MODUL 1

Kekeliruan dalam Perhitungan Numerik dan Selisih Terhingga Biasa

Dr. Wahyudin, M.Pd.

PENDAHULUAN

Di dalam pemakaian praktis, penyelesaian akhir yang diinginkan dari solusi suatu permasalahan (soal) dalam matematika biasanya berbentuk numerik. Misalnya, sekumpulan dari tabulasi data yang diberikan dan simpulan-simpulan yang dimiliki gambar dari data tersebut atau suatu sistem persamaan linear yang diberikan dan suatu penyelesaian dari sistem tersebut biasanya berbentuk numerik. Tujuan dari metode numerik adalah memberikan metode-metode yang efisien untuk memperoleh jawaban numerik dari bermacam-macam problem.

Untuk menyelesaikan suatu masalah biasanya dimulai dengan sebarang data awal, kemudian dihitung, dan selanjutnya dengan memakai langkah-langkah (pengolahan) tertentu maka akhirnya diperoleh suatu penyelesaian dalam bentuk numerik. Data numerik adalah suatu aproksimasi (pendekatan) yang benar sampai dua, tiga atau lebih bilangan. Kadang-kadang metode yang digunakan pun adalah suatu aproksimasi sehingga kekeliruan dalam hasil perhitungan, mungkin saja disebabkan oleh kekeliruan data atau kekeliruan di dalam metodenya atau kedua-duanya. Dalam bagian ini, akan dibicarakan ide dasar tentang kekeliruan dan analisisnya. Selanjutnya, pada bagian kedua dari modul ini akan dibahas tentang selisih terhingga biasa.

Perlu diketahui pula oleh para pembaca modul ini bahwa pada modul ini dikemukakan beberapa teorema dalam kalkulus yang sudah dipelajari dalam kalkulus, hal ini dimaksudkan bahwa ke semua teorema tersebut akan dipakai pada pembicaraan tentang metode numerik.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat menganalisis kekeliruan dalam perhitungan numerik dan selisih terhingga biasa.

Secara khusus, kompetensi yang hendak dicapai setelah mempelajari modul ini, adalah Anda diharapkan dapat:

1. membulatkan suatu bilangan ke banyaknya angka signifikan;
2. membulatkan suatu bilangan ke banyaknya angka desimal;
3. menentukan ketelitian relatif dari suatu pengukuran;
4. menentukan kekeliruan relatif dari suatu perubahan suatu fungsi;
5. menentukan banyaknya suku suatu deret fungsi sehingga jumlah suku-suku tersebut merupakan nilai fungsi itu dengan ketelitian sampai angka tertentu;
6. menentukan selisih tertentu dari suatu polinom;
7. menentukan selisih ke-n dari suatu polinom berderajat n;
8. menentukan suku berikutnya dari suatu barisan yang beberapa sukunya diketahui;
9. menentukan nilai dari suatu selisih pembagi dari suatu data yang diberikan;
10. menentukan polinom dari suatu data yang diberikan dengan menggunakan formula selisih pembagi Newton;
11. menentukan nilai dari suatu data tertentu dengan interpolasi, apabila nilai yang dicari tersebut terletak di antara data-data yang diketahui.

Selamat belajar, semoga berhasil!

KEGIATAN BELAJAR 1

Kekeliruan dalam Perhitungan Numerik

A. BILANGAN DAN KETELITIAN

Ada dua macam bilangan dalam perhitungan matematika, yaitu bilangan *eksak* dan bilangan *aproksimasi* (pendekatan). Contoh-contoh bilangan eksak adalah 1, 2, 3, ..., $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ..., $\sqrt{2}$, π, e, ..., dan seterusnya. Bilangan-bilangan aproksimasi dinyatakan dengan bilangan yang mempunyai derajat ketelitian. Misalnya, nilai aproksimasi dari π adalah 3,1416 atau dengan pendekatan yang lebih baik dari π adalah 3,14159265. Tetapi kita tidak dapat menulis secara eksak nilai dari π.

Angka-angka yang menyatakan suatu bilangan disebut angka-angka signifikan. Jadi bilangan-bilangan 3,1416; 0,66667; dan 4,0687 masing-masing memuat *lima* angka *signifikan*, sedangkan bilangan 0,00023 hanya memiliki *dua* angka signifikan, yaitu 2 dan 3 karena nol hanya menentukan tempat dari titik desimal.

Sering kali kita ingin menyingkat penulisan bilangan-bilangan yang besar, dan hal tersebut dapat dilakukan dengan memotong sampai beberapa angka dari bilangan itu yang kita inginkan. Proses pemotongan bilangan seperti itu, disebut *pembulatan*. Dalam modul ini bilangan-bilangan yang dibulatkan mengikuti aturan berikut: Untuk membulatkan bilangan sampai ke-*n* angka signifikan, hilangkan setiap bilangan yang ada di sebelah *kanan* angka ke-*n*, dan jika *bilangan* yang dihilangkan tersebut:

1. kurang dari 5 (setengah satuan) maka angka ke-n tidak berubah (tetap);
2. lebih besar dari 5 (setengah satuan) maka angka ke-n bertambah satu (satu satuan);
3. tepat 5 (setengah unit) maka angka ke-n bertambah satu (satu satuan) jika angka ke-n ganjil, sedangkan yang lainnya tetap.

Bilangan yang dibulatkan itu disebut *teliti sampai n* angka signifikan.

Contoh 1.1.

Bilangan-bilangan berikut dibulatkan sampai empat angka signifikan:

1,6583	ke	1,658
30,0567	ke	30,06
0,859378	ke	0,8594
3,14159	ke	3,142

B. BEBERAPA TEOREMA DALAM KALKULUS

Dalam bagian ini dikemukakan beberapa teorema tanpa pembuktian yang banyak digunakan di dalam pembicaraan kita

Teorema 1.1

Jika f(x) kontinu di dalam $a \le x \le b$ dan f(a) dengan f(b) berlawanan tanda maka

$f(\alpha) = 0$ untuk suatu bilangan α sedemikian hingga $a < \alpha < b$.

