asumsi di atas dapat dimodelkan sebagai:

$$\Delta\, p_n = p_{n+1} - p_n = -k_3\, p_n + k_4\, p_n\, m_n.$$

Secara ringkas, pembahasan tentang model pemangsa-mangsa di atas menghasilkan sistem

$$\Delta\, m_n = m_{n+1} - m_n = k_1\, m_n - k_2\, p_n\, m_n,$$

$$\Delta\, p_n = p_{n+1} - p_n = -k_3\, p_n + k_4\, p_n\, m_n.$$

Perhatikan persamaan dan perbedaan di antara model pemangsa-mangsa dengan model spesies yang saling berkompetisi yang sudah dibahas (contoh 1.5c.).

Contoh 1.6

Misalkan ada 400 mahasiswa yang tinggal di asrama dan beberapa di antaranya menderita penyakit flu. Misalkan i_n menyatakan jumlah mahasiswa yang terinfeksi setelah n periode waktu. Asumsikan bahwa penyebaran penyakit flu dapat terjadi karena adanya interaksi di antara mahasiswa yang terinfeksi dengan mahasiswa yang belum terinfeksi. Jika semua mahasiswa dapat terjangkit penyakit flu, maka $(400 - i_n)$ menyatakan mahasiswa yang dapat tertular penyakit flu tetapi belum terinfeksi. Jika semua mahasiswa yang terinfeksi dapat menularkan penyakit, kita dapat memodelkan perubahan mahasiswa yang terinfeksi sebagai perbandingan dari hasil kali mahasiswa yang terinfeksi dengan mahasiswa yang dapat tertular penyakit flu, tetapi belum terinfeksi, atau

$$\Delta\, i_n = i_{n+1} - i_n = k\, i_n\, (400 - i_n).$$

Dalam model ini, hasil kali i_n (400 - i_n) menyatakan interaksi yang mungkin terjadi di antara mahasiswa yang terinfeksi dengan mahasiswa yang belum terinfeksi.

Model ini masih dapat diperbaiki. Misalnya kita dapat memperhatikan mahasiswa yang tidak dapat tertular oleh penyakit, periode infeksi yang terbatas, atau kita dapat memperhatikan mahasiswa yang terinfeksi dengan mahasiswa yang dapat tertular penyakit flu, tetapi belum terinfeksi secara terpisah, seperti pada pemodelan pemangsa- mangsa.

Contoh 1.7

Sekarang kita memperhatikan suatu contoh dari bidang fisika di mana perilaku terjadi secara kontinu. Misalkan suatu kaleng minuman yang dingin dikeluarkan dari sebuah lemari es dan ditempatkan di suatu ruangan yang hangat. Kita akan mengukur temperatur secara periodik. Misalkan temperatur awal dari kaleng adalah 5^0C dan temperatur ruangan adalah 25^0C. Ingat kembali bahwa temperatur adalah ukuran energi per satuan volume. Karena volume kaleng lebih kecil jika dibandingkan dengan volume ruangan, kita dapat mengharapkan temperatur ruangan tetap konstan. Selanjutnya, kita dapat mengasumsikan seluruh kaleng minuman bertemperatur sama dan mengabaikan perbedaan di dalam kaleng. Kita juga dapat mengharapkan perubahan temperatur setiap periode waktu lebih besar jika selisih temperatur di antara kaleng minuman dan ruang besar, dan perubahan temperatur setiap satuan waktu kecil jika selisih temperatur kecil. Dengan memisalkan t_n menyatakan temperatur minuman setelah n periode waktu dan k adalah suatu konstanta perbandingan yang positif, kita memodelkan

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k\,(25 - t_n).$$

Selanjutnya, kita dapat memperbaiki model ini. Meskipun kita mengasumsikan k konstan, sebenarnya k bergantung kepada bentuk dan sifat konduktivitas dari kaleng, periode waktu di antara pengukuran, dan lain-lain. Juga temperatur ruangan dalam banyak kasus tidak konstan dan temperatur objek juga tidak konstan. Temperatur objek dapat bervariasi dalam satu dimensi misalnya suatu kawat tipis, dalam dua dimensi seperti suatu bidang datar.

