Modul 1

Kalkulus Fungsi dari R Ke R^2

Dr. Abadi, M.Sc.

PENDAHULUAN

Pada mata kuliah Kalkulus dasar (Kalkulus I dan Kalkulus II) Anda telah mengenal fungsi dari $A \subset R$ ke R, yaitu fungsi yang bernilai bilangan nyata.

Oleh karena itu, pengertian-pengertian yang terkait, seperti limit, kekontinuan, derivatif, teorema nilai rata-rata, dan sebagainya dianggap telah dipahami. Pengertian-pengertian seperti itu akan dikembangkan di dalam bab ini, untuk fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2 dengan $n \geq 2$: khususnya untuk $n = 2$.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda memiliki kemampuan sebagai berikut.

a. Memberi contoh fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
b. Menentukan daerah hasil (range) dari fungsi vektor $A \subset R$ ke R^2.
c. Menentukan daerah asal (domain) dari fungsi vektor $A \subset R$ ke R^2.
d. Menggambar daerah hasil (range) dari fungsi vektor $A \subset R$ ke R^2.
e. Menuliskan secara simbolik definisi limit fungsi vektor $f : R \rightarrow R^2$.
f. Memberi contoh fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2 yang kontinu di suatu titik.
g. Menghitung limit suatu fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
h. Menentukan semua nilai t dimana fungsi vektor f(t): $A \subset R$ ke R^2 kontinu.
i. Membedakan fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2 yang memiliki limit dengan yang tidak memiliki limit.
j. Menentukan derivatif pertama dari suatu fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
k. Menentukan derivatif tingkat tinggi dari suatu vektor dari $A \subset R$ ke R^2.

l. Menentukan derivatif dari jumlah dua fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
m. Menentukan derivatif dari perkalian skalar dua fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
n. Menentukan derivatif dari perkalian fungsi real dari R ke R dan fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
o. Menentukan vektor singgung satuan dari fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
p. Menentukan vektor normal satuan dari fungsi vektor dari $A \subset R$ ke R^2.
q. Menentukan kecepatan suatu titik di kurva.
r. Menentukan percepatan suatu titik di kurva.
s. Menentukan kelengkungan (*curvature*) kurva di suatu titik.

Kegiatan Belajar 1

Lengkungan di R^2

Ketika kita mempelajari gerak suatu benda seperti gerak pesawat atau gerak planet di orbitnya, posisi benda tersebut, kecepatan dan percepatannya lebih mudah apabila dinyatakan dalam bentuk **vektor**. Vektor-vektor tersebut bergantung pada waktu, yang nanti sangat berguna untuk mendeskripsikan gerakan benda.

Di samping itu, vektor dapat digunakan untuk menyatakan lengkungan sebagai lintasan di R^2. Dengan menggunakan vektor sebagai fungsi untuk menyatakan suatu lengkungan di R^2 kita dapat mengetahui apakah setiap titik pada lengkungan sebagai lintasan di R^2 dilalui tepat sekali, apakah lintasan yang dilalui searah atau berlawanan arah putaran jarum jam, serta di mana titik pangkal dan ujung dari lintasan tersebut. Hal ini berkaitan dengan lintasan sebagai gerak suatu partikel di bidang.

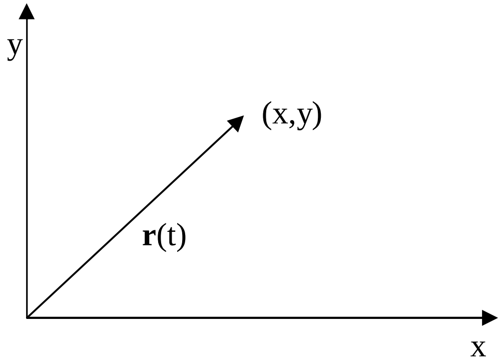
Dari pengertian di atas, setiap titik di R^2 dapat dinyatakan oleh fungsi $\mathbf{f}: A \subset R \rightarrow R^2$, di mana setiap $t \in A$ menentukan dengan tunggal sebuah titik (dalam bentuk pasangan terurut) di R^2. Secara simbolik pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai fungsi berikut.

$$\mathbf{f}(t)=(x(t),y(t)) \in R^2 \tag{1.1}$$

Karena setiap titik pada bidang datar dapat ditentukan kedudukannya terhadap titik pusat $(0,0)$ maka $\mathbf{f}(t)$ dapat dituliskan atau dipandang sebagai vektor posisi.

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \mathbf{r}(t) \tag{1.2}$$

di mana **i** dan **j** merupakan vektor basis di R^2.



Gambar 1.1

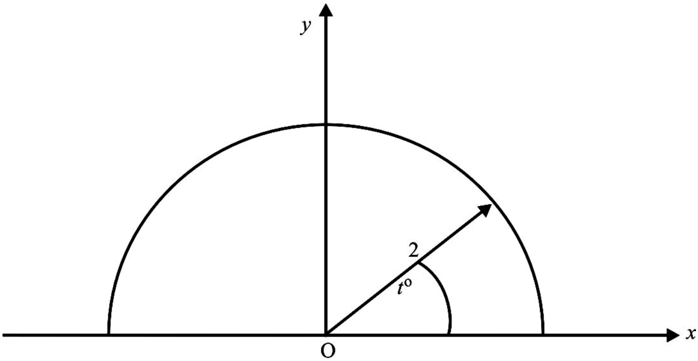
Tidak seperti yang kita artikan pada fungsi dari R ke R, Gambar 1.1 (garis/vektor) bukan merupakan grafik fungsi $\mathbf{f} : A \subset R \to R^2$, melainkan hasil pemetaan setiap titik $t \in A$. Jadi, vektor $\mathbf{r}(t)$ merupakan daerah hasil (*range*) dari fungsi **f**, yaitu pasangan dua bilangan atau vektor posisi $\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \mathbf{r}(t)\end{aligned}$$

Contoh 1.1:
Diketahui fungsi $\mathbf{f} : [0,\pi] \to R^2$ dengan rumus $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ pada bidang datar terhadap sistem koordinat Cartesius xoy.
Karena

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 = 4$$

maka himpunan nilai fungsi **f** tersebut tersajikan sebagai busur setengah lingkaran dengan titik pusat di $O = (0,0)$ berjari-jari 2 dan terletak di atas sumbu datar (lihat Gambar 1.2).



Gambar 1.2

Contoh 1.2.

Diketahui fungsi $\mathbf{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ dengan rumus

$$\mathbf{f}(t) = \left(\frac{1}{t-2}, \sqrt{4+t} \right)$$

Tentukan daerah asal fungsi vektor tersebut.

Penyelesaian:

$\mathbf{f}(t)$ terdefinisi jika $t - 2 \neq 0$ dan $4 + t \geq 0$. Ini berarti bahwa $t \neq 2$ dan $t \geq -4$. Jadi, daerah asal **f** adalah $\{t \in \mathrm{R} : t \geq -4 \text{ dan } t \neq 2\}$

Contoh 1.3.

Diketahui fungsi $\mathbf{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ dengan rumus $\mathbf{f}(t) = (4t^2, 2t)$

Tentukan daerah hasil dari fungsi vektor di atas.

Penyelesaian:

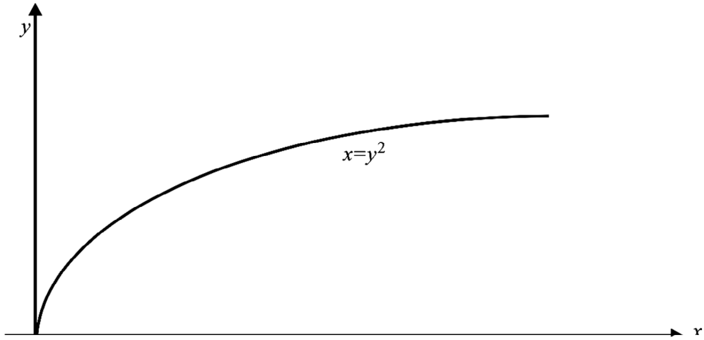
$\mathbf{f}(t) = (4t^2, 2t)$ ini berarti

$x = 4t^2$

$y = 2t$

Apabila nilai t dieleminasi didapat $x = y^2$, persamaan tersebut adalah persamaan parabola. Jadi, daerah hasilnya adalah

$\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : \ x = y^2\}$.



Gambar 1.3

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Berikanlah dua buah contoh fungsi dari R ke R^2.
2) Fungsi $\mathbf{g}: R \to R^2$ didefinisikan oleh:

   $\mathbf{g}(t) = (2\cos t,\ 3\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

   Tentukan dan gambarlah daerah hasil fungsi **g** dibidang xoy.
3) Diketahui fungsi $\mathbf{f}_1$ dan $\mathbf{f}_2$ dari R ke R^2.

   $\mathbf{f}_1(t) = \left(\ln\left(\frac{2}{t}\right),\ (6-t)^{\frac{1}{2}}\right)$ dan $\mathbf{f}_2(t) = (2t, |t|)$

   Tentukan daerah asal dan daerah hasil yang mungkin bagi $\mathbf{f}_1$ dan $\mathbf{f}_2$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Contoh fungsi dari R ke R^2
   a) $\mathbf{f}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$
   b) $\mathbf{f}(t) = 2t\ \mathbf{i} + t\ \mathbf{j}, \quad t \in [0,1]$

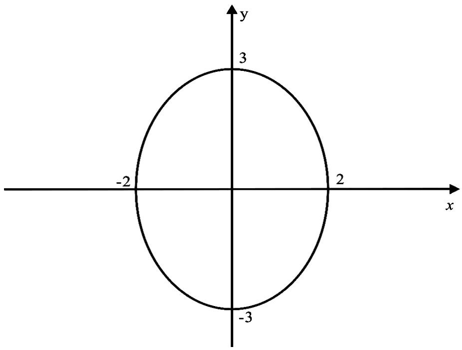
2) Diketahui $\mathbf{g}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Berarti

$$x = 2\cos t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \cos t$$

$$y = 3\sin t \Leftrightarrow \frac{y}{3} = \sin t$$

Karena $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, maka kita peroleh

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, yang merupakan persamaan ellips yang berpusat di $(0,0)$ seperti terlihat pada Gambar 1.4 berikut ini.



Gambar 1.4

3) Kita periksa dahulu daerah di mana $\mathbf{f}_1$ terdefinisi.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{t} > 0 \Rightarrow t > 0 \\ 6 - t \ge 0 \\ t \le 6 \end{array}\right\}$$ Jadi, daerah asal dari $\mathbf{f}_1$ adalah

$$D\mathbf{f}_1 = \{t \in R : 0 < t \le 6\}$$

kemudian kita eliminasi t sebagai berikut.

$$x = \ln \frac{2}{t}$$

$$y = \sqrt{(6-t)}$$

$$y^2 = 6 - t \Rightarrow t = 6 - y^2$$

sehingga kita peroleh

$$x = \ln\left|\frac{2}{6-y^2}\right|$$

Jadi daerah hasil dari $\mathbf{f}_1$ adalah

$$R\mathbf{f}_1 = \left\{(x,y) : x = \ln\left|\frac{2}{6-y^2}\right|\right\}$$

Dengan cara yang sama, kita tentukan daerah asal dari $\mathbf{f}_2$.

Jelas bahwa daerah asal dari $\mathbf{f}_2$ adalah $D\mathbf{f}_2 = \{t \in R\}$ (periksa!)

Kemudian kita tentukan daerah hasilnya dengan mengeliminasi t dari x dan y sebagai berikut.

$$x = 2t \;\rightarrow\; t = \frac{x}{2}$$

$$y = |t|$$

$$y = \left|\frac{x}{2}\right|, \quad x \in R \;;\; y \geq 0$$

Jadi, daerah asal adalah $D\mathbf{f}_2 : \{t \in R\}$

$$R\mathbf{f}_2 : \left\{(x,y) : y = \left|\frac{x}{2}\right|\right\}$$

RANGKUMAN

Setiap bilangan nyata dapat disajikan sebagai titik pada garis lurus dan setiap pasangan dua bilangan nyata dapat disajikan sebagai titik pada bidang datar, terhadap suatu sistem koordinat; dan juga sebaliknya.