Teorema 1.2 (*Teorema Rolle*)

Jika (i) f(x) kontinu di dalam $a \le x \le b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a < x < b$, dan

(iii) $f(a) = f(b) = 0$

maka *ada* paling sedikit satu nilai x, sebutlah α, sedemikian hingga $f'(\alpha) = 0$ dengan $a < \alpha < b$.

Teorema 1.3 (*Teorema Nilai Tengah untuk Derivatif*)

Jika (i) f(x) kontinu di dalam $a \le x \le b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a < x < b$

maka *ada* paling sedikit satu nilai $x = \alpha$, sedemikian hingga

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ dengan } a < \alpha < b.$$

Jika b = a + h, teorema 1.3. dapat dinyatakan dengan bentuk:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \text{dengan } 0 < \theta < 1.$$

Teorema 1.4 (Deret Taylor untuk Fungsi dengan Satu Variabel)

Jika f(x) kontinu dan memiliki turunan ke-n yang kontinu dalam suatu interval yang memuat x = a maka di dalam interval tersebut berlaku:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n-1)}(a) + Rn(x),$$

dengan Rn(x) suku sisa yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$Rn(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha),\ a < \alpha < x.$$

Teorema 1.5 (Ekspansi Maclaurin)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots$$

Teorema 1.6 (*Deret Taylor untuk Fungsi dengan Dua Variabel*)

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}(\Delta x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}(\Delta x_2)^2\right] + \ldots$$

Teorema 1.7 (*Deret Taylor untuk Fungsi Variabel Banyak*)

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}(\Delta x_1)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2}(\Delta x_n)^2 + \right.$$

$$\left. 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot \Delta x_1 \Delta x_2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\cdot \Delta x_{n-1} \Delta x_n \right] + \ldots$$

C. KEKELIRUAN DAN ANALISISNYA

Di dalam analisis numerik, ada 2 tipe kekeliruan, yaitu berikut ini.

1. Kekeliruan Inheren (*Inherent Errors*)

Sebagian besar dari perhitungan numerik adalah tidak eksak. Hal tersebut terjadi karena data yang diperoleh adalah data aproksimasi atau keterbatasan dari alat Komputasi, seperti tabel matematika, kalkulator atau komputer digital. Karena keterbatasan tersebut, bilangan-bilangan yang diperoleh adalah hasil pembulatan sehingga kita ketahui apa yang disebut kekeliruan pembulatan. Di dalam perhitungan, kekeliruan inheren dapat diperkecil oleh data yang besar, oleh pemeriksaan kekeliruan yang jelas dalam data, dan oleh penggunaan alat komputasi dengan ketelitian yang tinggi.

2. Kekeliruan Pemepatan (*Truncation Errors*)

Kekeliruan pemepatan adalah kekeliruan yang tak dapat dihindarkan, jadi memang disengaja. Kekeliruan ini disebabkan oleh penggunaan rumus (formula) aproksimasi dalam perhitungan.

D. KEKELIRUAN MUTLAK, KEKELIRUAN RELATIF, DAN PERSENTASE KEKELIRUAN

Kekeliruan mutlak adalah selisih numerik antara besar nilai sebenarnya dengan nilai aproksimasinya. Jadi, apabila x besar nilai yang sebenarnya, dan x_1 nilai pendekatannya (aproksimasinya) maka kekeliruan mutlak E_A adalah:

$$E_A = x - x_1 = \delta x \qquad \text{... (1.1)}$$

Kekeliruan relatif E_R didefinisikan oleh

$$E_R = \frac{E_A}{x} = \frac{\delta x}{x} \qquad \text{... (1.2)}$$

dan *persentase kekeliruan* E_P adalah:

$$E_p = 100\, E_R \qquad \text{... (1.3)}$$

Jika Δx adalah suatu bilangan sedemikian hingga

$$| x_1 - x| \le \Delta x \qquad \text{... (1.4)}$$

maka Δx disebut *batas atas* pada besaran dari kekeliruan mutlak atau *ukuran ketelitian mutlak*, sedangkan besar $\frac{\Delta x}{|x|}100\% \approx \frac{\Delta x}{|x_1|}100\%$ disebut ukuran *ketelitian relatif*.

Contoh 1.2:

Jika x adalah bilangan yang dibulatkan ke-N tempat desimal maka $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-N}$.

Jika $x = 0{,}51$ maka x teliti sampai 2 tempat desimal sehingga $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}005$, dan *ketelitian relatif-nya* adalah:

$$\frac{\Delta x}{|x|}\ 100\% = \frac{0{,}005}{0{,}51}\ 100\% \approx 0{,}98\%.$$

E. FORMULA KEKELIRUAN UMUM

Misalnya, $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ adalah fungsi dengan variabel banyak dalam x_i ($i = 1, 2, ..., n$), dan misalkan kekeliruan dari tiap x_i adalah Δx_i maka kekeliruan Δu dalam u diberikan oleh:

$$u + \Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n).$$

Perluasan ruas kanan dari kekeliruan umum tersebut oleh deret Taylor (lihat Teorema 1.7), menghasilkan $u + \Delta u = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \Delta x_i$ + suku-suku yang memuat $(\Delta x_i)^2$, dan seterusnya.

Kita anggap bahwa kekeliruan dalam x_i adalah kecil dan $\frac{\Delta x_i}{x_i} < 1$, dan juga kuadrat dan pangkat tertinggi dari Δx_i dapat diabaikan maka dari hubungan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta u &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \qquad ...(1.5) \end{aligned}$$

Jika kita perhatikan formula 1.5 maka terlihat bahwa bentuknya sama dengan diferensial total dari u. Formula untuk kekeliruan relatif adalah sebagai berikut.

$$E_R = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{u} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{u} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{u} \qquad \ldots (1.6)$$

Contoh berikut adalah ilustrasi dari penggunaan formula (rumus) tersebut.