Kita sudah menyajikan beberapa contoh tentang persamaan beda untuk memodelkan perubahan di sekitar kita. Penyelesaian persamaan beda tersebut dapat menggunakan metode numerik dan tidak dibahas dalam kegiatan belajar ini.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tuliskan lima suku pertama dari barisan berikut:
$$a_{n+1} = 2\ a_n^2\ ,\ a_0 = 1.$$
2) Perhatikan barisan berikut. Tulislah suatu persamaan beda untuk menyatakan perubahan selama interval ke-n sebagai fungsi dari suku barisan sebelumnya.
$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$
3) Dengan mensubstitusikan $n = 0, 1, 2, 3$, tuliskan 4 persamaan aljabar pertama yang disajikan oleh sistem dinamik berikut:
$$a_{n+1} = 3a_n,\ a_0 = 1.$$
4) Konstruksilah suatu sistem dinamik yang memodelkan perubahan secara tepat untuk situasi berikut. Pada saat ini Anda memiliki tabungan sebesar Rp5.000.000,00 dan memperoleh bunga sebesar 0,5% setiap bulan. Anda menabung setiap bulannya Rp200.000,00.
5) Suatu obat tertentu dapat bekerja dengan efektif melawan penyakit jika konsentrasinya tetap di atas 100 mg/liter. Diketahui konsentrasi awal 640 mg/liter dan dari percobaan laboratorium ternyata setiap jamnya konsentrasi obat berkurang dengan laju 20% dari banyaknya obat yang ada.
   a) Konstruksilah suatu model yang menyajikan konsentrasi setiap jamnya!
   b) Buatlah tabel nilai dan tentukan bilamana konsentrasi di bawah 100 mg/liter!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Dengan mensubstitusikan $n = 0, 1, 2,$ dan 3 secara berturut-turut diperoleh: $a_0 = 1$, $a_1 = 2(1)^2 = 2$, $a_2 = 2(2)^2 = 8$, $a_3 = 2(8)^2 = 132$, $a_4 = 2(132)^2 = 34848$, $a_5 = 2(34848)^2 = 2428766208$.
2) Perhatikan bahwa 4 = 2 + 2, 6 = 4 + 2, 8 = 6 + 2, 10 = 8 + 2. Oleh karena itu, persamaan beda adalah $a_{n+1} = a_n + 2$.
3) Dengan mensubstitusikan $n = 0, 1, 2,$ dan 3 secara berturut-turut diperoleh: $a_1 = 3a_0$, $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 3a_2$, $a_4 = 3a_3$.
4) Karena bunga bank 0,5% per bulan dan setiap bulan menabung Rp200.000,00 diperoleh $a_{n+1} = 0{,}5\%\ a_n + a_n + 200.000$ dengan $a_0 = 5.000.000$ atau

   $\Delta\, a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = 0{,}5\%\ a_n + 200.000$, dengan $a_0 = 5.000.000$.
5) a) Konsentrasi obat : $a_{n+1} = 80\%\ a_n$, $a_0 = 640$.

   b) Tabel nilai untuk menunjukkan konsentrasi obat per jam:

Waktu (t) dalam *jam*	Konsentrasi (mg/liter)
0	a_0 = 640
1	a_1 = 512
2	a_2 = 409,6
3	a_3 = 327,68
4	a_4 = 262,144
5	a_5 = 209,715
6	a_6 = 167,772
7	a_7 = 134,218
8	a_8 = 107,374
9	a_9 = 85,899

Jadi setelah 9 jam, konsentasi obat di bawah 100 mg/liter.

RANGKUMAN

Pada bagian ini kita mempelajari memodelkan suatu perubahan dengan menggunakan persamaan beda karena perbedaan terjadi dalam waktu diskrit. Dengan persamaan beda kita dapat memodelkan perubahan secara tepat atau hanya menghampiri perubahan tersebut. Selanjutnya persamaan beda tersebut dapat diselesaikan secara numerik. Penyelesaian ini tidak dibahas dalam kegiatan belajar ini.

TES FORMATIF 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1) Tuliskan lima suku pertama dari barisan berikut:
$a_{n+1} = 2\ a_n + 6,\ a_0 = 0$.

2) Perhatikan barisan berikut. Tulislah suatu persamaan beda untuk menyatakan perubahan selama interval ke-n sebagai fungsi dari suku barisan sebelumnya.
$\{1, 3, 7, 15, 31, \ldots\}$.

3) Dengan mensubstitusikan $n = 0, 1, 2, 3$, tuliskan 4 persamaan aljabar pertama yang disajikan oleh sistem dinamik berikut :
$a_{n+1} = a_n^2,\ a_0 = 1$.

4) Konstruksilah suatu sistem dinamik yang memodelkan perubahan secara tepat untuk situasi berikut : dengan menggunakan kartu kredit, Anda berhutang sebesar Rp500.000,00 dan dikenai bunga sebesar 1,5% setiap bulan. Anda dapat membayar Rp50.000,00 setiap bulannya dan tidak membuat hutang baru dengan kartu kredit tersebut.