Jika $\mathbf{f}$ fungsi dari himpunan tak kosong $A \subset R$ ke R^2 maka setiap $t \in A$ menentukan dengan tunggal sepasang dua bilangan atau titik dalam R^2:

$$\mathbf{f}(t) = \big(x(t),\; y(t)\big) \in R^2$$

atau sebagai vektor posisi:

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \mathbf{r}(t)$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Berikut ini merupakan fungsi vektor dari R ke R^2 , *kecuali* ....

   A. $\mathbf{f}(t) = \left(\ln 2t^{-1}, (6-t)^{\frac{1}{2}}\right), \quad t \in [0, \infty)$

   B. $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

   C. $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$

   D. $\mathbf{f}(t) = (t+2)\mathbf{i} + \left(t^2 - 2t\right)\mathbf{j}, \quad t \in \mathrm{R}$

2) Daerah hasil dari fungsi vektor $\mathbf{g}(t) = (4\cos t, 4\sin t)$ di bidang xoy adalah ....

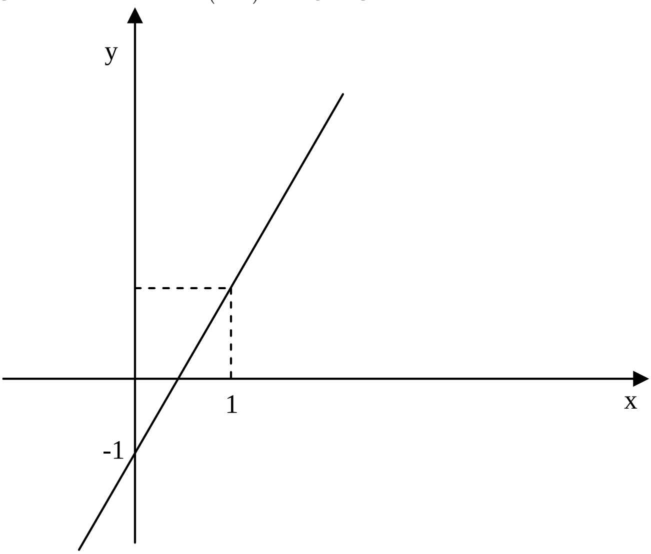
   A. garis lurus yang melalui titik $(4,0)$ dan $(0,4)$

   B. lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari 4

   C. lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari 2

   D. garis lurus melalui $(0,0)$ dengan gradien 4

3)



Gambar 1.5

Grafik di atas ini merupakan daerah hasil dari fungsi vektor dengan persamaan ....

A. $\mathbf{f}(t)=(t,\ 2t+1)$

B. $\mathbf{f}(t)=(2t,\ 2t+1)$

C. $\mathbf{f}(t)=(2t+1,\ t)$

D. $\mathbf{f}(t)=(t+1,\ 2t)$

4) Daerah asal dari $\mathbf{f}: R \to R^2$; $\mathbf{f}(t)=\left(|t|, -\sqrt{t^2+1}\right)$ adalah ....

A. $\{t \in R : t \geq 1\}$

B. $\{t \in R\}$

C. $\{t \in R : t \geq 0\}$

D. $\{t \in R : 0 \leq t \leq 1\}$

5) Diantara fungsi-fungsi vektor berikut yang mempunyai daerah asal $\{t \in R : -t \leq t \leq 1\}$ adalah ....

A. $\mathbf{f}(t)=\left(\frac{2}{t}, \sqrt{t^2-1}\right)$

B. $\mathbf{g}(t)=\left(\cos t,\ \frac{1}{\sin t}\right)$

C. $\mathbf{h}(t)=\left(e^{-t}, e^{t}\right)$

D. $\mathbf{m}(t)=\left(\ln t, \sqrt{t^2-1}\right)$

6) Daerah hasil dari fungsi vektor $\mathbf{f}: R \to R^2$,
$\mathbf{f}(t)=(t-1)\mathbf{i}+\left(t^2-1\right)\mathbf{j},\quad -2 \leq t \leq 2$ adalah ....

A. $\{(x,y) \in R^2 : -3 \leq x \leq 1,\ y = x^2 + x\}$

B. $\{(x,y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 3,\ y = x^2 + x\}$

C. $\{(x,y) \in R^2 : -3 \leq x \leq 1,\ y = x^2 - 2x\}$

D. $\{(x,y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 3,\ y = x^2 - 2x\}$

7) Yang merupakan daerah hasil dari fungsi vektor

$\mathbf{f}(t) = (-\sin 2t)\,\mathbf{i} + (\cos 2t)\,\mathbf{j},\ -\frac{1}{4}\pi \le t \le \frac{1}{4}\pi$, adalah ....

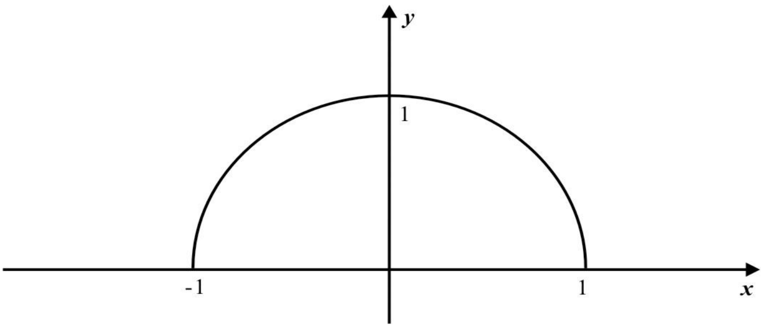
A. $\left\{(x, y) \in R^2 : -1 \le x \le 1,\quad y \ge 0\right\}$

B. $\left\{(x, y) \in R^2 : y \ge 0,\quad y^2 + x^2 = 1\right\}$

C. $\left\{(x, y) \in R^2 : y^2 + x^2 = 1,\quad x \ge 0\right\}$

D. $\left\{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{1 - x^2}\right\}$

8)



Gambar 1.6

Kurva di atas merupakan daerah hasil fungsi vektor berikut, *kecuali* ....

A. $\mathbf{f}(t) = (\cos t,\ \sin t), \qquad 0 \le t \le \pi$

B. $\mathbf{g}(t) = (-\sin 2t,\ \cos 2t), \qquad -\frac{1}{4}\pi \le t \le \frac{1}{4}\pi$

C. $\mathbf{h}(t) = (\sin t,\ \cos t), \qquad -\frac{1}{2}\pi \le t \le \frac{1}{2}\pi$

D. $\mathbf{m}(t) = (\cos 2t,\ \sin 2t), \qquad 0 \le t \le \frac{1}{4}\pi$

9) Daerah asal dari $\mathbf{f} : R \to R^2;\ \mathbf{f}(t) = \left(\ln\left(\frac{1}{t^2}\right), \sqrt{2 - t} \right)$ adalah ....

A. $\{t \in R : t \ne 0 \wedge t \le 2\}$

B. $\{t \in R : t \ne 0 \wedge t \le -2\}$

C. $\{t \in R : t \neq 0 \wedge t \geq 2\}$

D. $\{t \in R : t \neq 0 \wedge t \geq -2\}$

10) Daerah hasil dari $\mathbf{f} : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}^2$; $\mathbf{f}(\mathrm{t}) = \left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{t}^2}\right), \sqrt{2-\mathrm{t}} \right)$ adalah ....

A. $\left\{ (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in R^2 : \mathrm{x} = \ln\left|\frac{1}{(2-\mathrm{y})}\right|, y \neq 2 \right\}$

B. $\left\{ (\mathrm{x},\mathrm{y}) : \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2 = \ln\left|\frac{1}{(2-\mathrm{y})^2}\right|, y \neq 2 \right\}$

C. $\left\{ (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in R^2 : \mathrm{x} = \ln\left|\frac{1}{(2-\mathrm{y}^2)}\right|, y \neq \pm\sqrt{2} \right\}$

D. $\left\{ (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in R^2 : \mathrm{x} = \ln\left|\frac{1}{(2-\mathrm{y}^2)^2}\right|, y \neq \pm\sqrt{2} \right\}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Limit dan Kekontinuan

Jarak antara titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) di dalam bidang datar adalah

$$\left|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\right| = \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

Jika $\left|(x, y)\right|$ diartikan sebagai jarak dari titik (x, y) dan titik $(0,0)$, mudah dipahami bahwa pengertian jarak itu memenuhi aksioma-aksioma:

(i) $\left|(x, y)\right| \geq 0$

$\left|(x, y)\right| = 0$ jika dan hanya jika $(x, y) = (0,0)$

(ii) $\left|\alpha(x, y)\right| = |\alpha|\left|(x, y)\right|$ untuk setiap skalar α.

(iii) $\left|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right| \leq \left|(x_1, y_1)\right| + \left|(x_2, y_2)\right|$

Dengan menggunakan pengertian jarak tersebut pengertian limit fungsi dari $A \subset R$ ke R^2 disusun sebagai berikut.

Definisi 1.1:

Fungsi $\mathbf{f} : A \subset R \to R^2$ dikatakan mempunyai limit (x_0, y_0) untuk t mendekati t_0 ditulis dengan

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \to t_0}\left(x(t),\ \ y(t)\right) = (x_0, y_0)$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $t \in D_f = A$, $t \neq t_0$, dan $\left|t - t_0\right| < \delta$ berakibat

$$\left|\mathbf{f}(t) - (x_0, y_0)\right| = \left|\left(x(t),\ y(t)\right) - (x_0, y_0)\right| < \varepsilon$$

Contoh 1.4.

Fungsi **f** dengan rumus

$$\mathbf{f}(t) = \left(t,\ \frac{t^2 - 1}{t - 1}\right)$$

mempunyai limit $(1,2)$ untuk t → 1, seperti yang ditunjukkan berikut ini. Ambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Akan dicari bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $t \in D_f = R - \{1\}$, dan $|t-1| < \delta$ berakibat

$$\left|\mathbf{f}(t) - (1,2)\right| = \left|\left(t, \frac{t^2-1}{t-1}\right) - (1,2)\right| < \varepsilon$$

Pertidaksamaan terakhir ekuivalen dengan

$$\left|(t-1), (t+1-2)\right| < \varepsilon$$

$$\left|(t-1), (t-1)\right| < \varepsilon$$

$$\left((t-1)^2 + (t-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\left(2(t-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad \text{maka } |t-1| < \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$$

Jadi, dengan mengambil $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$ diperoleh $|t-1| < \delta$ berakibat pertidaksamaan $\left|\mathbf{f}(t) - (1,2)\right| < \varepsilon$ berlaku, seperti disyaratkan.

Sejalan dengan pengertian kekontinuan pada kalkulus dasar maka fungsi dari $A \subset R$ ke R^2 dikatakan *kontinu* di $t_0 \in A$ jika nilai fungsi **f** di t_0 sama dengan nilai limit $\mathbf{f}(t)$ untuk $t \to t_0$; jadi

$$\mathbf{f}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) \tag{1.4}$$

atau

$$\left(x(t_0), y(t_0)\right) = \lim_{t \to t_0} \left(x(t), y(t)\right) \tag{1.5}$$

Demikian pula, jika fungsi **f** kontinu di setiap titik di dalam $B \subset A = D_f$ dikatakan fungsi **f** *kontinu pada B.*

Contoh 1.5.