Contoh 1.3:

Misal $u = \dfrac{5xy^2}{z^3}$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5y^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{15xy^2}{z^4}$$

dan $\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x} \,.\, \Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y} \,.\, \Delta y + \dfrac{\partial u}{\partial z} \,.\, \Delta z.$

$$= \frac{5y^2}{z^3}\Delta x + \frac{10xy}{z^3}\Delta y - \frac{15xy^2}{z^4}\Delta z.$$

Umumnya, kekeliruan Δx, Δy, dan Δz, mungkin positif atau negatif karena itu kita berikan nilai mutlak pada suku-suku di ruas kanan sehingga diperoleh:

$$(\Delta u)_{maks} \approx \left|\frac{5y^2}{z^3}\Delta x\right| + \left|\frac{10xy}{z^3}\Delta y\right| + \left|\frac{15xy^2}{z^4}\Delta z\right|$$

Jika $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{,}001$ dan $x = y = z = 1$ maka $u = 5$.

$$(\Delta u)\text{maks} = |5.(0,001)| + |10.(0,001)| + |15.(0,001)|$$
$$= 0,03$$

Sehingga kekeliruan relatif maksimum $(E_R)_{maks}$ adalah

$$(E_R)_{maks} = \frac{(\Delta u)_{maks}}{u} = \frac{0,03}{5} = 0,006.$$

F. KEKELIRUAN DAN APROKSIMASI DERET

Kekeliruan yang dibuat dalam aproksimasi suatu deret dapat dievaluasi oleh sisa sesudah suku-suku ke-n. Deret Taylor untuk f(x) pada x = a diberikan oleh:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{\,n-1}(a) + R_n(x),$$

Dengan $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{\,n}(\alpha)$, $a < \alpha < b$.

Untuk suatu barisan yang konvergen, suku sisa akan mendekati nol untuk $n \to \infty$. Jadi, jika kita mengaproksimasi f(x) oleh n suku pertama dari deret tersebut maka kekeliruan maksimum yang dibuat dalam aproksimasi tersebut diberikan oleh suku sisa.

Contoh 1.4:

Ekspansi Maclaurin untuk e^x diberikan oleh:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\alpha}, \; 0 < \alpha < x.$$

Akan dicari *n*, yaitu banyaknya suku-suku, sedemikian hingga jumlahnya sama dengan e^x, teliti sampai 8 tempat desimal pada x = 1. Ternyata suku sisa dari ekspansi tersebut adalah $\dfrac{x^n}{n!} e^d$ sehingga kekeliruan sukunya adalah $\dfrac{x^n}{n!} e^{\alpha}$, dan untuk $\alpha = x$ memberikan kekeliruan mutlak maksimum. Dengan demikian, *kekeliruan relatif* maksimumnya = $\dfrac{\frac{x^n}{n!}\cdot e^x}{e^x} = \dfrac{x^n}{n!}$. Jika dihitung teliti sampai 8 desimal di x = 1 maka kita peroleh:

$\dfrac{1}{n!} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-8} \Leftrightarrow n! > 2.\,10^8$ yang memberikan n = 12.

Jadi, kita perlukan 12 suku dari deret eksponensial dalam urutan itu yang jumlahnya teliti sampai 8 desimal.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Bulatkan bilangan-bilangan berikut kedua tempat desimal:
   a) 56,32416
   b) 3,385
   c) 3,3842
   d) 4,715
   e) 34,519
   f) 71,155
2) Bulatkan bilangan-bilangan berikut ke-4 angka signifikan:
   a) 78,3573815
   b) 21,105837
   c) 0,0006712
   d) 2,106585
   e) 0,10591288
   f) 0,01026992
3) Jika $u = 3v^7 - 6v$, carilah persentase kekeliruan dalam u pada v = 1 jika kekeliruan dalam v adalah 0,05!
4) Tentukan banyaknya suku-suku dari deret eksponensial sedemikian hingga jumlahnya adalah nilai dari e^x, teliti sampai lima tempat desimal untuk semua nilai x dalam $0 \le x \le 1$.

5) Ekspansi dari fungsi $f(x) = \tan^{-1}x$ adalah

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \ldots$$

Tentukan *n* sedemikian hingga deret $\tan^{-1}x$ dapat ditentukan, teliti sampai 8 angka signifikan!

Petunjuk Jawaban Latihan

1)	a.	56,32	c.	3,38	e.	34,52
	b.	3,39	d.	4,72	f.	71,16

2)	a.	78,36	c.	0,0006712	e.	0,1059
	b.	21,10	d.	2,106	f.	0,01027

3) $u = 3v^7 - 6v \Rightarrow u = 3 - 6 = -3$

$$\begin{aligned}\Delta u &= (21v - 6)\Delta v\\ &= (21 - 6)\ .\ 0,05\\ &= 0,75.\end{aligned}$$

Persentase kekeliruan $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\ .\ 100\% = \frac{0,75}{3}\ .\ 100\% = 25\%.$

4) Penyelesaian hampir sama dengan Contoh 1.4 sehingga diperoleh banyaknya suku adalah *n* sedemikian hingga $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, yang memberikan n = 9.

5) Sama dengan jawaban No. 4, tetapi $\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}$.