5) Populasi suatu bakteri diukur setiap jam ditunjukkan dalam tabel berikut ini;

Banyaknya jam (t)	0	1	2	3	4	5
Populasi (y)	50	55	61	67	73	81

a. Hitunglah nilai logaritma dari populasi untuk masing-masing jam ($\log_{10} y$), teliti sampai 2 tempat desimal.
b. Gambarkan grafik banyaknya jam (t) terhadap logaritma dari populasi.
c. Gambarkan garis lurus melalui titik-titik di atas dan perkirakan gradien garis tersebut.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{50} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Model matematika dapat didefinisikan sebagai suatu konstruksi matematis yang didesain untuk mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata.
2) Konstruksi tersebut dapat berupa konstruksi grafis, simbolik, simulasi dan eksperimen. Model simbolik dapat merupakan suatu rumus atau persamaan seperti hukum Newton kedua. Model simulasi dapat berupa program komputer atau model atau protipe dari pesawat untuk mempelajari tekanan udara.
3) Dua kegiatan utama dalam langkah membuat asumsi adalah mengklasifikasikan variabel. Faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi perilaku yang teridentifikasi pada langkah pengidentifikasian masalah? Daftarkan faktor-faktor tersebut sebagai variabel. Menentukan hubungan di antara variabel-variabel yang sudah dipilih.
4) Kita harus membuat submodel, yaitu kita mempelajari satu atau lebih variabel bebas secara terpisah dan akhirnya kita menghubungkan semua submodel secara bersama-sama.
5) Kita harus kembali ke langkah 2 untuk membuat asumsi tambahan untuk menyederhanakan. Atau bahkan kita harus kembali ke langkah 1 untuk mendefinisikan kembali masalah.

Rambu-rambu penilaian sebagai berikut. Jika jawaban benar mendapat nilai 10, sedang jika salah mendapat nilai 2.

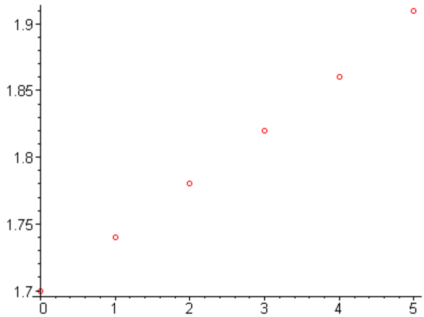
Tes Formatif 2

1) Dengan mensubstitusikan n = 0, 1, 2, dan 3 secara berturut-turut diperoleh: $a_0 = 0$, $a_1 = 2(0) + 6 = 6$, $a_2 = 2(6) + 6 = 18$, $a_3 = 2(18) + 6 = 42$, $a_4 = 2(42) + 6 = 90$.
2) Perhatikan bahwa 1 = 2(0) + 1, 3 = 2(1) + 1, 7 = 2(3) + 1, 15 = 2(17) + 1, 31 = 2(15) + 1. Karena itu persamaan beda adalah $a_{n+1} = 2\ a_n + 1$, $a_0 = 0$.
3) Dengan mensubstitusikan n = 0, 1, 2, dan 3 secara berturut-turut diperoleh: $a_1 = a_0^2$, $a_2 = a_1^2$, $a_3 = a_2^2$, $a_4 = a_3^2$.

4) Karena bunga kartu kredit 1,5% per bulan dan setiap bulan dapat membayar Rp50.000,00 diperoleh a_{n+1} = 1,5% a_n + a_n - 50.000 dengan a_0 = 500.000 atau Δ a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = 1,5% a_n - 50.000, dengan a_0 = 500.000.

5)

Banyaknya jam (*t*)	0	1	2	3	4	5
Populasi (*y*)	50	55	61	67	73	81
Log_{10} (*y*)	1,70	1,74	1,78	1,83	1,86	1,91



Gradien garis = $\dfrac{1,91-1,70}{5-0}$ = 0,042.

Catatan: soal ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa suatu data yang diperoleh dari percobaan dapat disajikan dalam bentuk garis lurus.

Rambu-rambu penilaian sebagai berikut. Jika jawaban benar mendapatkan nilai 10, sedang jika salah mendapatkan nilai 2.

Glosarium

1. Model matematika : suatu konstruksi matematis yang didesain untuk mempelajari suatu fenomena tertentu di dunia nyata.
2. Model Diskrit : suatu model yang melibatkan perubahan yang terjadi dalam interval waktu diskrit (misalnya bunga tabungan).
3. Model kontinu : Suatu model yang melibatkan perubahan yang terjadi secara kontinu (misalnya perubahan temperatur)

Daftar Pustaka

Frank R. Giodarno, Maurice D. Weir, & William P. Fox. (1997). *A First Course in Mathematical Modeling*. California: Brooks/Cole Publishing Company.

Paul W. Davis. (1992). *Differential Equations for Mathematics, Science and Engineering*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.