Kembali kita cermati fungsi **f**:

$$\mathbf{f}(t) = \left(t, \frac{t^2-1}{t-1}\right)$$

Fungsi **f** tidak kontinu di t = 1 sebab $\mathbf{f}(t)$ tak terdefinisikan di 1. Dapat pula ditunjukkan bahwa

$$\lim_{t\to1}\mathbf{f}(t)=\lim_{t\to1}\left(t,\ \frac{t^2-1}{t-1}\right)=\left(\lim_{t\to1}t,\ \lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{t-1}\right)=(1,2)$$

Jadi, jelas bahwa $\lim_{t\to1}\mathbf{f}(t)\neq\mathbf{f}(1)$.

Mudah diperlihatkan bahwa

$$\lim_{t\to0}\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(0)$$

Oleh karena itu, fungsi **f** kontinu di 0.

Contoh 1.6.

Fungsi **g** didefinisikan

$$\mathbf{g}(\theta)=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\text{dengan } D_g=[0,2\pi].$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa **g** kontinu di setiap $\theta\in D_g$. Jadi, dikatakan bahwa fungsi **g** tersebut kontinu di $[0,2\pi]$.

Teorema 1.1.

Diketahui fungsi **f** dari $A\subset R$ ke R^2.
Jika $\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)$ ada maka limit itu tunggal.

Bukti:

Untuk membuktikan ketunggalan nilai limit dari **f** di titik t_0, kita gunakan metode kontradiksi. Andaikan ada dua nilai limit dari **f** di titik t_0, yaitu l dan m. Karena limit dari **f** ada maka untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ dapat diperoleh bilangan $\delta_1>0$ dan $\delta_2>0$ sehingga untuk

a) $t\in D_f=A,\ t\neq t_0$ dan $|t-t_0|<\delta_1$ berakibat $|\mathbf{f}(t)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

b) $t\in D_f=A,\ t\neq t_0$ dan $|t-t_0|<\delta_2$ berakibat $|\mathbf{f}(t)-M|<\frac{\varepsilon}{2}$

Ambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ maka untuk $t \in D_f = A,\ t \neq t_0$ dan $|t - t_0| < \delta$

berakibat $|L - M| = |L - \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t) - M| \leq |\mathbf{f}(t) - L| + |\mathbf{f}(t) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Karena ε dapat dipilih sekecil mungkin maka $|L - M| < \varepsilon \Rightarrow L = M$.

Pada bagian ini disajikan beberapa teorema mengenai limit dan kekontinuan fungsi dari R ke R^2, tetapi terlebih dahulu didefinisikan sifat-sifat aljabar fungsi dari R ke R^2 sebagai berikut.

Jika diketahui fungsi **f** dan g dengan $D_f \cap D_g \neq \phi$, dan

$\mathbf{f}(t) = (x_1(t),\ y_1(t))$, $\mathbf{g}(t) = (x_2(t),\ y_2(t))$, didefinisikan

(i) $(\alpha\mathbf{f})(t) = \alpha\mathbf{f}(t) = \alpha(x_1(t),\ y_1(t)) = (\alpha x_1(t),\ \alpha y_1(t))$ untuk setiap bilangan α dan $t \in D_{\alpha f} = D_f$

(ii) $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = (x_1(t),\ y_1(t)) + (x_2(t),\ y_2(t))$

$= (x_1(t) + x_2(t),\ y_1(t) + y_2(t))$ untuk setiap $t \in D_{f+g} = D_f \cup D_g$

(iii) $(\mathbf{f}.\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t).\mathbf{g}(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$

untuk setiap $t \in D_{f.g} = D_f \cap D_g$

Teorema 1.2.

Diketahui f dan g fungsi dari R ke R^2 yang didefinisikan

$\mathbf{f}(t) = (x_1(t),\ y_1(t))$ dan $\mathbf{g}(t) = (x_2(t),\ y_2(t))$.

Jika $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = (x', y')$ dan $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{g}(t) = (x'', y'')$

Maka

(i) $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha\mathbf{f}(t) = \alpha \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \alpha(x', y')$

(ii) $\lim\limits_{t \to t_0} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{g}(t)$

$$= (x', y') + (x'', y'')$$

$$= (x' + x'',\ y' + y'')$$

(iii) $\lim\limits_{t \to t_0} [\mathbf{f}(t).\mathbf{g}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t).\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{g}(t)$

$$= (x', y').(x'', y'')$$

$$= x'x'' + y'y''$$

Bukti:
Cukup dibuktikan (ii), bukti yang lain diserahkan kepada pembaca.
Ambil bilangan $\varepsilon > 0$. Menurut yang diketahui, ada bilangan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga

$$\left|\mathbf{f}(t) - (x', y')\right| = \left|\left(x_1(t),\ y_1(t)\right) - (x', y')\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $t \in D_f$, $t \neq t_0$, dan $\left|t - t_0\right| < \delta_1$, dan

$$\left|\mathbf{g}(t) - (x'', y'')\right| = \left|\left(x_2(t),\ y_2(t)\right) - (x'', y'')\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $t \in D_g$, $t \neq t_0$, dan $\left|t - t_0\right| < \delta_2$, dengan mengambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) - (x' + x'',\ y' + y'')\right| \\
&= \left|\left(x_1(t),\ y_1(t)\right) - (x', y') + \left(x_2(t),\ y_2(t)\right) - (x'', y'')\right| \\
&\leq \left|\left(x_1(t),\ y_1(t)\right) - (x', y')\right| + \left|\left(x_2(t),\ y_2(t)\right) - (x'', y'')\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

untuk setiap $t \in D_{f+g} = D_f \cup D_g$, $t \neq t_0$, dan $\left|t - t_0\right| < \delta$.

Dari pernyataan terakhir, dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{t \to t_0}\left[\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)\right] = (x' + x'',\ y' + y'') = \lim_{t \to t_0}\mathbf{f}(t) + \lim_{t \to t_0}\mathbf{g}(t)$$

Teorema 1.3.

Misalkan $\mathbf{f}(t) = \left(x(t),\ y(t)\right)$

$\lim\limits_{t \to t_0}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\right) = (x_0, y_0)$ jika dan hanya jika

$\lim\limits_{t \to t_0}\mathbf{x}(t) = x_0$ dan $\lim\limits_{t \to t_0}\mathbf{y}(t) = y_0$

Bukti:

(1) Pertama akan dibuktikan jika $\lim\limits_{t \to t_0}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\right) = (x_0, y_0)$ maka $\lim\limits_{t \to t_0}\mathbf{x}(t) = x_0$ dan $\lim\limits_{t \to t_0}\mathbf{y}(t) = y_0$.

Dari yang diketahui, apabila kita mengambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap $t \in D_f$, $t \neq t_0$ dan $|t - t_0| < \delta_1$, mengakibatkan

$$\left|(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) - (x_0, y_0)\right| = \left[(\mathbf{x}(t) - x_0)^2 + (\mathbf{y}(t) - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Jelas bahwa

$$\left|(\mathbf{x}(t) - x_0)\right| = \left[(\mathbf{x}(t) - x_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[(\mathbf{x}(t) - x_0)^2 + (\mathbf{y}(t) - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

dan

$$\left|\mathbf{y}(t) - y_0\right| = \left[(\mathbf{y}(t) - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[(\mathbf{x}(t) - x_0)^2 + (\mathbf{y}(t) - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap $t \in D_x = D_y = D_f$, $t \neq t_0$, dan $|t - t_0| < \delta_1$ berlaku $\left|(\mathbf{x}(t) - x_0)\right| < \varepsilon$ dan $\left|(\mathbf{y}(t) - y_0)\right| < \varepsilon$ atau $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{x}(t) = x_0$ dan $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{y}(t) = y_0$.

(2) Sekarang akan dibuktikan jika $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{x}(t) = x_0$ dan $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{y}(t) = y_0$ maka $\lim\limits_{t \to t_0} (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = (x_0, y_0)$

Menurut yang diketahui, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_2 > 0$ dan $\delta_3 > 0$ sehingga untuk setiap

(i) $t \in D_x$, $t \neq t_0$, dan $|t - t_0| < \delta_2$ mengakibatkan $|\mathbf{x}(t) - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

(ii) $t \in D_f$, $t \neq t_0$, dan $|t - t_0| < \delta_3$ mengakibatkan $|\mathbf{y}(t) - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Selanjutnya dari (i) dan (ii) menghasilkan: untuk setiap $t \in D_f = D_x = D_y$, $t \neq t_0$, dan $|t - t_0| < \delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ mengakibatkan

$$\begin{aligned}
\left|(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) - (x_0, y_0)\right| &= \left|(\mathbf{x}(t) - x_0) + (\mathbf{y}(t) - y_0)\right| \\
&\leq \left|(\mathbf{x}(t) - x_0)\right| + \left|(\mathbf{y}(t) - y_0)\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $t \in D_f = D_x = D_y$, $t \neq t_0$, dan $|t - t_0| < \delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ mengakibatkan

$$\left|(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) - (x_0, y_0)\right| < \varepsilon \text{ atau } \lim_{t \to t_0} (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = (x_0, y_0)$$

Dengan menggunakan Teorema 1.3, dapat dibuktikan dengan mudah Teorema 1.2, sedangkan akibat langsung dari Teorema 1.3 adalah Teorema 1.4 berikut.

Teorema 1.4.

Fungsi f dari $A \subset R$ ke R^2

$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$

dikatakan kontinu di $t_0 \in A$ jika dan hanya jika fungsi **x** dan **y** masing-masing kontinu di t_0.

Untuk lebih memahami Teorema-teorema di atas, sebaiknya Anda mencermati contoh aplikasinya berikut ini.

Contoh 1.7.

Fungsi **f**: $R \to R^2$ didefiniskan $\mathbf{f}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)$

Tentukan $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{6}} \mathbf{f}(t)$ dan periksalah kekontinuan **f** di $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Penyelesaian:

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{6}} 2\cos t = \sqrt{3}$ dan $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{6}} 2\sin t = 1$

maka $\mathbf{f}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)$ menurut Teorema 1.3,

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{6}} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{6}} (2\cos t,\ 2\sin t) = (\sqrt{3}, 1)$$

dan menurut Teorema 1.4

fungsi **f** kontinu di $t = \dfrac{\pi}{6}$ karena $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{6}} 2\cos t, = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ dan

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{6}} 2\sin t = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

Contoh 1.8.

Hitunglah $\lim\limits_{t \to t_0} \left(2\cos t\,\mathbf{i} + \dfrac{\sin t}{t}\mathbf{j}\right)$

Penyelesaian:

Menurut Teorema 1.3 (ii)

$$\lim_{t\to t_0}\left(2\cos t\,\mathbf{i}+\frac{\sin t}{t}\mathbf{j}\right)=\left[\lim_{t\to 0}2\cos t\right]\mathbf{i}+\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right]\mathbf{j}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

Batas atas dan batas bawah

Fungsi dari $A\subset R$ ke $R^2:\mathbf{f}(t)=(\mathbf{x}(t),\,\mathbf{y}(t))$

dikatakan terbatas pada $B\subset A=D_f$ jika ada bilangan $M>0$ sehingga untuk setiap $t\in B$ berlaku

$$|\mathbf{f}(t)|=|(\mathbf{x}(t),\,\mathbf{y}(t))|\le M \tag{1.6}$$

Karena

$$|(\mathbf{x}(t),\,\mathbf{y}(t))|=\left[|\mathbf{x}(t)|^2+|\mathbf{y}(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Dapat diartikan bahwa **f** merupakan fungsi terbatas pada B jika dan hanya jika x dan y masing-masing merupakan fungsi terbatas pad B. Selanjutnya jika **f** merupakan fungsi vektor yang kontinu pada selang tertutup, maka berlaku teorema berikut ini.

Teorema 1.5.

Jika fungsi $\mathbf{f}:[a,b]\subset R\to R^2$ kontinu pada $[a,b]$ maka terdapat $t_0\in[a,b]$ sehingga $|\mathbf{f}(t_0)|=|(\mathbf{x}(t_0),\,\mathbf{y}(t_0))|=\sup\{|\mathbf{f}(t)|:t\in[a,b]\}$

Bukti:

Karena **f** kontinu pada $[a,b]$ maka fungsi **x** dan fungsi **y** masing-masing merupakan fungsi kontinu dan terbatas pada $[a,b]$.