RANGKUMAN

1. Jika *x* suatu bilangan yang dibulatkan sampai N tempat desimal maka ketelitian mutlaknya $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-N}$ dan *ketelitian relatif*-nya $\frac{\Delta x}{|x|}$.
2. Jika $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ dan $u + \Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$ maka $\Delta u \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$, dan

   $$E_R = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{u} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\Delta x_2}{u} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{u}.$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Besarnya pendekatan dari sin 45° dibulatkan kelima tempat desimal adalah ....
   A. 0,7071
   B. 0,70710
   C. 0,70711
   D. 0,70716

2) Bilangan aproksimasi 0,0740060 mempunyai ....
   A. 8 angka signifikan
   B. 7 angka signifikan
   C. 6 angka signifikan
   D. 3 angka signifikan

3) Jika $u = 2v^3 + v$ maka persentase kekeliruan dalam u pada v = 2 dan kekeliruan dalam v = 0,05, adalah ....
   A. 4%
   B. 1,92%
   C. 6,94%
   D. 4,808%

4) Jika $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ...$

Banyaknya n suku pertama yang diperlukan agar nilai e^x pada $0 \le x \le 1$ teliti ke 3 tempat desimal adalah ....

A. n = 3
B. n = 5
C. n = 7
D. n = 8

5) Ketelitian relatif dari bilangan aproksimasi 4,101 adalah ....

A. 0.000122
B. 0,00122
C. 0,0122
D. 0,122

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Selisih Terhingga Biasa

Jika diberikan suatu fungsi f(x) dan suatu daftar yang terdiri dari nilai-nilai fungsi f(a), f(a+h), f(a+2h), ..., dengan variabel bebas x bertambah pada jarak interval yang sama maka selisih antara dua nilai x yang berurutan disebut selisih interval dan ditulis dengan huruf h.

Operator selisih Δ didefinisikan oleh persamaan

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad \text{... (1.7)}$$

Lambang Δ f(x) disebut selisih pertama dari f(x), dan $\Delta f(x)$ adalah suatu fungsi dari x sehingga, kita dapat mengulangi kembali operasi selisih tersebut untuk memperoleh selisih kedua dari f(x), yaitu

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \qquad \text{... (1.8)}$$

Umumnya, selisih ke-*n* dari *f*(*x*) didefinisikan oleh

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)] = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x) \qquad \text{... (1.9)}$$

Contoh 1.5.

Misalnya, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$, dimulai dengan x = 0 sebagai nilai awal maka nilai-nilai fungsi untuk x = 0(2)8 = 0, 2, 4, 6, 8 diperlihatkan pada Tabel 1.1. Dalam contoh ini, formula analitik untuk $\Delta f(x)$ adalah:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= (x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 5(x+2) + 7 - (x^3 - 3x^2 + 5x + 7)\\ &= 6x^2 + 6\end{aligned}$$

formula analitik untuk $\Delta^2 f(x)$ adalah:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta\,[\Delta f(x)]\\ \Delta^2 f(x) &= 6(x+2)^2 + 6 - (6x^2 + 6)\\ &= 24x + 24\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= \Delta\,[\Delta^2 f(x)]\\ \Delta^3 f(x) &= 24(x+2) + 24 - (24x + 24)\\ &= 48\end{aligned}$$

Ternyata bahwa $\Delta^4 f(x) = \Delta^5 f(x) = ... = 0$.

Jadi, selisih ketiga $\Delta^3 f(x)$ dari $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ adalah suatu konstanta untuk semua nilai x. Tabel selisih terhingga dari $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ untuk x = 0(2)8 diperlihatkan oleh Tabel 1.1 berikut.

Tabel 1.1
Tabel Selisih Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$, dengan x = 0(2)8

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	7			
		6		
			24	
2	13			48
		30		
			72	
4	43			48
		102		
			120	
6	145			48
		222		
			168	
8	367			
		390		
10	757			

Catatan:
1. x = 0 (2)8, artinya nilai x dimulai dari 0, kemudian ditambah 2 untuk nilai x berikut-nya sampai nilai x terakhir adalah 8. Sehingga nilai x = 0, 2, 4, 6, 8.
2. Jadi, apabila nilai y = 0(5)30 maka y = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Dari definisi (1.7), ternyata operator Δ memenuhi hukum-hukum:

(i). $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$ ... (1.10)

(ii) $\Delta[cf(x)] = c\Delta f(x)$, c konstanta ... (1.11)

Dengan menggunakan relasi-relasi (1.10) dan (1.11), dapat dinyatakan teorema berikut.

Teorema 1.8:

Jika f(x) suatu polinom berderajat n yaitu f(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ maka $\Delta^n f(x)$ adalah suatu konstanta $a_n n! h^n$.

Bukti:

Untuk n = 1, $f(x) = a_1 x + a_0$ dan $\Delta f(x) = a_1 h$. Jadi, teorema tersebut berlaku untuk n =1.

Misalkan teorema tersebut berlaku untuk semua derajat 1, 2, ..., n – 1, dan perhatikan polinom berderajat n, f(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Dengan menggunakan relasi (1.10) dan (1.11) maka kita peroleh:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \; \Delta^n x^i$$

Untuk i < n maka $\Delta^n x^i$ adalah selisih ke-n dari suatu polinom berderajat kurang dari n, dan oleh induksi matematika, $\Delta^n x^i$, haruslah hilang.

Jadi,

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= a_n \; \Delta^n \; nx_n \\ &= a_n \; \Delta^{n-1}\left(\Delta x^n\right) \\ &= a_n \; \Delta^{n-1}\left((x+h)^n \; - \; x^n\right) \\ &= a_n \; \Delta^{n-1}\left(nhx^{n-1} + g(x)\right) \end{aligned}$$

dengan g(x) adalah polinom berderajat kurang dari n – 1. Jadi, dengan menggunakan hipotesis induksi lagi, kita peroleh:

$\Delta^n f(x) = a_n \Delta^{n-1}(nhx^{n-1}) = a_n(nh)(n-1)!h^{n-1} = a_n n! h^n$.

Contoh 1.6:

Carilah selisih keempat dari polinom $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 3$, untuk x = 0(1)5!