Hal ini mengakibatkan pada fungsi **g**:

$$\mathbf{g}(t)=\left[(\mathbf{x}(t))^2+(\mathbf{y}(t))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

merupakan fungsi kontinu dan terbatas pada selang tertutup $[a,b]$. Jadi, terdapat $t_0\in[a,b]$ sehingga

$$\mathbf{g}(t_0)=\sup\{\mathbf{g}(t):t\in[a,b]\}$$

Karena

$$\left|\mathbf{f}(t)\right| = \left|\left(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{y}(t)\right)\right| = \left[\left(\mathbf{x}(t)\right)^2 + \left(\mathbf{y}(t)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathbf{g}(t)$$

maka diperoleh

$$\left|\mathbf{f}(t_0)\right| = \mathbf{g}(t_0) = \sup\left\{\mathbf{g}(t) : t \in [a,b]\right\}$$
$$= \sup\left\{\left|\mathbf{f}(t)\right| : t \in [a,b]\right\}$$

Contoh 1.9.

Jika $a > b > 0$, tentukan nilai t_0, sehingga

$$\left|\mathbf{f}(t_0)\right| = \sup\left\{\mathbf{f}(t) : t \in [0, 2\pi]\right\}$$

dengan $\mathbf{f}(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$.

Penyelesaian:

$\mathbf{f}$ memenuhi syarat Teorema 1.5. Hal ini berarti eksistensi t_0 dijamin.

Jika $\mathbf{g}(t) = \left|\mathbf{f}(t)\right| = \left(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}$

maka $\mathbf{g}(t)$ mencapai nilai ekstrim jika $\mathbf{g}'(t) = 0$, jadi

$$\mathbf{g}'(t) = \frac{-a^2\cos t.\sin t + b^2\sin t.\cos t}{\left\{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right\}^{\frac{1}{2}}} = 0$$

yang berakibat

$$\left(b^2 - a^2\right)\sin t\cos t = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\sin 2t = 0$$

Jadi, $\mathbf{g}(t)$ mencapai nilai ekstrim pada $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$.

Hal ini berarti nilai-nilai ekstrim dari $\mathbf{g}(t)$ adalah

$$\mathbf{g}(0) = a,\ \mathbf{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = b,\ \text{dan}\ \mathbf{g}(\pi) = a$$

Karena diketahui $a > b$, dapat disimpulkan bahwa untuk $t_0 = 0$ atau $t_0 = \pi$ diperoleh $\left|\mathbf{f}(t_0)\right| = \sup\left\{\left|\mathbf{f}(t)\right| : t \in [0, 2\pi]\right\} = a$ atau $\left|\mathbf{f}(t)\right|$ mencapai nilai maksimum.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui fungsi vektor

$$\mathbf{F}(t)=\begin{cases}\left(t\sin\frac{1}{t}\right)\mathbf{i}+\left(t\cos\frac{1}{t}\right)\mathbf{j} & , \quad t\neq 0\\ 0 & , \quad t=0\end{cases}$$

Tunjukkan bahwa **F** kontinu di $t=0$

2) Tentukan limit berikut.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\mathbf{i}+t\,e^{-t}\mathbf{j}\right)$$

3) Tentukan semua nilai t sehingga **F** kontinu:

$$\mathbf{F}(t)=\sqrt{t-\frac{1}{t}}\,\mathbf{i}+\sqrt{1-t}\,\mathbf{j}$$

4) Diketahui fungsi vektor:

$$\mathbf{F}(t)=\begin{cases}\mathbf{i}+\left(t^2-1\right)\mathbf{j}, & 0\leq t<2\\ (2-t)\mathbf{i}+3t\mathbf{j}, & 2\leq t\leq 3\end{cases}$$

a) Hitunglah $\lim\limits_{t\to 2^-}\dfrac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(2)}{t-2}$ dan $\lim\limits_{t\to 2^+}\dfrac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(2)}{t-2}$

b) Selidiki apakah $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(2)}{t-2}$ ada

c) Tentukan semua nilai t sehingga fungsi **F** kontinu.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $$\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t)=\lim_{t\to 0}\left(t\sin\frac{1}{t}\right)\mathbf{i}+\left(t\cos\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$$

periksa kekontinuan tiap komponen dari **F**:

$$0 \le \lim_{t\to 0}\left(t\sin\frac{1}{t}\right) \le \lim_{t\to 0} t = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(t\sin\frac{1}{t}\right) = 0$$

dengan cara yang sama $\lim\limits_{t\to 0}\left(t\cos\frac{1}{t}\right) = 0$

jadi $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{F}(t) = 0 = \mathbf{F}(0)$

jadi $\mathbf{F}(t)$ kontinu di $t = 0$

2) Hitung dahulu limit tiap komponen fungsinya:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1 \quad \text{(Teorema L'Hospital)}$$

$$\lim_{t\to 0} t\,e^{-t} = 0.1 = 0$$

jadi $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\mathbf{i} + t\,e^{-t}\mathbf{j}\right) = (1,0)$

3) Periksa dahulu kekontinuan tiap-tiap komponennya:

$$\sqrt{t-\frac{1}{t}} \ge 0 \Leftrightarrow t-\frac{1}{t} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 1 \text{ atau } t \le -1$$

$$\sqrt{1-t} \ge 0 \Leftrightarrow 1-t \ge 0 \Leftrightarrow t \le 1$$

Dari kedua perhitungan di atas, diperoleh irisan dari kedua hasil di atas yaitu $t = 1$ atau $t \le -1$. Jadi **F** hanya kontinu di t = 1 dan di $t \le -1$.

4) a) $\lim\limits_{t\to 2^-}\dfrac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2^-}\dfrac{\mathbf{i}+\left(t^2-1\right)\mathbf{j}-(\mathbf{i}+(0-1)\mathbf{j}}{t-2} = \dfrac{t^2\mathbf{j}}{t-2}$

$$\lim_{t\to 2^+}\frac{(2-t)\mathbf{i}+(3t-6)\mathbf{j}}{t-2} = \lim_{t\to 2^+}\frac{(2-t)\mathbf{i}+(3t-6)\mathbf{j}-((2-2)\mathbf{i}+(3t-6)\mathbf{j}}{t-2}$$

$$= \lim_{t\to 2^+}\frac{(2-t)\mathbf{i}+(3t-6)\mathbf{j}-((2-2)\mathbf{i}+(6-6)\mathbf{j}}{t-2} = \frac{(2-t)\mathbf{i}+(3t-6)\mathbf{j}}{t-2}$$

$$= -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

b) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(2)}{t-2}$ tidak ada

c) $\mathbf{F}(t)=\begin{cases}\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j} & 0\le t<2\\ (2-t)\mathbf{i}+3t\mathbf{j} & 2<t\le 3\end{cases}$

Jadi, **F** kontinu di selang $0\le t<2$ dan di selang $2<t\le 3$.

RANGKUMAN

Jarak dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) di dalam bidang datar adalah

$$\left|(x_2, y_2)-(x_1, y_1)\right|=\left((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Fungsi $\mathbf{f}: A\subset R\to R^2$ dikatakan mempunyai limit (x_0, y_0) untuk t mendekati t_0

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\lim_{t\to t_0}(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))=(x_0, y_0),$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga jika $t\in D_f=A$, $t\ne t_0$, dan $|t-t_0|<\delta$ mengakibatkan

$$\left|\mathbf{f}(t)-(x_0, y_0)\right|=\left|(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))-(x_0, y_0)\right|<\varepsilon$$

Jika $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)$ ada maka limit itu tunggal.

Jika $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=(x', y')$ dan $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)=(x'', y'')$

maka

(i) $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha\mathbf{f}(t)=\alpha\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\alpha(x', y')$

(ii) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)=(x'+x'',\ y'+y'')$

(iii) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\mathbf{f}(t).\mathbf{g}(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t).\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)=x'x''+y'y''$

$\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))=(x_0, y_0)$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=x_0$ dan $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{y}(t)=y_0$.

$\mathbf{f}(t)=(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))$ kontinu di $t_0\in A$ jika dan hanya fungsi **x** dan **y** masing-masing kontinu di t_0.

Jika fungsi $\mathbf{f}:[a,b]\subset R$ ke R^2 kontinu pada $[a,b]$ maka terdapat $t_0 \in [a,b]$ sehingga $\left|\mathbf{f}(t_0)\right| = \left|(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{y}(t_0))\right| = \sup\left\{\left|\mathbf{f}(t)\right| : t\in[a,b]\right\}$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Berikut ini merupakan fungsi vektor yang kontinu di titik t = 1, *kecuali* ....
   A. $F(t) = \sqrt{t^2-1}\,\mathbf{i} + \sqrt{\dfrac{t^2-1}{t+1}}\,\mathbf{j}$
   B. $G(t) = \dfrac{1-t^2}{t}\mathbf{i} + \dfrac{t-1}{t+1}\mathbf{j}$
   C. $H(t) = \left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)\mathbf{i} + (t+1)\,\mathbf{j}$
   D. $K(t) = \ln(t-1)\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$

2) Diketahui fungsi vektor
   $$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin\dfrac{1}{t}\right)\mathbf{i} + \left(t^2\cos\dfrac{1}{t}\right)\mathbf{j}, & t\neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$
   $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{F}(t) = \cdots$
   A. ∞
   B. 0
   C. t^2
   D. t

3) Diketahui fungsi vektor
   $$F(t) = \frac{e^t-1}{t}\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$$
   nilai t pembuat fungsi F kontinu adalah ....
   A. $\{t\in R: -\infty < t < \infty\}$
   B. $\{t \in R: t\neq 0\}$

C. $\{t \in R : t \geq 0\}$

D. $\{t \in R : -1 \leq t < 1\}$

4) Berikut ini merupakan fungsi $F(t)$ yang mempunyai limit untuk $t \to 0$, *kecuali* ....

A. $F(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(t^2+1)}{t}\mathbf{i} + \dfrac{e^{2t}-1}{t}\mathbf{j}, & t \neq 0 \\ 2\mathbf{j}, & t = 0 \end{cases}$

B. $F(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}\mathbf{i} + \dfrac{e^{t}}{t}\mathbf{j}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

C. $F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{i} + \dfrac{e^{t}}{t}\mathbf{j}, & t \neq 0 \\ \mathbf{i}+\mathbf{j}, & t = 0 \end{cases}$

D. $F(t) = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}, \quad t \in R$

5) Fungsi $F(t) = \left(e^t, \dfrac{t^2-1}{t-1}\right)$ mempunyai sifat berikut ini, *kecuali* ....

A. kontinu di $t = 0$
B. kontinu di $t = 1$
C. $\lim\limits_{t\to 2} F(t) = F(2)$
D. $\lim\limits_{t\to 3} F(t) = F(3)$

6) Nilai $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{2\sin t}{t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{\tan 2t}\mathbf{j}\right)$ adalah ....

A. 0
B. $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
C. $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
D. $2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

7) Diketahui $\mathbf{f}(t) = (at, bt)$ kontinu pada [a,b].

Jika $|\mathbf{f}(t_0)| = \sup\{\mathbf{f}(t) : t \in [-1,1]\}$ maka t_0 = ...