Jawab:

Polinom berderajat 4 maka untuk menentukan selisih keempat menggunakan teorema 1.8. $n = 4$, $a_n = 3$, $h = 1$.
Sehingga selisih keempat dari polinom tersebut, untuk $x = 0(1)5$ adalah $\Delta^4 f(x) = a_n\, n!h^n = 3.4!(1)^4 = 72$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buatlah tabel selisih dari $f(x) = x^4 – 2x^3 – 3x^2 + x – 2$, untuk $x = -2(1)4$!
2) Untuk $h = 1$, carilah selisih ekspresi analitik untuk $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, dan $\Delta^3 f(x)$, jika $f(x) = x^3 – 7x^2 + 2x + 3$!
3) Carilah dua suku berikutnya dari barisan berikut:
   $u_0 = 5$, $u_1 = 11$, $u_2 = 22$, $u_3 = 40$, $u_4 = 74$, $u_5 = 140$, $u_6 = 261$, $u_7 = 467$. Gunakan selisih terhingga untuk mencarinya, dan derajat berapakah polinom yang nilai-nilainya seperti itu?
4) Carilah Δu_x, $\Delta^2 u_x$, dan $\Delta^3 u_x$ untuk fungsi-fungsi:
   a) $u_x = ax^3 – bx + c$
   b) $u_x = \dfrac{1}{x}$, ambillah $h = 1$.
5) Tentukan selisih kelima dari polinom $f(x) = 4 – 3x^2 – 2x^3 + 4x^5$ untuk nilai-nilai $x = 0(2)20$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Bentuk tabelnya, seperti berikut (*isi sendiri!*)

x	f(x)	Δf(x)	Δ^2f(x)	Δ^3f(x)	Δ^4f(x)
-2 -1 0 1 2 3 4					

2) $\Delta f(x) = (x + 1)^3 – 7(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 3 – (x^3 – 7x^2 + 2x + 3) = 3x^2 – 11x – 4.$

$\Delta^2 f(x) = 3(x + 1)^2 – 11(x + 1) – 4 – (3x^2 – 11x – 4) = 6x – 8.$

$\Delta^3 f(x) = 6(x + 1) – 8 – (6x – 8) = 6.$

3) Buatlah tabel selisih fungsi u.

Tabel Selisih Fungsi u

u_i	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
$u_0 = 5$				
	6			
$u_1 = 11$		5		
	11		2	
$u_2 = 22$		7		7
	18		9	
$u_3 = 40$		16		7
	34		16	
$u_4 = 74$		32		7
	66		23	
$u_5 = 140$		55		7
	121		30	
$u_6 = 261$		85		$\boxed{7}$ 1
	206		$\boxed{37}$ 2	
$u_7 = 467$		$\boxed{122}$ 3		$\boxed{7}$ 6
	$\boxed{328}$ 4		$\boxed{44}$ 7	
$\boxed{u_9 = 795}$ 5		$\boxed{166}$ 8		
	$\boxed{494}$ 9			
$\boxed{u_{10} = 1289}$ 10				

Sehingga dua suku berikutnya adalah 795 dan 1289 berderajat empat.

4) a) $\Delta u_x = a (x + 1)^3 – b (x + 1) + c – (3ax^3 – bx + c) = 3ax^2 + 3ax + a – b.$

$\Delta^2 u_x = 3a (x + 1)^2 + 3a (x + 1) + a\text{-}b – (3ax^2 + 3ax + a – b) = 6ax + 6a$

$\Delta^3 u_x = 6a (x + 1) + 6a – (6ax + 6a) = 6a$

b) $\Delta u_x = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$

$$\Delta^2 u_x = \frac{1}{(x+1)+1} - \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\Delta^3 u_x = \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{-6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

5) Gunakan teorema 1.8, didapat: $\Delta^5 f(x) = 4\ .\ 5!\ 2^5 = 15.360.$

RANGKUMAN

1. Selisih ke-n dari f(x) didefinisikan oleh:
   $\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)] = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$.
2. Selisih ke-n dari polinom berderajat n: f(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ adalah

   $\Delta^n f(x) = a_n n! h^n$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ dan nilai-nilai x = 0(1)8 maka $\Delta^2 f(x)$ adalah ....
   A. -2x + 10
   B. 8x + 10
   C. 12x – 10
   D. 12x + 10

2) Selisih keempat dari $f(x) = 3 - 2x^2 - 5x^3 - 2x^4$ untuk nilai-nilai x = 0(3)15 adalah ....
   A. $3x4!x3^4$
   B. $2x4!x3^4$
   C. $-2x4!x3^4$
   D. $-3x^4!x3^4$

3) Polinom u_x yang nilai-nilainya $u_1 = 0$, $u_2 = 5$, $u_3 = 22$, $u_4 = 57$, $u_5 = 116$, dan
   $u_6 = 205$, berderajat ....
   A. 3
   B. 4
   C. 5
   D. 6

4) Perhatikan soal No.3.
   u_7 dan u_8 dari polinom tersebut berturut-turut adalah ....
   A. 300 dan 490
   B. 305 dan 495
   C. 330 dan 497
   D. 330 dan 495

5) Selisih kelima dari polinom $f(x) = 2 - 3x^2 - 2x^5$, untuk h = 1 adalah ....
   A. -240
   B. 240
   C. -40
   D. 40

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Selisih Pembagi

Misalkan diberikan nilai-nilai fungsi u_x untuk x = a, b, c, d, ..., dengan interval-interval b-a, c-b, d-c, ... tidak perlu sama.

Kita definisikan selisih pembagi dari u_a ke b oleh persamaan berikut:

$$u_a \underset{b}{\Delta} = \frac{u_b - u_a}{b - a} \qquad \text{... (1.12)}$$

Tabel untuk selisih pembagi dari fungsi tersebut di atas adalah

x	u_x	$\Delta\, u_x$	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
a	u_a			
		$\underset{b}{\Delta}\, u_a$		
b	u_b		$\underset{bc}{\Delta}^2 u_a$	
		$\underset{c}{\Delta}\, u_b$		$\underset{bcd}{\Delta}^3 u_a$
c	u_c		$\underset{cd}{\Delta}^2 u_a$	
		$\underset{d}{\Delta}\, u_c$		
d	u_d			

Notasi formula (1.12): $u_a \underset{b}{\Delta} = \dfrac{u_b - u_a}{b - a}$ adalah suatu formula yang tidak berlaku umum.