A. 0
B. 1
C. a
D. b

8) Jika $\mathbf{f}(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$ dan $\mathbf{g}(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ maka

$\lim\limits_{t \to 0} [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)] = \cdots$

A. 0
B. 1
C. $(0,1)$
D. $(1,1)$

9) Fungsi **f** dari $A \subset R$ ke R^2 didefinisikan sebagai

Jika $\mathbf{f}(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1-t} + \sqrt{2-t} \text{ , } \ln t + e^{-t} \right)$, maka $\lim\limits_{t \to 1} \mathbf{f}(t) = \cdots$

A. $(1, e^{-1})$
B. $(3, e^{-1})$
C. $(1,1)$
D. $(1,3)$

10) Jika fungsi $\mathbf{F}(t) = \left(\dfrac{\sin t}{\tan t}, \dfrac{\cot t}{\cos t} \right)$ maka $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} \mathbf{F}(t) = \cdots$

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} \mathbf{F}(t) = ...$

A. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$

B. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2} \right)$

C. $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

D. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Derivatif

Misalkan **f** suatu fungsi dari $A \subset R$ ke R^2, dengan $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$. Derivatif fungsi f di $t_0 \in A = D_f$ adalah nilai, berupa vektor atau titik di dalam R^2

$$\frac{d\mathbf{f}(t_0)}{dt} = \mathbf{f}'(t_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\{\mathbf{f}(t_0 + r) - \mathbf{f}(t_0)\}}{r} \tag{1.6}$$

jika ada. Jadi, menurut pengertian itu dan teorema 1.4 diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}(t_0)}{dt} &= \mathbf{f}'(t_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\{\mathbf{f}(t_0 + r) - \mathbf{f}(t_0)\}}{r} \\ &= \lim_{r \to 0} \left(\frac{\mathbf{x}(t_0 + r) - \mathbf{x}(t_0)}{r}, \frac{\mathbf{y}(t_0 + r) - \mathbf{y}(t_0)}{r} \right) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{x}(t_0)}{dt}, \frac{d\mathbf{y}(t_0)}{dt} \right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dalam bentuk umum jika fungsi **f** mempunyai derivatif di titik $t \in D_f$, diperoleh

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \mathbf{f}'(t) = \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right) \tag{1.8}$$

Menurut penjelasan tersebut di atas, diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 1.6.

Jika diketahui fungsi dari $A \subset R$ ke R^2 :

$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$

maka $\mathbf{f}'(t_0)$ ada jika dan hanya jika $\mathbf{x}'(t_0)$ dan $\mathbf{y}'(t_0)$ ada.

Contoh 1.8.

Jika $\mathbf{f}(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$ untuk semua nilai t, tentukan $\dfrac{d\mathbf{f}}{dt}$.

Penyelesaian:

Dari (1.7) diperoleh

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(a\cos t,\ b\sin t)=\left(\frac{d}{dt}(a\cos t),\ \frac{d}{dt}(b\sin t)\right)$$

$$=(-a\sin t,\ b\cos t)$$

untuk semua nilai t.

Contoh 1 .9.

Diketahui fungsi **g** dengan rumus

$$\mathbf{g}(t)=(a\sec t,\ b\tan t)$$

tentukan $\mathbf{g}'(t)$

Penyelesaian:

Pertama, diperoleh $D_g = R - \left\{\dfrac{2k+1}{2}\pi : k = \pm1, \pm 2, \pm 3, \cdots\right\}$

Selanjutnya, dengan menggunakan (1.7) diperoleh

$$\mathbf{g}'(t)=\frac{d}{dt}\mathbf{g}(t)=\frac{d}{dt}(a\sec t,\ b\tan t)$$

$$=\left(\frac{d}{dt}(a\sec t),\frac{d}{dt}(b\tan t)\right)$$

$$=(a\sec t\tan t,\ b\sec^2 t)$$

yang ada untuk setiap $t \in D_g$.

Diketahui fungsi **f** dari $A \subset R$ ke R^2:

$$\mathbf{f}(t)=(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))$$

Kemudian dibentuk fungsi $\mathbf{f}'$ dengan rumus

$$\mathbf{f}'(t)=\lim_{r\to 0}\frac{\mathbf{f}(t+r)-\mathbf{f}(t)}{r}$$

Jika $\mathbf{f}'$ ada, fungsi $\mathbf{f}'$ disebut derivatif pertama atau turunan pertama dari fungsi **f** di t.

Mudah dipahami bahwa $D_{f'} = \{t \in D_f : f(t) \text{ ada}\} \subset D_f$.

Dengan cara yang sama dapat didefinisikan

$$\mathbf{f}''(t_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathbf{f}'(t_0 + r) - \mathbf{f}'(t_0)}{r}$$

Jika $\mathbf{f}''$ ada , fungsi $\mathbf{f}''$ disebut derivatif kedua dari fungsi **f** di t_0 dengan $D_{f''} \subset D_{f'} \subset D_f$.

Contoh 1.10.

Diketahui

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } t < 1 \\ t^2 & \text{untuk } 1 \le t \le 2 \\ 4 & \text{untuk } t > 2 \end{cases}$$

dan

$\mathbf{y}(t) = t = 1$ untuk setiap $t \in R$,

maka fungsi $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ merupakan fungsi kontinu dengan $D_f = R$. Akan tetapi karena $\mathbf{x}'(t)$ tidak ada untuk t = 1 dan t = 2 maka menurut teorema 1.6 $\mathbf{f}'(t)$ tidak ada untuk t = 1 dan t = 2. Oleh karena itu, fungsi $\mathbf{f}'$, derivatif fungsi **f** mempunyai domain

$D_{f'} = D_f - \{1,2\} = R - \{1,2\}$

Teorema 1.7.

Jika fungsi vektor **F** dan **G** di R^2 , dan fungsi real h semuanya terdeferensialkan pada selang terbuka **D** maka fungsi **F** + **G**, h**F**, **F**.**G** terdeferensialkan pada **D** dengan rumus turunan yang ditentukan oleh

1. $(\mathbf{F} + \mathbf{G})'(t) = \mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}'(t)$
2. $(h\mathbf{F})'(t) = h(t)\mathbf{F}'(t) + h'(t)\mathbf{F}(t)$
3. $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})'(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}(t)' \cdot \mathbf{G}(t)$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan derivatif pertama dan derivatif kedua dari fungsi vektor berikut.
   a) $\mathbf{F}(t) = (3, t^2 + t)$
   b) $\mathbf{F}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$
2) Diketahui fungsi
   $\mathbf{F}(t) = (\sinh t)\,\mathbf{i} + (\cosh t)\,\mathbf{j}$
   $\mathbf{G}(t) = 2t\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j}$
   $h(t) = e^t$
   tentukan:
   a) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})'(t)$
   b) $(h\mathbf{F})'(t)$
   c) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})'(t)$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $\mathbf{F}'(t) = (0, 2t + 1)$
   $\mathbf{F}''(t) = (0, 2)$
   b) $\mathbf{F}'(t) = (-e^t \sin t + e^t \cos t,\ e^t \cos t + e^t \sin t)$

$$\mathbf{F}''(t) = (-e^t \cos t - e^t \sin t + e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \cos t - e^t \sin t + e^t \sin t + e^t \cos t)$$
$$= (-2e^t \sin t,\ 2e^t \cos t)$$

2) a) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})'(t) = \mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}'(t)$
   $= (\cosh t + 2)\,\mathbf{i} + (\sinh t - 3)\,\mathbf{j}$
   b) $(h\mathbf{F})'(t) = h(t)\,\mathbf{F}'(t) + h'(t)\,\mathbf{F}(t)$

$$=\left(\left(e^t\cosh t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sinh t\right)\mathbf{j}\right)+\left(\left(e^t\sinh t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\cosh t\right)\mathbf{j}\right)$$

$$=\left(e^t\cosh t+e^t\sinh t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sinh t+e^t\cosh t\right)\mathbf{j}$$

c) $$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t)=\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}'(t)+\mathbf{F}'(t)\cdot\mathbf{G}(t)$$

$$=\left(2\sinh t-3\cosh t\right)+\left(2t\cosh t-3t\sinh t\right)$$

$$=\left(2t-3\right)\cosh t+\left(2-3t\right)\sinh t$$

RANGKUMAN

Jika diketahui fungsi f dan $A\subset R$ ke R^2

$$\mathbf{f}(t)=\left(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t)\right)$$

dibentuk fungsi $\mathbf{f}'$ dengan rumus

$$\mathbf{f}'(t)=\lim_{r\to 0}\frac{\mathbf{f}(t+r)-\mathbf{f}(t)}{r}$$

Jika $\mathbf{f}'$ ada, fungsi $\mathbf{f}'$ disebut *derivatif* atau *fungsi turunan* fungsi **f** dan

$$D_{f'}=\left\{t\in D_f : f(t)\,\text{ada}\right\}\subset D_f$$

Dengan cara yang dapat didefinisikan

$$\mathbf{f}''(t_0)=\lim_{r\to 0}\frac{\mathbf{f}'(t_0+r)-\mathbf{f}'(t_0)}{r}$$

Jika $\mathbf{f}''$ ada, fungsi $\mathbf{f}''$ disebut derivatif kedua fungsi **f** di t_0 dengan $D_{f''}\subset D_{f'}\subset D_f$. Berikut ini merupakan rumus-rumus turunan fungsi vektor dari $A\subset R$ ke R^2

1. $(\mathbf{F}+\mathbf{G})'(t)=\mathbf{F}'(t)+\mathbf{G}'(t)$
2. $(h\mathbf{F})'(t)=h(t)\mathbf{F}'(t)+h'(t)\mathbf{F}(t)$
3. $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t)=\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}'(t)+\mathbf{F}'(t)\cdot\mathbf{G}(t)$

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Derivatif pertama dari fungsi vektor $\mathbf{f}(t) = \left((1+t)^{\frac{3}{2}}, -(1-t)^{\frac{3}{2}}\right)$, adalah ....
   A. $\mathbf{f}'(t) = \left(\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right)$
   B. $\mathbf{f}'(t) = \left(\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, -\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right)$
   C. $\mathbf{f}'(t) = \left(\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\right)$
   D. $\mathbf{f}'(t) = \left(-\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right)$

2) Derivatif kedua dari fungsi vektor $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)$, sama dengan ....
   A. $\mathbf{g}''(t) = (-\sin t, \cos t)$
   B. $\mathbf{g}''(t) = (-\cos t, \sin t)$
   C. $\mathbf{g}''(t) = (-\cos t, -\sin t)$
   D. $\mathbf{g}''(t) = (\cos t, \sin t)$

3) Diketahui $\mathbf{f}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{g}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$
   Maka $(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(t) = \cdots$
   A. $(\cos t + 2t)\,\mathbf{i} + \left(e^{-t} + 2t\right)\mathbf{j}$
   B. $(\sin t + 2t)\,\mathbf{i} + \left(e^{-t} + 2t\right)\mathbf{j}$
   C. $(\cos t + 2)\,\mathbf{i} + \left(e^{-t} + 2t\right)\mathbf{j}$
   D. $(\cos t + 2t)\,\mathbf{i} + \left(e^{-t} + 2\right)\mathbf{j}$

4) Diketahui $\mathbf{g}(t) = -3t\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $\mathbf{h}(t) = (-\cos t)\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$

Maka $(\mathbf{g}\cdot\mathbf{h})'(t) = \cdots$

A. $3\cos t + t^3 e^{-2t}$

B. $3\cos t - 3t\sin t + (3t^2 - 2t^3)e^{-2t}$

C. $-3\sin t - 6t^2 e^{-2t}$

D. $3t\cos t + t^3 e^{-2t}$

5) Diketahui $\mathbf{f}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ dan $\mathbf{h}(t) = e^{-t}$

Maka $(\mathbf{hf})'(t) = \cdots$

A. $(e^{-t}\sin t)\mathbf{i} + (e^{-t}\cos t)\mathbf{j}$

B. $(e^{-t}\sin t)\mathbf{i} - (e^{-t}\sin t)\mathbf{j}$

C. $(-e^{-t}\cos t)\mathbf{i} - (e^{-t}\cos t)\mathbf{j}$

D. $(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)\mathbf{i} - (e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t)\mathbf{j}$

6) Jika $\mathbf{f}(t) = (t^2 + 2, 2 - t^2)$ dan $\mathbf{g}(t) = (2t, 3t)$ maka $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})''(t) = \cdots$

A. $-6t + 6$

B. $-2t + 2$

C. $2t - 2$

D. $6t - 6$

7) Jika **f**(t) = 2 sin t **i** + 2 cos t **j** maka pernyataan berikut benar, *kecuali* ....