Untuk menghitung selisih pembagi yang berderajat lebih tinggi, kita lakukan perhitungan berikut.

$$\begin{aligned} \underset{bc}{\Delta}^2 u_a &= \frac{\underset{c}{\Delta} u_b - \underset{b}{\Delta} u_a}{c - a} \\ &= \frac{\dfrac{u_c - u_b}{c - b} - \dfrac{u_b - u_a}{b - a}}{c - a} \\ &= \frac{u_a}{(a - b)(a - c)} + \frac{u_b}{(b - c)(b - a)} + \frac{u_c}{(c - a)(c - b)} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$\underset{bcd}{\Delta^3} u_a = \frac{\underset{cd}{\Delta^2} u_b - \underset{bc}{\Delta^2} u_a}{d-a}$$

$$= \frac{u_a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{u_b}{(b-c)(b-d)(b-a)} +$$

$$\frac{u_c}{(c-b)(c-d)(c-a)} + \frac{u_d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Dari kedua contoh di atas diperoleh teorema berikut, yang dapat dibuktikan dengan cara induktif.

Teorema 1.9.

Jika a, b, c, ... adalah nilai-nilai dari argumen x maka

$$\underset{bcd\ldots jk}{\Delta^r} u_a = \frac{u_a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)} + \ldots + \frac{u_k}{(k-a)(k-b)\ldots(k-j)}$$

Contoh 1.7:

Buatlah tabel selisih pembagi, untuk u_x dengan $u_{-2} = 5$, $u_0 = 3$, $u_3 = 15$, $u_4 = 47$, dan $u_9 = 687$!

Jawab:

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
-2	5			
		-1		
0	3		+1	
		+4		+1
3	15		+7	
		+32		+1
4	47		+16	
		+128		
9	687			

Dari tabel di atas terlihat bahwa:

$$\underset{0}{\Delta} u_{-2} = \frac{u_0 - u_{-2}}{0-(-2)} = \frac{3-5}{2} = -1, \qquad \underset{0,3}{\Delta^2} u_{-2} = \frac{\underset{3}{\Delta} u_0 - \underset{0}{\Delta} u_{-2}}{3-(-2)} = \frac{4-(-1)}{5} = 1$$

$$\underset{3,4}{\Delta^2} u_0 = \frac{\underset{4}{\Delta} u_3 - \underset{3}{\Delta} u_0}{4-0} = \frac{32-4}{4-0} = 7,$$

$$\underset{3,4,9}{\Delta^3} u_0 = \frac{\underset{4,9}{\Delta^2} u_3 - \underset{3,4}{\Delta^2} u_0}{9-0} = \frac{16-7}{9} = 1$$

dan seterusnya.

Contoh 1.8:

Buatlah tabel selisih pembagi untuk u_x, jika $u_3 = 15$, $u_{-2} = 5$, $u_0 = 3$, $u_9 = 687$, $u_4 = 47$!

Jawab:

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	15			
		+2		
-2	5		+1	
		-1		+1
0	3		+7	
		+76		+1
9	687		+13	
		+128		
4	47			

Dari Contoh 1.7 dan Contoh 1.8, dapat kita lihat bahwa selisih pembagi ketiga dari fungsi tersebut adalah konstan yaitu +1, dan memang nilai-nilai fungsi tersebut diperoleh dari $u_x = x^3 - 5x + 3$. Dari kedua contoh itu pula dapat kita peroleh teorema berikut:

Teorema 1.10.

Jika u_x suatu polinom berderajat n maka $\Delta^n u_x$ adalah sebuah *konstanta*.

Bukti:

$$\underset{x+h}{\Delta} x^n = \frac{(x+h)^n - x^n}{x+h-x} = \frac{nhx^{n-1} + \ldots}{h}$$

= suatu polinom berderajat (n – 1).

Kita ketahui bahwa Δ adalah suatu operator linear, yaitu
$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$, dan $cf = c\Delta f$ (c konstanta).

Jadi, selisih pembagi *pertama* dari polinom $u_x = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ adalah suatu polinom berderajat (n – 1). Akibatnya, selisih pembagi *kedua* adalah suatu polinom berderajat (n – 2), dan selisih pembagi ke-n dari polinom tersebut adalah konstan, sedangkan semua selisih pembagi yang lebih besar dari n dari polinom tersebut adalah nol.
Dari pembicaraan di atas dapat pula disimpulkan bahwa *Corollary* (dalil akibat) dari Teorema 1.11 adalah yang biasa disebut sebagai *sifat kesimetrian*, seperti pada teorema berikut:

Teorema 1.11.

Jika diketahui selisih pembaginya adalah $\underset{bc\ldots jk}{\Delta^r} u_a$, maka perubahan selisih pembagi tersebut diberikan oleh suatu permutasi dari huruf-huruf a, b, c, ..., j, k.
Teorema 1.11 segera dapat dibuktikan, jika kita perhatikan ekspresi Teorema 1.9 yang merupakan fungsi simetri dari semua (r + 1) huruf a, b, c, …, j, k.

Sebagai ilustrasi, dari contoh 1.7 dapat dicari $\underset{0,3}{\Delta^2} u_{-2} = 1$, dalam contoh 1.8, dapat dicari pula $\underset{-2,0}{\Delta^2} u_3 = 1$

Formula Selisih Pembagi Newton

Perhatikan fungsi u_x untuk argumen-argumen x, a, b, c, d, …, j, k maka

$\underset{a}{\Delta} u_x = \underset{x}{\Delta} u_a = \dfrac{u_x - u_a}{x - a}$, dan penyelesaian untuk u_x adalah:

$$u_x = u_a + (x-a)\underset{x}{\Delta} u_a \qquad \text{... (1.13)}$$

Dari sifat simetri, kita peroleh $\underset{bx}{\Delta}{}^2 u_a = \underset{ab}{\Delta}{}^2 u_x = \dfrac{\underset{b}{\Delta} u_a - \underset{a}{\Delta} u_x}{b - x} = \dfrac{\underset{a}{\Delta} u_x - \underset{b}{\Delta} u_a}{x - b}$; dan dengan menggunakan sifat simetri diperoleh:

$$\underset{x}{\Delta} u_a = \underset{b}{\Delta} u_a + (x - b)\underset{bx}{\Delta}{}^2 u_a,$$

Jika persamaan terakhir ini disubstitusikan ke persamaan (1.13) maka diperoleh:

$$u_x = u_a + (x - a)\underset{b}{\Delta} u_a + (x - a)(x - b)\underset{bx}{\Delta}{}^2 u_a \qquad \ldots (1.14)$$

Akhirnya,

$$\underset{bcx}{\Delta}{}^3 u_a = \underset{abc}{\Delta}{}^3 u_x = \frac{\underset{bc}{\Delta}{}^2 u_a - \underset{ab}{\Delta}{}^2 u_x}{c - x} = \frac{\underset{bc}{\Delta}{}^2 u_a - \underset{ab}{\Delta}{}^2 u_x}{x - c} \text{ dan}$$

$$\underset{ab}{\Delta}{}^2 u_x = \underset{bx}{\Delta}{}^2 u_x = \underset{bc}{\Delta}{}^2 u_a + (x - c)\underset{bcx}{\Delta}{}^3 u_a;$$

dan substitusi persamaan ini ke persamaan (1.14) diperoleh ekspresi berikut:

$$u_x = u_a + (x - a)\underset{b}{\Delta} u_a + (x - a)(x - b)\underset{bc}{\Delta}{}^2 u_a + (x - a)(x - b)(x - c)\underset{bcx}{\Delta}{}^3 u_a; \qquad (1.15)$$

Apabila proses (1.13), (1.14), dan (1.15) dilanjutkan untuk nilai-nilai argumen x, a, b, c, …, j, k, dan disubstitusikan nilai-nilai

$x - a = A$, $x - b = B$, …, $x - j = J$, $x - k = K$,

maka diperoleh formula berikut:

$$u_x = u_a + A\underset{b}{\Delta} u_a + AB\underset{bc}{\Delta}{}^2 u_a + ABC\underset{bcd}{\Delta}{}^3 u_a + \ldots + ABC \ldots J\underset{bc\ldots k}{\Delta}{}^n u_a$$

yang disebut *formula selisih pembagi Newton*.

Contoh 1.9:

Gunakan formula selisih pembagi Newton untuk memperoleh aproksimasi polinom u_x dari data berikut.

x	u_x
10	355
0	-5
8	-21
1	-14
4	-125

Jawab:

Tabel selisih pembagi dari data di atas adalah:

x	u_x	$\triangle u_x$	$\triangle^2 u_x$	$\triangle^3 u_x$
10	355			
		+36		
0	-5		+19	
		-2		+2
8	-21		+1	
		-1		+2
1	-14		+9	
		-37		
4	-125			

Dengan menggunakan formula Newton dan nilai dari tabel di atas, aproksimasi untuk polinom u_x yang diminta adalah:

$$u_x = u_{10} + (x-10)\underset{0}{\triangle} u_{10} + (x-10)(x-0)\underset{0,8}{\triangle^2} u_{10} + (x-10)(x-0)(x-8)\underset{0,8,1}{\triangle^3} u_{10}$$

$$= 355 + (x-10)(36) + (x-10)(x)(19) + (x-10)(x)(x-8)(2)$$

$$= 2x^3 - 17x^2 + 6x - 5.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buatlah tabel selisih pembagi dari data berikut.

X	u_x
3	15
-2	5
9	687
0	3
4	47

2) Berdasarkan tabel pada soal No.1, carilah
$\underset{-2}{\triangle} u_3$, $\underset{9}{\triangle} u_{-2}$, $\underset{9,0}{\triangle^2} u_{-2}$, dan $\underset{-2,9,0}{\triangle^3} u_3$.

3) Perhatikan tabel

x	tan x°
30	0,57735
30,5	0,58905
32	0,62487
32,5	0,62973

Jika dimisalkan u_x = tan x°, carilah aproksimasi polinom u_x dengan menggunakan metode selisih pembagi Newton!

4) Gunakan jawaban No. 3 untuk mengaproksimasi nilai dari tan 31° dan tan 31,5°. (Selanjutnya mencari nilai tan 31° dan tan 31,5° dari data yang diberikan seperti itu disebut *menginterpolasi nilai-nilai tangen*).

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Tabel selisih pembagi:

x	u_x	$\triangle u_x$	$\triangle^2 u_x$	$\triangle^3 u_x$
3	15			
		+2		
-2	5		+10	
		+62		+1
9	687		+7	
		+76		+1
0	3		+13	
		+11		
4	47			

a. $\underset{2}{\triangle} u_3 = 2$

b. $\underset{9}{\triangle} u_{-2} = 62$

c. $\underset{9,0}{\triangle^2} u_{-2} = 7$

d. $\underset{-2,9,0}{\triangle^3} u_3 = 1$

2) Tabel selisih pembagi dari tan x° adalah:

x	$u_x = \tan x°$	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
30	0,57735			
		+0,02340		
30,5	0,58905		+0,00024	
		+0,02388		+0,000005
32	0,62487		+0,00025	
		+0,02430		
32,2	0,62973			

Berdasarkan tabel di atas maka aproksimasi polinom u_x adalah:

$$u_x = 0{,}57735 + (x - 30)(0{,}02340) + (x - 30)(x - 30{,}5)(0{,}00024) + (x - 30)(x - 30{,}5)(x - 32)(0{,}000005)$$

3) Nilai tan 31° berdasarkan jawaban soal No.3 adalah:

$$u_{31} = 0{,}57735 + (31 - 30)(0{,}02340) + (31 - 30)(31 - 30{,}5)(0{,}00024) + (31 - 30)(31 - 30{,}5)(31 - 32)(0{,}000005) = 0{,}60087.$$

Untuk nilai tan 31,5°, gunakanlah $u_{31,5}$.