A. $\mathbf{f}'(t) = -\mathbf{f}'''(t)$

B. $\mathbf{f}''(t) = -\mathbf{f}''''(t)$

C. $\mathbf{f}''(t) = \mathbf{f}'''(t)$

D. $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}''''(t)$

8) Diketahui $\mathbf{f}(t) = (2t^2, -2t^2)$ dan g(t) = ln t. Derivatif kedua dari (**g**f)(t) adalah ....

A. 0

B. $(0,0)$

C. $\left(4t\ln t+2,-4t\ln t-2\right)$

D. $\left(4\ln t+6,-4\ln t-6\right)$

9) Jika **f** dan **g** adalah fungi vektor dari $A \subset R \to R^2$ sedangkan h adalah fungsi dari $A \subset R \to R$ maka pernyataan berikut benar, *kecuali* ....

A. $\mathbf{f}''$ dan $\mathbf{g}''$ merupakan fungsi vektor

B. $\left(\mathbf{f}+\mathbf{g}\right)''$ merupakan fungsi vektor

C. $\left(\mathbf{g}\cdot\mathbf{f}\right)''$ merupakan fungsi vektor

D. $\left(h\mathbf{f}\right)''$ merupakan fungsi vektor

10) Diketahui $\mathbf{f}(t) = \sin 2t\ \mathbf{i} + \cos 2t\ \mathbf{j}$, $\mathbf{g}(t) = 2t\ \mathbf{i} + t2\ \mathbf{j}$ dan $h(t) = e^{2t}$.

$\left(h.\left(\mathbf{g}.\mathbf{f}\right)\right)'(t) = \ldots$

A. $(-2t^2 + 4t + 2)\ e^{2t} \sin 2t + (2t^2 + 6t)\ e^{2t} \cos 2t$

B. $(2t^2 - 4t - 2)\ e^{2t} \sin 2t + (2t^2 - 6t)\ e^{2t} \cos 2t$

C. $(2t - 4)\ e^{2t} \sin 2t\ \mathbf{i} + (8t + 2)\ e^{2t} \cos 2t\mathbf{j}$

D. $(8t + 2)\ e^{2t} \sin 2t\ \mathbf{i} + (2t - 4)\ e^{2t} \cos 2t\ \mathbf{j}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 4. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 4

Penerapan Derivatif dalam Geometri dan Mekanika

Jika kurva C pada bidang datar mempunyai persamaan parameter

$$x = x(t) \tag{1.9}$$
$$y = y(t)$$

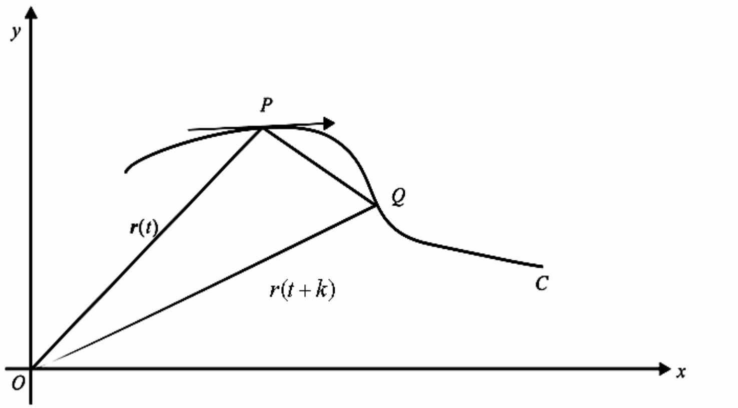
untuk setiap $t \in I$, dengan I suatu selang maka kurva C mempunyai persamaan vektor

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \tag{1.10}$$

Jadi, **r** merupakan fungsi vektor dari $I \subset R$ ke R^2.
Jika P suatu titik di kurva C yang ditentukan oleh nilai $t = t_0 \in I$ dan Q juga titik pada kurva yang ditentukan oleh nilai $t = t_0 + k \in I$ maka akan diperoleh

$$\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = r(t_0) = \lim_{k \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + k) - \mathbf{r}(t_0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{k} = \lim_{Q \to P} \frac{\overline{PQ}}{k},$$

$\left(\text{dengan } \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + k) - \mathbf{r}(t_0)\right)$ merupakan vektor singgung; vektor yang menyinggung kurva, di titik P.



Gambar 1.7
Vektor singgung di titik P.

Katakanlah, untuk t = 0 menentukan titik Q pada kurva C. Jika s merupakan panjang busur, diukur sejak dari Q sampai dengan titik P maka s merupakan fungsi dari t:

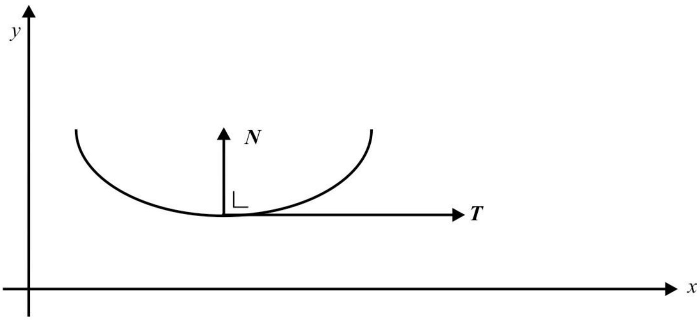
$$s = s(t)$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad (1.11)$$

merupakan vektor yang disebut *vektor satuan singgung* (unit tangen), yaitu vektor yang berimpit dengan $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ dan

$$\|\mathbf{T}\| = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \lim_{\Delta s \to 0}\left\|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\right\| = \lim_{\Delta s \to 0}\left\|\frac{\overline{PQ}}{\Delta s}\right\| = 1 \qquad (1.12)$$



Gambar 1.8
Vektor satuan **T** dan **N**

Selanjutnya, dari $\mathbf{T}.\mathbf{T} = 1$ diperoleh

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{T}.\mathbf{T}) = \mathbf{T}.\frac{d}{ds}(\mathbf{T}) + \frac{d}{ds}(\mathbf{T}).\mathbf{T} = 0$$

$$2\mathbf{T}.\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0, \quad \text{maka} \quad \mathbf{T}.\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

Dengan kata lain $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ merupakan vektor yang tegak lurus terhadap **T** ke arah cekung kurva di P. Jika **N** merupakan vektor satuan searah dengan $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|\mathbf{N} = \kappa\mathbf{N} \qquad (1.13)$$

dengan

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| \qquad (1.14)$$

disebut kelengkungan (*curvature*) kurva di titik P.

N disebut vektor satuan normal (unit normal) di titik P dan $R = \frac{1}{\kappa}$ disebut jari-jari kelengkungan (*radius of curvature*) di titik P.

Dalam perhitungan, tidak selalu mudah untuk menentukan vektor singgung satuan **T,** vektor normal satuan **N**, dan kelengkungan κ menggunakan variabel s. s dapat dipandang sebagai fungsi panjang busur dari vektor **r**(t). Jadi, $s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du,\ a \le t \le b$. Sehingga $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$.

Dari hubungan di atas kita dapat menyatakan vektor singgung satuan **T** sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad (1.15)$$

Vektor **N** merupakan vektor normal satuan, yaitu vektor satuan yang tegak lurus vektor singgung satuan **T.** Karena $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ adalah vektor yang tegak lurus **T,** maka:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right|} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|\frac{dt}{ds}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|} \Leftrightarrow \mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad (1.16)$$

Contoh 1.11.

Diketahui lingkaran yang berjari-jari a dengan titik pusat di O(0,0) ditentukan oleh persamaan parameter.

$$x = a\cos\theta$$

$$y = a\sin\theta$$

Tentukan vektor singgung satuan, vektor normal satuan, kelengkungan dan jari-jari kelengkungan lingkaran tersebut.

Penyelesaian:

Karena lingkaran yang berjari-jari a dan titik pusatnya di O(0,0) mempunyai persamaan parameter.

$$x = a\cos\theta$$

$$y = a\sin\theta$$

maka persamaan vektor kurva itu adalah $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta.\mathbf{i} + a\sin\theta.\mathbf{j}$

oleh karena itu

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = (-a\sin\theta.\mathbf{i} + a\cos\theta.\mathbf{j})\left(\frac{d\theta}{ds}\right) \text{ yang berakibat}$$

$$1 = \mathbf{T}.\mathbf{T} = \left(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

atau

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a}$$

yang berarti bahwa vektor singgung satuannya adalah:

$$\mathbf{T} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

Selanjutnya

$$\kappa\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = (-\cos\theta\ \mathbf{i} - \sin\theta\ \mathbf{j})\frac{1}{a}$$

dan

$$\kappa^2 = \kappa\mathbf{N}\cdot\kappa\mathbf{N} = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

Jadi, diperoleh kelengkungan $\kappa = \frac{1}{a}$, jari-jari kelengkungan $R = \frac{1}{\kappa} = a$, dan vektor normal satuan $\mathbf{N} = -\cos\theta\ \mathbf{i} - \sin\theta\ \mathbf{j}$

Contoh 1.12.

Jika kurva k mempunyai persamaan $y = f(x)$, tentukan rumus kelengkungan kurva itu.

Penyelesaian:

Karena sebarang titik pada kurva k dapat disajikan sebagai $(x, y) = (x, f(x))$ maka persamaan vektor kurva itu adalah

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

dengan $y = f(x)$, oleh karena itu diperoleh

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dx}\frac{dx}{ds} = \left(\mathbf{i} + \frac{dy}{dx}\mathbf{j}\right)\frac{dx}{ds}$$

yang berakibat

$$1 = \mathbf{T}.\mathbf{T} = \left\{1^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

atau

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\kappa\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dx}\frac{dx}{ds}$$

$$= \left[\frac{d^2y}{dx^2}\mathbf{j}\frac{dx}{ds} + \left(\mathbf{i} + \frac{dy}{dx}\mathbf{j}\right)\frac{\left(-\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{-\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\mathbf{i} + \left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]\mathbf{j}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dx^2}\mathbf{j}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}$$

dan diperoleh

$$\kappa^2 = \kappa\mathbf{N}.\kappa\mathbf{N} = \frac{\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]^2\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^4} = \frac{\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]^2}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}$$

atau

$$\kappa = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{1.17}$$

yang merupakan rumus untuk menentukan kelengkungan suatu kurva.

Jika kurva k tersebut merupakan lintasan suatu peluru yang ditembakkan dari titik A maka jarak yang ditempuh oleh peluru itu pada suatu saat adalah $s = s(t)$ dan kecepatan peluru pada saat itu adalah

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} = v\mathbf{T} \tag{1.18}$$

dengan $|v| = \dfrac{ds}{dt}$ merupakan laju peluru pada saat t, percepatan peluru pada saat t dapat dihitung sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{v}\mathbf{T}) = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\mathbf{T} + \mathrm{v}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\
&= a_T\mathbf{T} + \mathrm{v}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = a_T\mathbf{T} + \mathrm{v}^2\kappa\mathbf{N} \\
&= a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}
\end{aligned}
$$

dengan

$$
a_T = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ dan } \qquad a_N = \frac{|\mathrm{v}|^2}{R} = \kappa|\mathrm{v}|^2 \tag{1.19}
$$

Hasil terakhir ini mengatakan bahwa percepatan peluru dapat dipecah menjadi dua komponen. Komponen percepatan ke arah singgung, searah dengan **T**, mempunyai *norm* (besar) $a_T = \frac{d\mathrm{v}}{dt}$ dan komponen percepatan ke arah normal, searah dengan **N**, mempunyai norm (besar) $a_N = \frac{|\mathrm{v}|^2}{R} = \kappa|\mathrm{v}|^2$.

Contoh 1.13.

Akan dihitung **v**, v, a_T dan a_N untuk suatu benda bergerak sepanjang lintasan berbentuk lingkaran berjari-jari a.

Penyelesaian:

Persamaan vektor lintasan benda itu.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{j}$$

Jadi

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = (-a\sin\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j})\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left[a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}$$

Maka,

$$\mathbf{T} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \quad \text{dan} \quad \mathrm{v} = \frac{ds}{dt} = a$$

Dari

$$\kappa\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}\right)\frac{1}{a}$$

$$\kappa^2 = \kappa\mathbf{N}.\kappa\mathbf{N} = \frac{1}{a^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{1}{a^2}$$

diperoleh

$\frac{1}{R} = \kappa = \frac{1}{a}$, sehingga

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2}{a} = a \quad \text{dan} \qquad a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{da}{dt} = 0$$

Contoh 1.14.

Buktikan bahwa jari-jari kelengkungan di sebuah titik P pada lingkaran (O, r) sama dengan r.

Penyelesaian:

Persamaan lingkaran (O, r) ialah $x^2 + y^2 = r^2$.

Apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh $2x + 2yy' = 0$, atau $y' = -\frac{x}{y}$.

Selanjutnya kita susun

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

dan

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3},$$

sehingga kita peroleh jari-jari kelengkungan lingkaran tersebut.

$$\rho = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{r^3}{y^3}\left(-\frac{y^3}{r^2}\right) = -r,$$

Karena jari-jari selalu positif maka $|\rho| = r$.

Contoh 1.15.

Tentukan kelengkungan di suatu titik P pada kurva $x^2 + xy + y^2 = 1$, di mana x = y

Penyelesaian:

Untuk x = y kita peroleh $x^2 + y^2 + x^2 = 1$, jadi $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Selanjutnya kedua ruas persamaan kurva didiferensialkan, diperoleh $2x + y + xy' + 2yy' = 0$, atau $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$, dan dengan mudah dapat pula kita tentukan $y'' = \frac{3xy' - 3y}{(x + 2y)^2}$. Karena $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dan x = y maka dapat ditentukan titik $P\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ di mana didapat $y' = -1$ dan $y'' = \frac{-2}{3}\sqrt{3}$. Sehingga apabila nilai-nilai tersebut kita masukkan ke rumus (1.13), kita peroleh kelengkungan di titik $P\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ adalah $\kappa = \frac{-1}{6}\sqrt{6}$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui $\mathbf{r} = -3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$.
   Tentukan pada saat t = 0
   a) vektor singgung satuan **T**
   b) vektor normal satuan **N**
   c) kelengkungan dan jari-jari kelengkungan

2) Sebuah partikel bergerak sepanjang lengkungan C dengan persamaan parameter $x = e^{-t}$, $y = 2\cos 3t$, di mana t menyatakan waktu. Tentukan kecepatan dan percepatan partikel pada saat t.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $\mathbf{r} = -3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = 3$$

vektor singgung satuan

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{3}(-3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

untuk t = 0 $\rightarrow$ **T** = **i**

b) vektor normal satuan $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$

untuk t = 0 $\rightarrow$ **N** = -**i**

c) $\kappa = \dfrac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \dfrac{1}{3}$

jari-jari kelengkungan $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = 3$

2) $\mathbf{r} = e^{-t}\,\mathbf{i} + 2\cos 3t\,\mathbf{j}$

kecepatan : $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = -e^{t}\,\mathbf{i} - 6\sin 3t\,\mathbf{j}$

percepatan: $\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = -e^{t}\,\mathbf{i} - 18\cos 3t\,\mathbf{j}$

RANGKUMAN

Vektor singgung di titik $t = t_0 \in \mathbf{I}$ dinyatakan dengan

$$\frac{dr(t_0)}{dt} = \lim_{k\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_0 + k) - \mathbf{r}(t_0)}{k}$$

Vektor singgung satuan yaitu vektor yang berimpit dengan $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ adalah:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \quad \text{dan} \quad \|\mathbf{T}\| = 1$$

Vektor normal satuan **N** diperoleh dari

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| \mathbf{N} = \kappa \mathbf{N}$$

dengan κ kelengkungan (*curvature*) kurva di titik P ditentukan oleh rumus

$$\kappa = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

dan $R = \dfrac{1}{\kappa}$ disebut jari-jari kelengkungan (*radius of curvature*) di titik P.

Jika kurva tersebut merupakan lintasan suatu peluru yang ditembakkan dari titik A maka jarak yang ditempuh oleh peluru itu pada suatu saat adalah $s = s(t)$ dan kecepatan peluru pada saat itu adalah:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} = v\mathbf{T}$$

dengan dengan $|v| = \dfrac{ds}{dt}$ merupakan laju peluru pada saat t, percepatan peluru pada saat t adalah:

$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N N$ dengan $a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ dan

$$a_N = \frac{|v|^2}{R} = \kappa |v|^2 .$$

TES FORMATIF 4

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu partikel bergerak pada lengkungan C dengan persamaan $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$, di mana t menyatakan waktu. Vektor kecepatan partikel pada saat $t = \frac{1}{3}\pi$ adalah ....
   A. $-\frac{3}{2}\mathbf{i}\sqrt{3} + \mathbf{j}$
   B. $-\frac{3}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{3}$
   C. $-\frac{3}{2}\mathbf{i}\sqrt{3} - \mathbf{j}$
   D. $\frac{3}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}\sqrt{3}$

2) Gerak suatu partikel sepanjang sebuah kurva C ditentukan oleh $r(t) = 2t^3\mathbf{i} + \left(t^2 - 4t\right)\mathbf{j}$. Vektor percepatan partikel pada saat t = 1 adalah ....
   A. $6t^2\mathbf{i} + (2t - 4)\,\mathbf{j}$
   B. $12\,t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
   C. $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
   D. $12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

3) Kelengkungan kurva $x^2y = x^3 - 4x^2 + 12x - 8$ di titik $P(1,0)$ adalah ....
   A. $-\frac{3}{25\sqrt{2}}$
   B. $\frac{3}{25\sqrt{2}}$
   C. $-\frac{2}{25\sqrt{3}}$
   D. $\frac{2}{25\sqrt{3}}$

4) Vektor kedudukan sebuah partikel bergerak diberikan $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \cos\omega\mathrm{t}\,\mathbf{i} + \sin\omega\mathrm{t}\,\mathbf{j}$. Vektor singgung satuan dari $\mathbf{r}$ adalah ....
   A. $-\omega\sin\omega\mathrm{t}\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega\mathrm{t}\,\mathbf{j}$
   B. $-\sin\omega\mathrm{t}\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega\mathrm{t}\,\mathbf{j}$
   C. $\omega\sin\omega\mathrm{t}\,\mathbf{i} - \omega\cos\omega\mathrm{t}\,\mathbf{j}$
   D. $\sin\omega\mathrm{t}\,\mathbf{i} - \omega\cos\omega\mathrm{t}\,\mathbf{j}$

5) Jika vektor posisi dari gerak partikel adalah $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$ maka unit vector normalnya pada $\mathrm{t} = 1$ adalah $\mathbf{N} = \cdots$
   A. $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$
   B. $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
   C. $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$
   D. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

6) Kelengkungan pada gerak partikel $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\mathbf{i} + \mathrm{t}^2\mathbf{j}$ untuk $\mathrm{t} = 1$ adalah $\kappa = \cdots$
   A. 1
   B. $\sqrt{2}$
   C. 2
   D. $1 + \sqrt{2}$

7) Vektor nomal satuan pada titik $\mathrm{t} = \dfrac{\pi}{4}$ dari $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = 2\cos\mathrm{t}\,\mathbf{i} + 2\sin\mathrm{t}\,\mathbf{j}$ adalah ....
   A. $\mathbf{N}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
   B. $\mathbf{N}(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
   C. $\mathbf{N}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
   D. $\mathbf{N}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

8) Percepatan dalam arah tangent dari suatu partikel yang dinyatakan dalam vektor posisi $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$ pada t = 1 adalah ....

A. $\mathbf{a}_T = \dfrac{14}{\sqrt{13}}$

B. $\mathbf{a}_T = \dfrac{16}{\sqrt{13}}$

C. $\mathbf{a}_T = \dfrac{18}{\sqrt{13}}$

D. $\mathbf{a}_T = \dfrac{22}{\sqrt{13}}$

9) Kecepatan setiap saat dari partikel yang dinyatakan dalam fungsi vektor $\mathbf{r}(t) = (5-2t)^{\frac{3}{2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}(t^2 + 4t)\,\mathbf{j};\ t < \dfrac{5}{2}$ adalah ….

A. $\mathbf{v}(t) = -(5-2t)^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{i} + (t+2)\,\mathbf{j}$

B. $\mathbf{v}(t) = -\dfrac{3}{2}(5-2t)^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{i} + (t+2)\,\mathbf{j}$

C. $\mathbf{v}(t) = \dfrac{3}{2}(5-2t)^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{i} + (t+2)\,\mathbf{j}$

D. $\mathbf{v}(t) = (5-2t)^{\frac{3}{2}}\,\mathbf{i} + (t+2)\,\mathbf{j}$

10) Percepatan dalam arah normal dari suatu partikel yang dinyatakan dalam vektor posisi $\mathbf{r}(t) = \left(e^{2t} - 1, e^{t}\right)$ pada t = 0 adalah ....

A. $a_N = \dfrac{2}{5}$

B. $a_N = \dfrac{2}{10}$

C. $a_N = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

D. $a_N = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 4.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

Glosarium

Vektor	:	Besaran yang memiliki besar dan arah.
Fungsi vektor	:	Fungsi dari $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, khusus di modul ini n = 2.
Daerah asal	:	Daerah di mana fungsi terdefinisi.
Fungsi kontinu		Apabila nilai fungsi di suatu titik sama dengan limit di titik tersebut. Untuk fungsi vektor, kekontinuan berlaku untuk setiap fungsi komponen-komponennya.
Derivatif	:	Turunan.
Vektor singgung satuan	:	Vektor yang menyinggung suatu kurva dan panjangnya 1.
Vektor normal satuan	:	Vektor yang tegak lurus vektor singgung satuan dan panjangnya 1.
Kelengkungan	:	Besarnya perubahan suatu kurva dalam arah vektor singgung satuannya.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A. Karena $\ln 2t^{-1}$ tidak terdefinisi di t = 0, dan $(6-t)^{\frac{1}{2}}$ tidak terdefinisi untuk $t > 6$ maka $f(t) = \left(\ln 2t^{-1}, (6-t)^{\frac{1}{2}}\right),\ t \in [0,\infty)$ bukan fungsi vektor dari R ke R^2.
2) B. $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t$

   $x^2 + y^2 = 16\cos^2 t + 16\sin^2 t = 16\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 16$

   $x^2 + y^2 = 16$ merupakan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari 4.
3) A. $x = t,\ y = 2t + 1$. Eliminasi t diperoleh $y = 2x - 1$ yang grafiknya berupa garis lurus yang melalui $(0,1)$ dan $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
4) B. $f(t) = \left(|t|, -\sqrt{t^2+1}\right)$ terdefinisi untuk $t \in R$
5) C. Karena e^{-t} dan e^t terdefinisi untuk $t \in [-1,1]$ maka $h(t) = \left(e^{-t}, e^t\right)$ terdefinisi di $[-1,1]$.
6) C. $x = t - 1,\ y = t^2 - 1$. Eliminasi t diperoleh

   $y = x^2 - 2x$, dan batas-batasnya adalah

   $t = -2 \rightarrow x = -3,\ t = 2 \rightarrow x = 1$

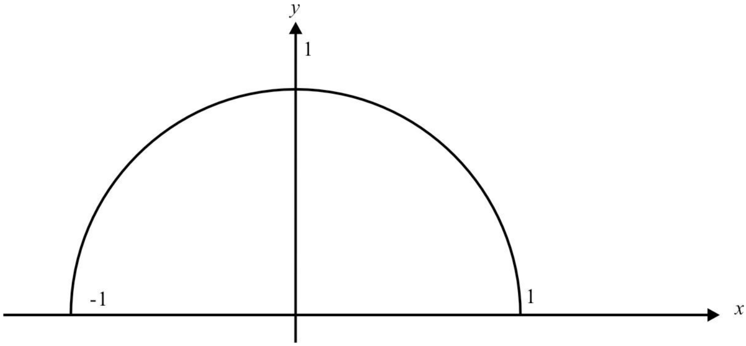
   Jadi, persamaan $y = x^2 - 2x$ untuk $-3 \le x \le 1$.
7) B. $x = -\sin 2t,\ y = \cos 2t$. Eliminasi t diperoleh $x^2 + y^2 = 1$

   Batas-batasnya adalah: $t = -\frac{1}{4}\pi \rightarrow x = 1,\ y = 0$

   $t = 0 \rightarrow x = 0,\ y = 1$

   $t = \frac{1}{4}\pi \rightarrow x = -1,\ y = 0$

Jadi, grafiknya adalah



Gambar 1.9

8) D. Periksa seperti cara di Nomor 7.