RANGKUMAN

1. Jika a, b, c, ... adalah nilai-nilai argumen dari u_x maka

$$\underset{bc\ldots jk}{\Delta^r} u_x = \frac{u_a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)} + \ldots + \frac{u_k}{(k-a)(k-b)\ldots(k-j)}$$

2. Formula selisih pembagi Newton adalah

$$u_x = u_a + A \underset{b}{\Delta} u_a + AB \underset{bc}{\Delta^2} u_a + ABC \underset{bcd}{\Delta^3} u_a + \ldots + ABC \ldots J \underset{bc\ldots k}{\Delta^n} u_a$$

dengan

$A = x - a$

$B = x - b$

$\vdots$

$K = x - k$

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Perhatikan tabel nilai u_x untuk x yang bersangkutan

x	$\mathbf{u_x}$
2	1
-1	-2
0	1
5	76
3	10

1) Dari tabel di atas, nilai $\underset{5}{\Delta} u_0 = ...$
   A. 1
   B. 3
   C. 15
   D. 33

2) Dari tabel di atas, nilai $\underset{5,3}{\Delta}{}^2 u_0 = ...$
   A. 6
   B. -6
   C. -2
   D. 2

3) Dari tabel di atas, nilai $\underset{0,5,3}{\Delta}{}^3 u_{-1} = ...$
   A. 1
   B. -1
   C. 2
   D. -2

4) Perhatikan tabel nilai u_x dengan nilai x yang bersangkutan

x	$\mathbf{u_x}$
20	24,37
22	49,28
29	162,86
32	240,50

Jika digunakan formula selisih pembagi Newton untuk mengaproksimasi polinom u_x dari data pada tabel di atas maka berikut ini yang benar adalah ....

A. $u_x = 24{,}37 + (x - 20)(11{,}456) + (x - 20)(x - 22)(0{,}419)$
$+ (x - 20)(x - 22)(x - 29)(0{,}242)$

B. $u_x = 24{,}37 + (x - 20)(11{,}456) + (x - 20)(x - 22)(0{,}965)$
$+ (x - 20)(x - 22)(x - 29)(0{,}419)$

C. $u_x = 24{,}37 + (x - 20)(12{,}455) + (x - 20)(x - 22)(16{,}226)$
$+ (x - 20)(x - 22)(x - 29)(0{,}9650)$

D. $u_x = 24{,}37 + (x - 20)(12{,}455) + (x - 20)(x - 22)(0{,}419)$
$+ (x - 20)(x - 22)(x - 29)(0{,}0455)$

5) Hasil interpolasi nilai u_{28} dari tabel pada soal No. 4 adalah ....
A. 124,12
B. 134,12
C. 141,94
D. 154,12

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C. sin 45^0 = 0,707106781.
2) C.
3) C. Diperoleh u = 18; Δ u = ($6v^2$ + 1) Δ v = 1,25 ; dan
   $\frac{\Delta v}{v}.100\% = \frac{1,25}{18}100\% = 6,94\%$
4) C. Penyelesaiannya sama dengan contoh 1.4, diperoleh $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2} . 10^{-3}$ atau $n! > 2 . 10^{-3}$ yang memberikan n = 7.
5) A. x = 4,101, diteliti sampai tiga tempat desimal maka $\Delta x = \frac{1}{2} . 10^{-3} = 0,0005$. Ketelitian relatif = $\frac{0,0005}{4,101} = 0,000122$.

Tes Formatif 2

1) D. $\Delta f(x) = 2(x+1)^3 - (x+1)^2 + 5 - (2x^3 - x^2 + 5)$.
   $= 6x^2 + 4x + 1.$
   $\Delta^2 f(x) = 6(x+1)^2 + 4(x+1) + 1 - (6x^2 + 4x + 1)$.
   $= 12x + 10.$
2) C. Gunakan Teorema 1.8, $\Delta^4 f(x) = -2 . 4! (3)^4$.
3) A. Buatlah tabel selisih fungsi u seperti latihan nomor 3.
4) C. Gunakan tabel pada jawaban nomor 3 di atas.
5) A. Gunakan Teorema 1.8 $\Delta^5 f(x) = -2 . 5! 1^5 = -240$.

Tes Formatif 3

Tabel selisih pembagi dari data adalah:

x	u_x	$\triangle u_x$	$\triangle^2 u_x$	$\triangle^3 u_x$
2	1			
		1		
-1	-2		-1	
		3		1
0	1		2	
		15		1
5	76		6	
		33		
3	10			

1) C $\underset{5}{\triangle} u_0 = \frac{76-1}{5-0} = \frac{75}{5} = 15$
2) A Lihat tabel!
3) A Lihat tabel!

Tabel selisih pembagi dari data adalah:

x	u_x	$\triangle u_x$	$\triangle^2 u_x$	$\triangle^3 u_x$
20	24,37			
		12,455		
22	49,28		0,419	
		16,226		0,0455
29	162,86		0,965	
		25,880		
32	240,50			

4) D Lihat tabel!
5) C Masukkan nilai x = 28 pada jawaban nomor 4.

Daftar Pustaka

Dixon, Charles. (1974). *Numerical Analysis*. London: Blackie.

Sastry, SS. (1983). *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Stanton, Ralph G. (1985). *Numerical Methods for Science and Engineering*. New Delhi: Prentice Hall of India.