9) A. Pemeriksaan daerah asal untuk fungsi **f** adalah

$\frac{1}{t^2} > 0$ dan $t \neq 0$

$2 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 2$

Jadi, daerah asal dari f adalah $R = \{t : t \neq 0 \wedge t \leq 2\}$

10) D. Eliminasi t sehingga diperoleh $x = \ln\left|\frac{1}{\left(2-y^2\right)^2}\right|$

Jadi, daerah hasil dari f adalah $\left\{(x,y) : x = \ln\left|\frac{1}{\left(2-y^2\right)^2}\right|\right\}$

Tes Formatif 2

1) D. Karena $\ln(t-1)$ tidak terdefinisi di t = 1 maka

$K(t) = \ln(t-1)\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$ tidak kontinu di t = 1.

2) B. $\lim\limits_{t\to 0} t^2 \sin\frac{1}{t} = 0$ (gunakan prinsip apit dengan $0 \leq t^2 \sin\frac{1}{t} \leq t^2$)

dan

$\lim\limits_{t\to 0} t^2 \cos\frac{1}{t} = 0$ (gunakan alasan yang sama)

maka $\lim\limits_{t\to 0} f\left(t\right) = 0$

3) B. Karena $\frac{e^t - 1}{t}$ hanya tidak terdefinisi untuk t = 0, dan e^t terdefinisi untuk semua t maka f kontinu untuk $t \in R,\ t \neq 0$.

4) B. Karena $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ dan $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t}{t}$ tidak ada maka $\lim\limits_{t\to 0} F\left(t\right)$ tidak ada.

5) B. $f\left(t\right) = \left(e^t, \frac{t^2 - 1}{t - 1}\right)$ tidak kontinu di t = 1 karena $\frac{t^2 - 1}{t - 1}$ kontinu di t = 1.

6) D. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t} = 2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 2$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\tan 2t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}.2t}{\tan 2t} = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{\tan 2t} = \frac{1}{2}$

Jadi $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{2\sin t}{t}\mathbf{i} + \frac{t}{\tan 2t}\mathbf{j}\right) = 2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

7) A. $\mathbf{g}(t) = \left|\mathbf{f}(t)\right| = \left(a^2t^2 + b^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\mathbf{g}'(t) = \frac{2(2a^2t + 2b^2t)}{(a^2t^2 + b^2t^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$ terpenuhi untuk $t = 0$

Sehingga $\mathbf{g}(0) = 0$

8) B. $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{f}(t) = \left(0,1\right)$ dan $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{g}(t) = \left(0,1\right)$

$\lim\limits_{t\to 0}\left[\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right] = 0.0 + 1.1 = 1$

9) B. Misal $\mathbf{x}(t) = \frac{1 - t^2}{1 - t} + \sqrt{2 - t} = 1 + t + \sqrt{2 - t}$

$\lim\limits_{t\to 1} x(t) = 3$

Misal $\mathbf{y}(t) = \ln t + e^{-t}$

$\lim\limits_{t\to 1} y(t) = e^{-1}$

Maka $\lim\limits_{t\to 1}\mathbf{f}(t) = (3, e^{-1})$

10. B. $F(t) = \left(\dfrac{\sin t}{\tan t}, \dfrac{\cot t}{\cos t}\right) = \left(\sin t \times \dfrac{\cos t}{\sin t}, \dfrac{\cos t}{\sin t} \times \dfrac{1}{\cos t}\right)$

$$= \left(\cos t, \frac{1}{\sin t}\right)$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} F(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \left(\cos t, \frac{1}{\sin t}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

Tes Formatif 3

1) B. $f(t) = \left((1+t)^{\frac{3}{2}}, -(1-t)^{\frac{3}{2}}\right)$

$$f'(t) = \left(\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, -\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right)$$

2) C. $g(t) = (\cos t, \sin t)$

$$g'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$g''(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

3) C. $f'(t) = \cos t\, \mathbf{i} - e^{-t}\, \mathbf{j},\ g'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j}$

$$(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$$

$$= (\cos t + 2)\, \mathbf{i} + \left(e^{-t} + 2t\right) \mathbf{j}$$

4) B. $g'(t) = -3\mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j},\ h'(t) = \sin t\, \mathbf{i} - 2e^{-2t}\, \mathbf{j}$

$$(g.h)' = g'(t).h(t) + g(t).h'(t)$$

$$= \left(3\cos t + 3t^2 e^{-2t}\right) + \left(-3t \sin t - 2t^2 e^{-2t}\right)$$

$$= 3\cos t - 3t \sin t + \left(3t^2 - 2t^3\right) e^{-2t}$$

5) D. $f'(t) = \cos t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j}, \qquad h'(t) = -e^{-t}$

$$(h.f)'(t) = (h.f')(t) + (h'.f)(t)$$

$$= \left(e^{-t} \cos t\, \mathbf{i} - e^{-t} \sin t\, \mathbf{j}\right) + \left(-e^{-t} \sin t\, \mathbf{i} - e^{-t} \cos t\, \mathbf{j}\right)$$

$$= \left(-e^{t} \sin t + e^{-t} \cos t\right) \mathbf{i} + \left(-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t\right) \mathbf{j}$$

6) D. $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(t) = 3t^2 - 6t + 10$

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})''(t) = 6t - 6$$

7) C. $\mathbf{f}(t) = 2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{f}'(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{f}''(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{f}'''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{f}''''(t) = 2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$

8) D. $\left(g\mathbf{f}\right)'(t) = g(t)\mathbf{f}'(t) + g'(t)\mathbf{f}(t)$

$$g(t) = \ln t, g'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\mathbf{f}(t) = \left(2t^2, -2t^2\right), \mathbf{f}'(t) = \left(4t, -4t\right)$$

$$\left(g\mathbf{f}\right)'(t) = \left(4t\ln t + 2t, -4t\ln t - 2t\right)$$

$$\left(g\mathbf{f}\right)''(t) = \left(4\ln t + 6, -4\ln t - 6\right)$$

9) C. $\left(\mathbf{f.g}\right)'(t)$ merupakan fungsi skalar maka $\left(\mathbf{f.g}\right)''(t)$ juga merupakan fungsi skalar

10) A. $\left(h\left(\mathbf{g}\cdot\mathbf{f}\right)\right)'(t) = h(t)(\mathbf{g}\cdot\mathbf{f})'(t) + h'(t)(\mathbf{g}\cdot\mathbf{f})(t)$

$$= e^{2t}((2 - 2t^2)\sin 2t + 6t\cos 2t) + 2e^{2t}(2t\sin 2t + t^2\cos 2t)$$
$$= (-2t^2 + 4t + 2)\,e^{2t}\sin 2t + (2t^2 + 6t)\,e^{2t}\cos 2t$$

Tes Formatif 4

1) A. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -3\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 2\cdot\frac{1}{2}\,\mathbf{j}$$

$$= -\frac{3}{2}\mathbf{i}\sqrt{3} + \mathbf{j}$$

2) D. $\mathbf{r}'(t) = 6t^2\mathbf{i} + (2t - 4)\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{a}(t) = r''(t) = 12t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(1) = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

3) A. $x^2y - x^3 + 4x^2 - 12x + 8 = 0$

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + 3x^2 - 8x + 12}{x^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{3 - 8 + 12}{1} = 7$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4x\frac{dy}{dx} - 2y - 6x + 8}{x^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(1,0)} = \frac{-4 \cdot 7 - 0 + 6 - 8}{1} = -30$$

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{-30}{(1+49)^{3/2}} = -\frac{30}{250\sqrt{2}} = -\frac{3}{25\sqrt{2}}$$

4) B. $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \dfrac{-\omega \sin \omega t\, \mathbf{i} + \omega \cos \omega t\, \mathbf{j}}{\sqrt{\omega^2 \left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right)}}$

$= -\sin \omega t\, \mathbf{i} + \cos \omega t\, \mathbf{j}$

5) B. Hitung $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ (5.1)

Gunakan hasil (5.1) untuk menentukan $\mathbf{T} = \dfrac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|}$ (5.2)

Tentukan $\mathbf{T}'$ dari (5.2)
Substitusikan $t = 1$ kedalam $\mathbf{T}'$ (5.3)
Hitung $\|\mathbf{T}'\|$ (5.4)

Tentukan $\mathbf{N}$ dengan rumus $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}$

6) A. Gunakan prosedur mencari $\mathbf{N}$ seperti jawaban pada soal nomor 5. Selanjutnya gunakan rumus $\kappa^2 = \kappa\mathbf{N} \cdot \kappa\mathbf{N}$, sehingga didapat kelengkungan $\kappa = \sqrt{\kappa^2}$.

7) C. Tentukan **T** menggunakan rumus $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$, kemudian tentukan **N** dengan menggunakan rumus $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}$. Selanjutnya substitusikan nilai t = $\dfrac{\pi}{4}$.

8) D. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ (8.1)

Tentukan $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $a_T = v'(t)$, $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \mathbf{v}'(t)\dfrac{dt}{ds}$ (8.2)

$\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ (8.3)

Dari (8.2) dan (8.3) didapat $\dfrac{dt}{ds}$ sehingga dapat ditentukan $\dfrac{ds}{dt}$.

Sedangkan $\dfrac{ds}{dt} = v(t)$ (8.4)

Dari (8.2) dan (8.4) dan dengan substitusi $t = 1$ maka dapat ditentukan komponen tangensial percepatan $a_T = v'(t)\big|_{t=1}$

9) C. Turunkan masing-masing komponen dari vektor **r**.

10) D. $\mathbf{r}(t) = \left(e^{2t} - 1, e^t\right)$ (10.1)

$a_{\mathbf{N}} = \kappa |v|^2$ (10.2)

Besaran κ dapat ditentukan seperti pada jawaban pada soal nomor 6, dan besaran v dapat ditentukan seperti pada jawaban soal nomor 8. Sehingga komponen normal percepatan $a_{\mathbf{N}}$ pada (10.2) dapat ditentukan.

Daftar Pustaka

Darmawijaya, Suparna. (1990). *Kalkulus Lanjut*. Yogyakarta: FMIPA UGM.

Kaplan, W. (1972). *Advanced Calculus*. 2nd Edition. London: Addison Wesley Publishing Company Inc.

Martono, Koko. (1990). *Kalkulus Peubah Banyak*. Bandung: FMIPA ITB.

Purcell, E.J. dan D. Vanberg. (1986). Terjemahan (I.N. Susila B. Kartasasmita, dan Rawuh). *Kalkulus Geometri Analitik*. Jilid II. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R. (1983). *Terjemahan Pantur Silaban Ph.D*. 1980. Kalkulus Lanjutan. Jakarta: Erlangga.

Taylor, A.E. dan W.R. Mann. (1982). *Advanced Calculus*. 3rd Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc.