Modul 1

Matriks

Drs. H. Karso, M. M.Pd.

PENDAHULUAN

Modul pertama dari mata kuliah Aljabar Linear ini merupakan materi prasyarat untuk mempelajari konsep-konsep dalam Aljabar Linear berikutnya. Pendahuluan matriks dan operasinya yang merupakan materi dalam modul ini akan banyak membantu Anda dalam mempelajari modul-modul berikutnya dalam mata kuliah Aljabar Linear.

Selain sebagai materi awal dalam Aljabar Linear, materi dalam modul ini akan banyak membantu Anda dalam mempelajari modul-modul matematika lainnya. Khusus bagi Anda yang berminat mempelajari Aljabar matriks yang lebih tinggi dapat menggunakan materi dalam modul ini sebagai dasarnya.

Adapun materi dalam modul pertama ini, secara garis besarnya terbagi menjadi dua bagian. Kegiatan Belajar pertama membahas pengertian matriks dan operasinya, mulai dari notasi dan definisi matriks, ordo matriks, bentuk umum matriks, negatif matriks, kesamaan matriks, penjumlahan matriks, perkalian skalar dengan matriks, perkalian matriks dengan matriks, dan kaidah-kaidah ilmu hitung dalam matriks. Kemudian Kegiatan Belajar yang kedua yang merupakan kegiatan belajar yang terakhir membahas beberapa jenis matriks, di antaranya matriks persegipanjang, matriks persegi, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks skalar, matriks satuan, matriks nol, matriks baris, matriks kolom, konyugat matriks, transpos matriks, matriks simetri, matriks simetri miring, transnyugat matriks, matriks hermit, dan matriks hermit miring.

Untuk mempelajari materi dalam modul ini tidak ada pernyataan yang khusus, hanya tentunya akan mempermudah Anda dalam mempelajarinya jika Anda telah memahami materi-materi matematika sekolah lanjutan.

Sebagai Tujuan Instruksional Umum diharapkan Anda dapat memahami pengertian matriks, operasi-operasi dasar matriks, dan jenis-jenis matriks serta menentukan matriks sebagai hasil operasi dua buah matriks. Sedangkan

Tujuan Instruksional Khusus, setelah Anda mempelajari materi dalam modul ini, diharapkan dapat:
1. menyelesaikan kesamaan matriks;
2. menentukan matriks sebagai hasil operasi dua buah matriks;
3. menentukan jenis-jenis matriks dari matriks yang diberikan.

Adapun susunan materi dalam modul ini terbagi menjadi dua kegiatan belajar sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Pengertian dan notasi matriks, ordo suatu matriks, bentuk umum suatu matriks, kesamaan matriks, penjumlahan matriks, perkalian skalar, perkalian matriks, dan beberapa kaidah ilmu hitung matriks.

Kegiatan Belajar 2: Matriks persegipanjang dan matriks persegi, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks skalar dan matriks satuan, matriks nol, matriks baris dan matriks kolom, konjugat suatu matriks, transpos suatu matriks, matriks simetri, transpos konjugat suatu matriks, matriks hermit dan matriks hermit miring.

Petunjuk Belajar

Untuk dapat memahami modul ini dengan baik serta mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakanlah strategi belajar berikut.
1. Sebelum membaca modul ini, cermati terlebih dahulu glosarium pada akhir modul yang memuat istilah-istilah khusus yang digunakan dalam modul ini.
2. Baca materi modul dengan seksama, tambahkan catatan pinggir, berupa tanda tanya, pertanyaan, konsep lain yang relevan, dan lain-lain sesuai dengan pemikiran yang muncul.
3. Cermati dan kerjakan soal-soal latihan dan tes formatif seoptimal mungkin, dan gunakan rambu-rambu jawaban untuk membuat penilaian tentang kemampuan pemahaman Anda.
4. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial untuk digunakan dalam pembuatan tugas dan ujian akhir.
5. Usahakan Anda mempelajari beberapa buku sumber penunjang lainnya.

Kegiatan Belajar 1

Matriks dan Operasinya

A. MATRIKS

1. Pengertian dan Notasi Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari dan dalam mempelajari matematika sering kita dihadapkan pada sekumpulan objek yang harus disusun berdasarkan penggolongan terhadap dua sifat. Untuk keperluan penggolongan dari dua macam sifat yang berbeda maka diciptakanlah istilah **baris** dan **kolom (lajur)** Bertitik tolak dari permasalahan pokok inilah maka kita akan mempelajari suatu konsep matematika yang disebut **matriks** (*matrices*) Bahasan matriks ini merupakan bagian dari materi-materi dalam Aljabar Linear.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan beberapa contoh berikut yang akan memberikan gambaran kepada apa yang disebut matriks.

Contoh 1.1

Daftar Nilai Matematika
Tes Formatif Kelas IA Semester I Tahun Ajaran 2006/2007

No.	Nama Siswa	Tes ke-1	Tes ke-2	....
1.	Adi	9	6	
2.	Badri	7	8	
3.	Candra	5	6	
4.	Dinar	8	8	
5.				
6.	dst.	dst.	dst.	
7.				
8.				
dst.				

Pada daftar di atas yang menjadi perhatian kita adalah **siswa (nama baris)** sebagai **objek** yang diteliti, sedangkan **subjeknya** adalah **nilai (isi kolom)** Jika kita hanya memperhatikan empat orang siswa dengan dua kali tes formatif maka secara matematika daftar tersebut dapat kita susun dalam bentuk yang lebih sederhana namun padat, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Bentuk seperti ini merupakan cara yang paling praktis sehingga hemat untuk ditulis dan mudah untuk diingat, karena tiap isi baris dan kolom mempunyai arti khusus dan tersendiri.

Himpunan bilangan yang disusun dalam aturan baris dan kolom seperti di atas, sehingga membentuk susunan baris-kolom yang saling tegak lurus itu disebut **matriks.**

Contoh 1. 2

Sekarang perhatikan tabel sistem persamaan linear dua persamaan dengan tiga variabel, sebagai berikut:

No.	Persamaan	Koefisien x	Koefisien y	Koefisien z
1.	$2x + 3y + 7z = 0$	2	3	7
2.	$x - y + 5z = 0$	1	–1	5

Susunan koefisien x, y, dan z menurut baris dan kolom dapat ditulis seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

juga membentuk suatu matriks, dan disebut **matriks koefisien** dari sistem persamaan linear:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 0 \\ x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Sedangkan **matriks lengkap** dari sistem persamaan linear di atas, dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari contoh-contoh di atas, dapatlah kita simpulkan pengertian matriks dalam matematika yang secara rincinya didefinisikan bahwa matriks adalah susunan skalar (bilangan) yang berbentuk persegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom.

Selanjutnya untuk menandai arti suatu matriks agar tidak tertukar dengan matriks lainnya, kita perlu memberi nama matriks itu. Untuk menyatakan atau memberi nama sebuah matriks sama seperti halnya sebuah himpunan, yaitu diberi nama dengan memakai huruf kapital (huruf besar) A, B, X, Y, dan sebagainya. Sedangkan unsur-unsur atau elemen-elemen atau komponen-komponen, yaitu bilangan-bilangan yang disusun di dalamnya, bila akan dimisalkan kita lambangkan dengan huruf kecil, misalnya:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Bilangan-bilangan a, b, c, d dan f disebut unsur-unsur dari matriks tersebut. Namun karena letak unsur-unsurnya berbeda serta bentuknya berbeda pula maka matriks M dan N adalah dua matriks yang berbeda.

Unsur-unsur yang letaknya mendatar disebut baris, sedangkan unsur-unsur yang letaknya tegak disebut **kolom** atau **lajur**. Sebagai contoh kita perhatikan matriks M yang terdiri dari dua baris dan tiga kolom, yaitu:

a , b, c adalah unsur-unsur baris pertama.
d, e, f adalah unsur-unsur baris kedua.
a, d adalah unsur-unsur kolom pertama.
b, e adalah unsur-unsur kolom kedua.
c, f adalah unsur-unsur kolom ketiga.

Selanjutnya untuk menunjukkan sebuah matriks kadangkala digunakan sepasang tanda kurung kecil $(\ )$, atau sepasang garis tegak $\|\ \|$ atau menggunakan sepasang kurung siku (kurung besar) $[\ ]$.

2. Ordo Suatu Matriks

Pada umumnya sebuah matriks tidak mempunyai nilai, kecuali matriks persegi (nilai real suatu matriks persegi disebut determinan, lihat bahasan mendatang) Namun setiap matriks selalu mempunyai ukuran yang disebut **ordo** suatu matriks atau *orde* suatu matriks. Matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom didefinisikan sebagai matriks yang berordo $m \times n$. Matriks-matriks yang berordo sama disebut **sederajat** atau **komparabel**.

Sebagai contoh, kita perhatikan kembali matriks M dan matriks N di atas (bahasan bagian A. 1) Karena matriks M terdiri dari dua baris dan tiga kolom maka matriks M disebut matriks yang berordo 2×3 atau ditulis M_{2x3}, sedangkan matriks N yang terdiri dari tiga baris dan dua kolom, berordo 3×2 atau ditulis $N_{3\times2}$. Jadi, jika matriks A terdiri dari m baris dan n kolom maka matriks A berordo $m \times n$ atau $A_{m \times n}$ atau $A_{(m \times n)}$

3. Bentuk Umum Suatu Matriks

Bentuk umum suatu matriks A yang memuat m baris dan n kolom dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{array}{r c l}
 & & \textbf{baris :} \\
A_{(m \times n)} = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow m \end{array} \\
\textbf{kolom :} & \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 2 & & j & & n \end{array} &
\end{array}$$

Bentuk matriks di atas dinotasikan dengan $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$, dengan :
$i = 1, 2, 3, ..., m$ menyatakan baris dan
$j = 1, 2, 3, ..., n$ menyatakan kolom.

Indeks ganda ij dari setiap unsur dalam suatu matriks merupakan suatu petunjuk dari posisi setiap unsur. Unsur a_{ij} dengan i sebagai indeks pertama menyatakan baris dan j sebagai indeks kedua menyatakan kolom. Jadi unsur a_{ij} terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A. Dengan memperhatikan indeksnya, unsur a_{32} terletak pada baris ketiga kolom kedua, sedangkan unsur a_{51} terletak pada baris kelima kolom kesatu, dan sebagainya.

Contoh 1.3

Jika matriks $B_{2\times2}$ dan matriks $C_{1\times3}$ maka bentuk umumnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$B_{2\times2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C_{1\,x\,3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

4. Negatif Suatu Matriks

Negatif dari matriks A atau $(-A)$ adalah sebuah matriks yang setiap unsurnya adalah negatif dari setiap unsur A. Matriks $(-A)$ disebut pula sebagai invers aditif (invers operasi tambah) dari matriks A.

Contoh 1.4

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3i \\ 1-i & -5 & 0 \end{bmatrix}$ maka $(-A) = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 3i \\ -1+i & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Apakah ordo $(-A)$ sama dengan ordo A? Apakah unsur (i,j) dari A sama dengan unsur –(i,j) dari $(-A)$?

Secara umum didefinisikan, jika A = $[a_{ij}]_{m\,x\,n}$ maka matriks $(-A)$ = $[-a_{ij}]_{m\,x\,n}$ disebut negatif dari matriks A.

5. Kesamaan Matriks

Didefinisikan bahwa dua matriks A dan B dikatakan sama (ditulis $A = B$) jika ordonya sama dan unsur-unsur yang seletak (yang berkorespondensi) sama.

Dari perjanjian di atas, jelaslah bahwa dua matriks itu sama jika dan hanya jika matriks yang satu merupakan duplikat dari matriks yang lainnya. Jadi dua matriks A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah sama, jika dan hanya jika :

a. Ordo matriks A = ordo matriks B, dengan kata lain matriks A dan matriks B sederajat,
b. $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap nilai i dan j, atau unsur (i,j) dari A = unsur (i,j) dari B.

Contoh 1. 5

Misalkan kita akan mencari nilai-nilai x dan y dari persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 6 & 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Karena kedua matriks itu sama maka selain ordonya sama, unsur-unsur yang seletaknya juga sama, yaitu :

$$2x = 1 \text{ atau } x = \frac{1}{2} \text{ dan}$$

$$7y = 7 \text{ atau } y = 1.$$

B. OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan Matriks

Pandang dua buah daftar harian toko mengenai banyaknya botol minuman sari buah yang tersedia di toko tersebut.

A. Penjualan Tahap I

	Sari Jeruk	Sari Nenas	Sari Sirsak
Botol besar	14	4	23
Botol Kecil	12	9	5

B. Penjualan Tahap II

	Sari Jeruk	Sari Nenas	Sari Sirsak
Botol besar	7	4	6
Botol Kecil	6	8	2

Jika kedua daftar di atas digabungkan menjadi sebuah daftar yang baru mengenai jumlah tiap macam botol dan macam minuman sari buah maka hasilnya adalah sebagai berikut.

C. Penjualan Tahap I dan II

	Sari Jeruk	Sari Nenas	Sari Sirsak
Botol besar	21	8	29
Botol Kecil	18	17	7

Masing-masing daftar dapat disusun dalam bentuk yang sederhana menjadi matriks-matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 23 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 21 & 8 & 29 \\ 18 & 17 & 7 \end{bmatrix}$$

Sedangkan cara penggabungan seperti di atas sama saja dengan penjumlahan matriks A dan matriks B yang menghasilkan matriks C sebagai hasil penjumlahannya, yaitu :

$$A + B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 23 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 8 & 29 \\ 18 & 17 & 7 \end{bmatrix} = C$$

Dari keadaan di atas, kita ketahui bahwa:

1. Matriks-matriks A, B, dan C ordonya sama, yaitu (2×3).
2. Matriks C diperoleh dari penjumlahan matriks A dan B dengan cara menjumlahkan unsur-unsur yang seletaknya.

Dari kenyataan-kenyataan di atas secara umum didefinisikan bahwa jika P dan Q adalah dua buah matriks yang ordonya sama maka **jumlah** P + Q merupakan sebuah matriks R yang ordonya sama dengan matriks P dan Q, sedangkan unsur-unsur dari matriks R didapat dari penjumlahan unsur-unsur seletak pada matriks P dan Q.

Contoh 1.6

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

sedangkan A + C dan B + C tidak didefinisikan, mengapa?

2. Perkalian Skalar

Seperti halnya dalam teori bilangan, bahwa $x + x = 2x$ dan $y + y + y = 3y$. Dengan cara yang sama, jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka

$$3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+a+a & b+b+b \\ c+c+c & d+d+d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

Secara umum didefinisikan, jika A sembarang matriks dan k sembarang skalar maka hasilkali kA adalah sebuah matriks yang diperoleh dari hasil perkalian setiap unsur dalam A dengan k.

Contoh 1. 7

Jika diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika P sembarang matriks maka (–P) merupakan hasilkali dari (–1) dengan P atau (–1)P atau (–P) disebut negatif dari matriks P (lihat fasal 1.4) Jika P dan Q dua matriks yang ordonya sama maka P – Q didefinisikan sebagai jumlah dari P + (–Q) = P + (–1)Q.

Contoh 1. 8

Misalkan diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

maka menurut definisi di atas :

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

dan

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa $A - B$ dapat diperoleh secara langsung dengan mengurangkan unsur-unsur dari matriks A oleh unsur-unsur seletak dari matriks B.

3. Perkalian Matriks

Untuk memperoleh gambaran mengenai perkalian dua buah matriks kita tinjau contoh berikut ini. Dua toko olah raga, P dan Q, ingin memberikan hadiah kepada tiap pembeli selama satu bulan. Tiap pembeli bola basket diberi hadiah 2 pensil dan 3 buku tulis. Tiap pembeli bola volly diberi hadiah 1 pensil dan 2 buku tulis.

Setelah satu bulan, toko P telah menjual 20 buah bola basket dan 25 buah bola volly, sedangkan toko Q telah menjual 15 buah bola basket dan 30 buah bola volly. Keadaan ini dapat kita tulis dalam bentuk tabel seperti berikut.

Tabel 1.1.
Banyaknya Bola yang Terjual

	Bola Basket	**Bola Volly**
Toko P	20	25
Toko Q	15	30

Tabel 1.2.
Hadiah

	Pensil	**Buku Tulis**
1 Bola Basket	2	3
1 Bola Volly	1	2

Sekarang yang ditanyakan, berapa banyaknya pensil dan berapa banyaknya buku tulis yang telah dihadiahkan oleh toko P dan toko Q?

Jawab :

(1) Toko P telah menghadiahkan sebanyak :
$(20 \times 2) + (25 \times 1) = 65$ pensil dan
$(20 \times 3) + (25 \times 2) = 110$ buku tulis.

(2) Toko Q telah menghadiahkan sebanyak :
$(15 \times 2) + (30 \times 1) = 60$ pensil dan
$(15 \times 3) + (30 \times 2) = 105$ buku tulis.
Dalam hal ini dapat dilihat lebih jelas pada Tabel 1.3 berikut ini.

Tabel 1.3.
Banyaknya Hadiah yang Diberikan

	Pensil	Buku Tulis
Toko P	65	110
Toko Q	60	105

Jika dalam Tabel 1.1, 1.2, dan 1.3 kita tulis dalam bentuk matriks maka berturut-turut kita mempunyai tiga buah matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{dan } C = \begin{bmatrix} 65 & 110 \\ 60 & 105 \end{bmatrix}$$

Sekarang kita pikirkan suatu cara mengkomposisikan matriks A dengan matriks B, sehingga menghasilkan matriks C. Caranya adalah sebagai berikut.

Langkah 1

$$\begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Unsur 65 pada baris 1 dan kolom 1 matriks **C** diperoleh dari komposisi baris 1 matriks A dengan kolom 1 matriks B menurut aturan

$$(20 \times 2) + (25 \times 1) = 65$$

Langkah 2

$$\begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & 110 \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Unsur 110 pada baris 1 kolom 2 matriks C diperoleh dari komposisi baris 1 matriks A dengan kolom 2 matriks B menurut aturan :

$$(20 \times 3) + (25 \times 2) = 110$$

Langkah 3

Perhitungan-perhitungan untuk mendapatkan unsur-unsur lainnya pada matriks C sama seperti langkah 1 dan 2, yaitu sebagai berikut:

$(15 \times 2) + (30 \times 1) = 60$. (unsur baris 2 dan kolom 1 matriks C)

$(15 \times 3) + (30 \times 2) = 105$ (unsur baris 2 dan kolom 2 matriks C)

$$A \times B = AB = \begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 110 \\ 60 & 105 \end{bmatrix}$$

Komposisi dua matriks seperti dalam contoh di atas tadi disebut **perkalian dua matriks**, yang secara lengkapnya didefinisikan sebagai berikut. Dua matriks dapat dikalikan jika dan hanya jika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Jika A matriks $m \times r$ dan B matriks $r \times n$ maka AB adalah matriks $m \times n$. (lihat skema berikut).

$$A_{m \times r} \qquad B_{r \times n} \qquad = \qquad AB_{m \times n}$$

dalam

luar

Bilangan yang di luar menunjukkan ordo matriks hasil kalinya.

Contoh 1. 9

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times-1)+(-1\times0) & (1\times2)+(-1\times-1) & (1\times3)+(-1\times3) \\ (4\times1)+(0\times0) & (4\times2)+(0\times-1) & (4\times3)+(0\times3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Sebaliknya BA tidaklah dapat ditentukan, karena banyaknya kolom matriks B tidak sama dengan banyaknya baris matriks A.

4. Beberapa Kaidah Ilmu Hitung Matriks

Walaupun banyak dari kaidah-kaidah ilmu hitung untuk bilangan real yang berlaku pada matriks, namun ada beberapa kekecualian. Salah satu yang terpenting dari kekecualian tersebut terdapat di dalam perkalian matriks. Untuk bilangan-bilangan real a dan b, selalu berlaku ab = ba. Sifat ini disebut **hukum komutatif** untuk operasi kali.

Namun dalam matriks kadang-kadang AB dan BA tidaklah sama. Dalam hal ini ada tiga hal yang mengakibatkan kesamaan tersebut gagal berlakunya. Sebagai contoh, kegagalan ini terjadi, jika AB terdefinisi tetapi BA tidak terdefinisi. Misalkan jika A merupakan matriks 2×3 dan B merupakan matriks 3×4. Selanjutnya kegagalan terjadi, jika AB dan BA kedua-duanya terdefinisi tetapi mempunyai ordo yang berbeda. Misalnya, jika A_{2x3} dan matriks B_{3x2}. Terakhir, kegagalan ini dapat terjadi, seperti yang diperlihatkan pada contoh berikut yaitu mungkin bahwa $AB \neq BA$ walaupun AB dan BA kedua-duanya terdefinisi dan masing-masing A, B, AB, dan BA mempunyai ordo yang sama.

Contoh 1. 10

Misalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perkalianya memberikan

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, $AB \neq BA$.

Meskipun hukum komutatif untuk operasi kali tidak berlaku dalam matriks, namun banyak hukum-hukum yang berlaku pula untuk matriks. Sifat-sifat yang penting tersebut dapat disimpulkan dalam teori berikut.

Teorema 1.1.

Diasumsikan bahwa ordo dari matriks sedemikian rupa, sehingga operasi-operasi yang dinyatakan dapat berlaku, dan hukum matematika berikut adalah berlaku.

(a) $A + B = B + A$ (Hukum komutatif penjumlahan)
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Hukum asosiatif penjumlahan)
(c) $A(BC) = (AB)C$ (Hukum asosiatif perkalian)
(d) $A(B + C) = AB + AC$ (Hukum distributif)
(e) $(B + C)A = BA + CA$ (Hukum distributif)
(f) $A(B - C) = AB - AC$
(g) $(B - C)A = BA - CA$
(h) $a(B + C) = aB + aC$
(i) $a(B - C) = aB - aC$
(j) $(a + b)C = aC + bC$
(k) $(a - b)C = aC - bC$
(l) $(ab)C = a(bC)$
(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Meskipun operasi-operasi dari matriks penjumlahan dan matriks perkalian terdefinisi untuk sepasang matriks, namun hukum-hukum asosiatif (b) dan (c) memungkinkan kita untuk menyatakan jumlah dan perkalian dari tiga matriks berturut-turut $A + B + C$ dan ABC tanpa membubuhkan tanda kurung. Hal ini dibuktikan dengan suatu fakta, bahwa tidak menjadi soal bagaimana tanda kurung dibubuhkan atau tidaknya, hukum asosiatif menjamin bahwa hasil akhir yang diperoleh adalah tetap sama. Tanpa menyelesaikan secara mendetail, dapatlah kita lihat bahwa hasil yang sama akan berlaku untuk penjumlahan dan perkalian matriks yang terdiri dari empat atau lebih. Secara umum, untuk sembarang penjumlahan atau sembarang produk dari sejumlah matriks, pasangan-pasangan tanda kurung dapat dibubuhkan atau mencoret dimana perlu dari pernyataan tersebut, tetapi hasil akhir yang diperlihatkannya akan tetap sama.

Contoh 1. 11

Sebagai ilustrasi dari hukum asosiatif pada matriks perkalian, pandanglah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{sehingga } (AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sebaliknya } BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{sehingga } A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi, (AB)C = A(BC), sebagai pembuktian teorema (c).

Sekarang kita tinjau sebuah matriks, yang semua unsurnya nol, seperti

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

disebut **matriks nol**. Matriks-matriks nol akan ditulis dengan notasi O; apabila dianggap perlu menyatakan ordonya dapat ditulis $O_{m \times n}$ untuk ordo $m \times n$.

Jika A sembarang matriks dan O matriks nol yang masing-masing ordonya sama maka A + O = A. Matriks O dalam penjumlahan matriks ini memainkan peranan yang sama seperti bilangan 0 dalam bilangan pada a + 0 = a.

Oleh karena kita telah mengetahui bahwa beberapa hukum dari ilmu hitung untuk bilangan-bilangan real tidak berlaku pada ilmu hitung matriks maka kita tidak boleh mengasumsikan bahwa semua sifat-sifat dari bilangan real nol berlaku pada matriks nol. Sebagai contoh, pandanglah dua hasil standar berikut dalam ilmu hitung pada bilangan-bilangan real.

(1) Jika ab = ac dan a ≠ 0 maka b = c. (Ini disebut hukum pelenyapan atau pembatalan).

(ii) Jika ad = 0 maka paling sedikit satu dari faktor-faktor di sebelah kiri adalah nol.

Seperti yang diperlihatkan dalam contoh berikut, hasil-hasil yang berkorespondensi adalah salah dalam ilmu hitung matriks.

Contoh 1. 12

Misalkan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di sini $AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ dan $AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$.

Meskipun A ≠ O adalah tidak benar untuk membatalkan atau melenyapkan matriks A dari kedua ruas pada persamaan AB = AC dan menulis B = C. Jadi hukum pelenyapan tidak berlaku pada matriks.

Demikian pula, AD = O, tetapi A ≠ O dan D ≠ O, sehingga (ii) tidak berlaku pada matriks.

Meskipun contoh-contoh di atas tidak tepat, ada sejumlah sifat-sifat bilangan real 0 berlaku pada matriks-matriks nol. Beberapa hal yang terpenting dari sifat-sifat tersebut dapat dirangkum pada teori berikut ini.

Teorema 1.2.

Diasumsikan bahwa ordo dari matriks-matriks yang dinyatakan dalam operasi adalah bersesuaian maka hukum-hukum dari matriks aritmetika berikut adalah berlaku.

(a) A + O = O + A = A
(b) A – A = O
(c) O – A = –A
(d) A O = O

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & -2 & 9 \\ -3 & 4 & 0 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Carilah :

a. ordonya;
b. semua unsur pada kolom ke–4;
c. banyaknya unsur pada baris ke–2.

2) Carilah nilai x dan y dari persamaan berikut

a. $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & x+1 \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} x-y & x+y \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3) Diketahui matriks-matriks

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

a. D + E
b. 3C – D
c. 2C + E

4) Tentukan hasil perkalian dua matriks berikut:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

5) Misalkan diketahui

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, dengan $a = -3$ dan $b = 2$.

Perlihatkan:

a. $A + (B + C) = (A + B) + C$

b. $(a + b)C = aC + bC$

c. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal **Latihan** di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. Karena matriks A terdiri dari tiga baris dan lima kolom maka ordonya adalah 3×5 atau $A_{3 \times 5}$.

b. Unsur-unsur pada kolom ke-4 (lajur ke-4) berturut-turut adalah -2, -1 dan 0.

c. Banyaknya unsur pada baris ke-2 ada lima, yaitu -3, 4, 0, -1 dan 8.

2) a. $\begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$, menurut definisi matriks yang sama adalah $x + y = 9$ dan $x - y = 9$ berarti $x = 9$ dan $y = 0$.

b. Dengan cara yang sama seperti bagian a di atas diperoleh x + 1= 1 sehingga x = 0 dan y = 7.

c. Tidak ada nilai x dan y real yang memenuhi persamaan matriks tersebut, karena tidak memenuhi definisi matriks yang sama, yaitu unsur baris kedua kolom kedua dari kedua matriks tidak sama ($1 \neq O$).

3) a. $D + E = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

b. 3C – D tidak terdefinisikan karena ordo C dan D tidak sama.

c. 2C + E tidak terdefinisikan karena ordo C dan D tidak sama.

4) a. $\begin{bmatrix} 25 & 56 \\ 31 & 45 \\ 25 & 49 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 11 & 14 & 4 \\ 14 & 11 & 7 \\ 14 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

c. Tidak terdefinisi, sebab jumlah kolom matriks pertama (2) tidak sama dengan jumlah baris matriks kedua (3).

5) a. $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$

b. $(a + b)C = aC + bC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

c. $a(BC) = (aB)C = B(aC) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -60 & -87 \end{bmatrix}$

Selanjutnya buatlah rangkuman dari **Kegiatan Belajar 1** di atas, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

RANGKUMAN

1. Notasi dan Definisi Matriks
   Matriks adalah susunan bilangan yang berbentuk persegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom. Untuk menunjukkan sebuah matriks dipakai sepasang kurung kecil ( ) atau sepasang kurung siku [ ] atau sepasang garis tegak ganda || ||.

2. Ordo Suatu Matriks
   Ordo suatu matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom suatu matriks. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka ordo dari matriks A adalah m × n dan ditulis $A_{(m \times n)}$.

3. Negatif Suatu Matriks
   Negatif dari suatu matriks A atau (–A) ialah sebuah matriks yang setiap unsurnya adalah negatif dari setiap unsur A. Negatif dari matriks A atau (–A) merupakan hasil kali dari (–1) dengan matriks A atau (–1)A atau (–A).

4. Kesamaan Matriks
   Dua matriks dikatakan sama jika ordonya sama dan unsur-unsur yang seletaknya sama. Jadi dua matriks adalah sama jika dan hanya jika kedua matriks itu identik dalam segala hal.

5. Penjumlahan Matriks
   Dua matriks yang ordonya sama dapat dijumlahkan dengan cara menjumlahkan unsur-unsur yang seletaknya.

6. Perkalian Skalar Matriks
   Jika A sembarang matriks dan k sembarang skalar maka hasil kali kA adalah sebuah matriks yang diperoleh dari hasil perkalian setiap unsur dalam A dengan k.

7. Perkalian Matriks
   Dua matriks A dan B dapat dikalikan, yaitu AB, jika banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B. Jika A_{mxr} dan B_{rxn} maka $(AB)_{mxn}$ yang unsur-unsurnya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari unsur dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari (AB) maka pilihlah baris ke-i dari matriks A dan kolom ke-j dari matriks B, kemudian kalikanlah unsur-unsur yang bersangkutan dari

baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian jumlahkanlah hasilnya.

8. Beberapa Kaidah Ilmu Hitung Matriks
Banyak kaidah ilmu hitung bilangan real yang berlaku untuk matriks, namun ada beberapa kekecualian. Di antaranya hukum komutatif untuk perkalian bilangan real tidak berlaku dalam matriks, demikian pula dengan hukum pembatalan (kensel) perkalian dalam bilangan real tidak berlaku pula dalam matriks. Sedangkan beberapa kaidah ilmu hitung yang berlaku dalam matriks dapat Anda lihat dalam kedua teorema pada Kegiatan Belajar 1.

TES FORMATIF 1

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1) Di antara berikut yang bukan merupakan matriks adalah ….

A. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

B. $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

C. $R = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \end{Vmatrix}$

D. $S = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

2) Elemen-elemen dari matriks A $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah ….

A. 0
B. 2
C. 4
D. 2×2

3) Bentuk umum matriks $A_{m \times 2}$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{1m} & a_{2m} \end{bmatrix}$

4) Nilai a, b, c, dan d dari persamaan matriks berikut:

$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ adalah ….

A. a = 1, b = 4, c = –3, d = 5
B. a = 5, b = –3, c = 4, d = 1
C. a = 4, b = 5, c = –3, d = 1
D. a = –3, b = 5, c = 1, d = 4

5) Apabila $A - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka A = ….

A. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

6) Jika A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka A – B = ….

A. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

7) Jika 4 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ + X = 6 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ maka X = ...

A. $\begin{bmatrix} 14 & -14 & -12 \\ -34 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 2 & 22 & 36 \\ 24 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -14 & 14 & 12 \\ 34 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -2 & -22 & 36 \\ -24 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

8) Ditentukan $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$ maka $P \times Q = ...$

A. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -4 & 8 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

9) Jika matriks $B_{2\times3}$, matriks $C_{3\times4}$, dan $a \in R$ maka di antara pernyataan berikut yang tidak terdifinisi adalah ....
A. a(BC)
B. (aB)C
C. C(aB)
D. B(aC)

10) Jika matriks $A_{3\times3}$ dan matriks $O_{3\times3}$ maka di antara pernyataan berikut yang salah adalah ....
A. $A + O = A$
B. $A - A = O$
C. $O - A = -A$
D. $AO \neq O$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100%	= baik sekali
	80 - 89%	= baik
	70 - 79%	= cukup
	< 70%	= kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Jenis-jenis Matriks

Untuk melengkapi perbendaharaan istilah dalam pengetahuan kita tentang matriks akan ditinjau beberapa macam matriks yang memiliki bentuk yang istimewa, sehingga mendapatkan nama yang khusus. Beberapa jenis matriks yang istimewa berikut akan dipakai pula dalam membicarakan materi-materi selanjutnya.

A. MATRIKS PERSEGIPANJANG DAN MATRIKS PERSEGI

1. Matriks Persegipanjang

Jika banyaknya baris dan banyaknya kolom dari sebuah matriks tidak sama maka matriks tersebut dinamakan matriks persegipanjang (*rectangular matrics*).

Contoh 1.13

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Matriks M_1 disebut pula **matriks rebah** atau **matriks terletak** atau matriks datar sebab banyaknya baris lebih sedikit daripada banyaknya kolom. Sedangkan matriks M_2 disebut pula **matriks tegak** atau **matriks berdiri** sebab banyaknya baris lebih banyak daripada banyaknya kolom.

2. Matriks Persegi

Jika banyaknya baris dan banyaknya kolom dari sebuah matriks sama maka matriks tersebut dinamakan **matriks persegi** (*square matrics*).

Jika matriks $A_{m\times n}$ dengan m = n maka matriks A disebut **matriks persegi berderajat n**. Hal ini disebabkan ordo dari matriks A menjadi n × n, karena terdiri dari n baris dan n kolom, dan bentuk umumnya dapat kita tulis seperti berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} dari matriks persegi A di atas disebut **unsur diagonal utama**, dan untuk selanjutnya kita sebut **diagonal utama** atau **diagonal** (diagonal pertama = diagonal pokok).

3. Trace dari Matriks

Jumlah unsur-unsur diagonal (diagonal utama) dari suatu matriks persegi A disebut **trace dari matriks A** (*trace A*).

Dari matriks persegi $A_{n\times n}$ di atas tadi, kita dapatkan *trace* dari matriks A, yaitu:

$$\text{tr. }(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}.$$

B. MATRIKS SEGITIGA

1. Matriks Segitiga Atas

Sebuah matriks persegi A yang unsur-unsur $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ disebut **matriks segitiga atas**.

Dari definisi di atas, jelas bahwa unsur-unsur di bawah diagonal utama dari matriks segitiga atas adalah nol semua, sedangkan unsur-unsur pada diagonal utama dan unsur-unsur di atas diagonal utama tidak dipermasalahkan. Bentuk umum matriks segitiga atas dapat kita tulis sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.14

Berikut adalah dua buah contoh matriks segitiga atas, matriks A berukuran 4×4 dan matriks B yang berukuran 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Segitiga Bawah

Sebuah matriks persegi A yang unsur-unsur $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ disebut **matriks segitiga bawah**.

Konsep matriks segitiga bawah pada dasarnya adalah sama dengan matriks segitiga atas, dan satu sama lainnya mempunyai perbedaan yang saling berkebalikan. Bentuk umum matriks segitiga bawah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.15

Matriks C adalah matriks segitiga bawah yang berukuran 4×4, sedangkan matriks B matriks segitiga bawah yang berukuran 3×3.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

C. MATRIKS DIAGONAL

1. Matriks Diagonal Utama

Jika pada sebuah matriks persegi unsur-unsur pada diagonal utamanya ada yang tidak sama dengan nol, sedangkan unsur-unsur lainnya nol maka matriks tersebut dinamakan matriks diagonal utama (atau disebut pula matriks diagonal)

Secara singkat definisi di atas dapat kita nyatakan bahwa sebuah matriks diagonal utama unsur-unsur $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan ada $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$. Bentuk matriks :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah bentuk umum sebuah matriks diagonal, jika ada paling sedikit satu di antara $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$. Notasi khusus untuk menyatakan matriks diagonal, secara singkat dapat ditulis dalam bentuk :

$$D = \text{diag}\,(a_{11}\,,\, a_{22}\,,\, a_{33}\,,\, \ldots\,,\, a_{nn})$$

Contoh 1.16

Salah satu contoh matriks diagonal derajat tiga adalah matriks $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ditulis: diag (5 , 0 , 3).

2. Matriks Diagonal Kedua

Suatu matriks persegi yang unsur-unsur pada diagonal keduanya (diagonal tambahan) ada yang tidak sama dengan nol, sedangkan unsur-unsur lainnya sama dengan nol disebut **matriks diagonal kedua**.

Contoh 1. 17

Berikut adalah dua buah contoh matriks diagonal kedua

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan salah satu dari a atau b atau c ada yang tidak sama dengan nol.

D. MATRIKS SKALAR DAN MATRIKS SATUAN (IDENTITAS)

Sekarang kita akan melihat bentuk-bentuk khusus dari matriks diagonal, yaitu matriks skalar dan matriks satuan atau matriks identitas.

1. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah sebuah bentuk khusus dari matriks diagonal yang semua unsur pada diagonal utamanya adalah sama yaitu k dengan k suatu bilangan konstan.

Dengan kata lain, suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ disebut matriks skalar jika :

$$a_{ij} = k \text{ untuk } i = j, \text{ dan } a_{ij} = 0 \text{ untuk } i \neq j$$

dengan k adalah sembarang skalar.

Contoh 1. 18

Kedua contoh berikut berturut-turut matriks skalar derajat 3 dan matriks skalar derajat 4 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \text{ dengan } d \neq 0$$

2. Matriks Satuan

Matriks satuan adalah matriks skalar yang semua unsur diagonal utamanya adalah satu, sedangkan unsur-unsur lainnya adalah nol.

Jadi, $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ adalah matriks satuan atau matriks identitas, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$.

Bentuk umum matriks satuan adalah matriks persegi $n \times n$ dengan unsur-unsur pada diagonal utamanya satu sedangkan unsur-unsur lainnya nol, dan biasanya dinyatakan dengan I_n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Jika ordo dari matriks satuan itu tidak diperhatikan biasanya secara singkat dinotasikan dengan I.

Contoh 1. 19

Matriks-matriks

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

berturut-turut merupakan contoh matriks satuan derajat 3 dan matriks satuan derajat 4.

E. MATRIKS NOL

Sebuah matriks yang berordo n × n yang setiap unsurnya adalah nol disebut **matriks nol**, dan dinotasikan dengan $O_{n \times n}$. Sebuah matriks nol tidak perlu merupakan sebuah matriks persegi.

Contoh 1. 20

$$O_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks-matriks nol yang berordo 3 × 2, 3 × 3, dan 2 × 3. Jika ordo-ordo dari matriks nol tersebut sudah jelas atau tidak diperhatikan lagi maka matriks nol tersebut cukup dinotasikan dengan O.

F. MATRIKS BARIS DAN MATRIKS KOLOM

Matriks baris disebut pula **vektor baris** dan untuk **matriks kolom** disebut juga **vektor kolom**.

1. Matriks Baris

Sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris.

Contoh 1. 21

Matriks-matriks

$$[\,1 \quad -5\,],\ [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,] \text{ dan } [\,a_{11} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{1n}\,]$$

berturut-turut merupakan matriks baris yang berordo 1×2 (vektor baris dimensi 2), matriks baris berordo 1×3 (vektor baris dimensi 3) dan matriks baris berordo $1 \times n$ (vektor baris dimensi n)

2. Matriks Kolom.

Sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom.

Contoh 1. 22

Bentuk-bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ \text{dan} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

berturut-turut disebut matriks kolom berordo 2×1 atau vektor kolom dimensi 2, matriks kolom berordo 3×1 atau vektor kolom dimensi 3, dan matriks kolom $m \times 1$ atau vektor kolom dimensi m.

G. KONYUGAT SUATU MATRIKS

Matriks yang diperoleh dari sembarang matriks A yang diketahui dengan mengganti unsur-unsur yang berkoresponden dengan konyugat bilangan kompleks disebut **konyugat dari matriks A**, dan dinotasikan $\overline{A}$.

Dengan memperhatikan definisi di atas, jika A = $\left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ maka $\overline{A} = \left[\overline{a}_{ij}\right]_{m \times n}$, dengan $\overline{a}_{ij}$ merupakan notasi konyugat bilangan kompleks dari a_{ij}. Dengan kata lain unsur (i,j) dari $\overline{A}$ = konyugat unsur (i,j) dari A.

Contoh 1. 23

Jika A = $\begin{bmatrix} 3+3i & 7 & -1+5i \\ 0 & 1-i & -6 \end{bmatrix}$ maka $\overline{A}$ = $\begin{bmatrix} 3-3i & 7 & -1-5i \\ 0 & 1+i & -6 \end{bmatrix}$

Catatan:

1. Perhatikan bahwa $\overline{A}$ adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan cara mengganti i dalam A dengan –i. Proses ini dikenal sebagai proses penggantian unsur-unsur dari matriks A oleh konyugat bilangan-bilangan kompleks yang berkorespondensi. Dengan catatan bahwa
   konyugat kompleks dari x + iy adalah x – iy
   konyugat kompleks dari x – iy adalah x + iy, dan
   konyugat kompleks dari x adalah x .
2. A dan $\overline{A}$ mempunyai ordo yang sama.

Teorema 1. 3.

Konyugat dari konyugat sebuah matriks A adalah matriks A (atau $\left(\overline{\overline{A}}\right)$ = A).

H. TRANSPOS SUATU MATRIKS

Matriks yang berordo n × m yang diperoleh dari matriks A yang berordo m × n dengan cara merubah baris-barisnya menjadi kolom-kolom dan sebaliknya dinamakan matriks transpos dari A dan dinotasikan dengan A' atau A^T atau A^t.

Jika A = $[\,a_{ij}\,]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

maka

$$A' = [\, a_{ji} \,]\, n \times m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{i3} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2i} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Contoh 1. 24

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Perhatikan unsur -1 yang terletak pada baris pertama kolom kedua dari matriks A, dan sekarang berubah menjadi unsur yang terletak pada baris kedua kolom pertama dari matriks A'.

Catatan :

1. Ordo matriks A' adalah n x m jika ordo matriks A $m \times n$.
2. Unsur (i,j) dari A' = unsur (j,i) dari A
3. Transpos dari suatu matriks diagonal adalah matriks diagonal yang sama.

Contoh 1. 25

Jika $A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$, maka $A' = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$

Jadi untuk sebuah matriks diagonal A, ternyata A = A'. Hal yang sama juga berlaku untuk matriks skalar dan matriks satuan, karena kedua matriks tersebut merupakan bentuk yang khusus dari matriks diagonal.

Teorema 1. 4.

Transpos dari transpos sebuah matriks A adalah matriks A sendiri atau $(A')' = A$.

I. MATRIKS SIMETRI DAN MATRIKS SIMETRI MIRING

1. Matriks Simetri

Sebuah matriks persegi $A = [\ a_{ij}\ ]$ dinamakan simetri, jika untuk semua nilai i dan j, $a_{ij} = a_{ji}$.

Dengan memperhatikan definisi di atas, jelas bahwa sebuah matriks dinamakan matriks simetri jika matriks tersebut adalah matriks persegi dan setiap unsur a_{ij} = unsur a_{ji}.

Contoh 1. 26

Matriks-matriks berikut merupakan bentuk matriks simetri

$$\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Jika matriks-matriks di atas kita namakan matriks-matriks A maka kita mudah memeriksanya bahwa A' = transpos dari A = A.

2. Matriks Simetri Miring

Sebuah matriks persegi $A = [\ a_{ij}\ ]$ disebut matriks simetri miring jika unsur $a_{ij} = -a_{ij}$ untuk semua nilai i dan j. (unsur (i,j) dari A = –unsur (j,i) dari A).

Contoh 1. 27

Matriks-matriks berikut kedua-duanya adalah matriks simetri miring

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & -3i \\ 2 & 3i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Ada beberapa langkah untuk membuat sembarang contoh matriks simetri miring. Pertama-tama, tentukanlah semua unsur dari diagonal utamanya = 0. Kemudian ambillah sembarang unsur pada sebelah diagonal dan pada sisi lain yang berdampingannya ditulis negatif dari unsur sembarang itu pada tempat yang simetri terhadap diagonal utama.

J. TRANSPOS KONYUGAT ATAU TRANSNYUGAT SUATU MATRIKS

Transpos konyugat dari sebuah matriks disebut pula transnyugat dari suatu matriks.

Transpos dari konyugat sebuah matriks A disebut **transpos konyugat dari matriks A** dan dinotasikan dengan $A^{\theta} = A^{*}$. Jadi $A^{*} = A^{\theta} = (\overline{A})'$.

Catatan:
1. Jika ordo dari matriks A = $(m \times n)$ ordo dari $A^{\theta} = (n \times m)$.
2. Unsur (i,j) dari A^{θ} = konyugat dari unsur (j,i) dari A.

Contoh 1. 28

Misalkan :

$$A_{(2 \text{ x } 3)} = \begin{bmatrix} 4+i & 0 & 3-i \\ 6 & 7-i & -3i \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A^{\theta}{}_{(3 \text{ x } 2)} = \begin{bmatrix} 4-i & 6 \\ 0 & 7+i \\ 3+i & 3i \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan A^{θ}, Anda dapat memulai dengan proses seperti berikut.

Pertama-tama carilah

$$\overline{A}'_{(2\times 3)} = \begin{bmatrix} 4-i & 0 & 3+i \\ 6 & 7+i & 3i \end{bmatrix}$$

Sekarang kita tulis transpos dari $\overline{A}$, yaitu

$$\overline{A}'_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4-i & 6 \\ 0 & 7+i \\ 3+i & 3i \end{bmatrix}$$

Namun menurut definisi, $\overline{A}' = A^{\theta}$, dan karena itulah maka bentuk matriks yang terakhir ini merupakan hasilnya. Kita dapat pula mencarinya dengan proses berikut.

Langkah pertama, carilah

$$A'_{(3\times 2)} = \begin{bmatrix} 4+i & 6 \\ 0 & 7-i \\ 3-i & -3i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya tulislah konyugat dari matriks A', yaitu

$$\overline{A'}_{(3\times 2)} = \begin{bmatrix} 4-i & 6 \\ 0 & 7+i \\ 3+i & -3i \end{bmatrix}$$

Mengingat $(\overline{A'}) = A^{\theta}$, berarti telah kita dapat hasil yang sama.

K. MATRIKS HERMIT DAN MATRIKS HERMIT MIRING

1. Matriks Hermit

Sebuah matriks persegi $A = [a_{ij}]$ disebut matriks hermit, jika $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Dengan kata lain unsur (i, j) dari A = konyugat kompleks unsur (j, i) dari A.

Contoh 1. 29

Ingatlah bahwa setiap unsur diagonal utama dari matriks hermit adalah real, dan $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ sehingga kita dapat memberikan contoh bahwa dua matriks berikut merupakan matriks hermit, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 2 & 4+i & 3 \\ 4-i & 0 & 2i \\ 3 & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan :

1. Jika semua unsur dari matriks hermit yang diberikan merupakan bilangan real maka kondisinya

   $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ menjadi $a_{ij} = a_{ji}$

   $(\overline{a}_{ij} = a_{ji}$, jika a_{ji} bilangan real)

   Karenanya menurut definisi, kita simpulkan bahwa matriks hermit yang diberikan merupakan matriks simetri real. Jadi, kita akan membicarakan tentang matriks hermit hanya dalam bilangan kompleks saja, selain dari itu kita akan menganggapnya sebagai matriks simetri.

2. Dari catatan (1) di atas, kita simpulkan bahwa sebuah matriks simetri adalah bentuk khusus dari matriks hermit. Atau dengan kata lain, bahwa sebuah matriks persegi A yang simetri tidak mengakibatkan A itu matriks hermit, tetapi jika A hermit maka haruslah A simetri.

2. Matriks Hermit Miring

Sebuah matrik $A = a_{ij}$ disebut matriks hermit miring jika $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Dengan kala lain, unsur (i,j) dari A = –(konyugat unsur (j,i) dari A).

Contoh 1. 30

Ingatlah bahwa semua unsur pada diagonal (diagonal utama dari matriks hermit miring sebagian nol atau semuanya imajiner dan $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$) sehingga kita dapat memberikan dua contoh berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & c+id \\ -c+id & ib \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 2 & 4+i & 3 \\ -4+i & 3i & 2i \\ -3 & 2i & -i \end{bmatrix}$$

Catatan :

1. Kita akan membicarakan matriks hermit miring hanya jika berbicara pada bilangan kompleks. Untuk lebih mendetailnya mengenai ini, lihat catatan 1 dari definisi sebelumnya.
2. Jika A matriks hermit miring maka A simetri miring. Untuk pembicaraan ini lihat catatan 2 dari definisi sebelumnya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Berikanlah contoh matriks simetri ordo 2 dan ordo 4!
2) Berikanlah contoh matriks nol yang merupakan matriks datar!
3) Berikanlah contoh matriks skalar yang bukan matriks diagonal!

4) Tentukan jenis dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$!

5) Benar atau salahkah jenis-jenis matriks berikut:

   a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matriks skalar identitas

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ skalar diagonal kedua

   c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matriks segitiga atas

   d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matriks skalar

   e. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriks baris

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

   Matriks simetri adalah matriks yang setiap $a_{ij} = a_{ji}$

2) Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya nol, sedangkan matriks datar adalah matriks yang jumlah kolomnya lebih banyak daripada jumlah barisnya. Misalnya $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) Tidak ada, sebab matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua unsur pada diagonal utamanya sama, yaitu merupakan konstanta yang tidak nol.

4) Matriks A merupakan contoh matriks nol (1×2), karena semua unsurnya nol. Matriks A juga merupakan matriks baris karena hanya terdiri dari satu baris. Matriks A disebut pula matriks persegipanjang, karena jumlah baris dan kolomnya tidak sama. Matriks A disebut pula matriks rebah atau matriks datar, karena banyaknya kolom lebih banyak daripada banyaknya baris.

5) a. S sebab unsur yang tidak nol yaitu 1 tidak pada diagonal utama.
   b. B sebab ada unsur pada diagonal kedua yang tidak nol.
   c. S sebab unsur-unsur $a_{ij} \neq 0$ untuk $i \leq j$, tetapi $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$. Jadi, merupakan contoh matriks segitiga bawah.
   d. B sebab semua unsur pada diagonal utamanya tidak nol dan sama, yaitu 4.
   e. B sebab unsurnya terdiri dari satu baris.

Selanjutnya buatlah rangkuman dari **Kegiatan Belajar 2** di atas, kemudian bandingkanlah dengan alternatif rangkuman berikut.

RANGKUMAN

1. Matriks Persegipanjang dan Matriks Persegi
   Matriks persegipanjang adalah matriks yang banyaknya kolom dan banyaknya baris tidak sama. Sedangkan matriks persegi adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

2. Matriks Segitiga
   Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang unsur-unsur $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$. Sedangkan matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang unsur-unsur $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

3. Matriks Diagonal
   Matriks diagonal utama adalah matriks persegi yang unsur-unsur pada diagonal utamanya ada yang tidak nol, sedangkan unsur-unsur lainnya nol. Sedangkan matriks diagonal kedua adalah matriks persegi yang unsur-unsur pada diagonal keduanya ada yang tidak nol sedangkan unsur-unsur yang lainnya harus nol.

5. Matriks Nol
   Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya nol.

6. Matriks Baris dan Matriks Kolom
   Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri dari satu baris. Sedangkan matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom.

7. Konyugat Suatu Matriks
   Konyugat dari suatu matriks diperoleh dari sembarang matriks dengan mengganti unsur-unsur yang berkorespondensi dengan konyugat bilangan-bilangan kompleks dari matriks $\overline{A}$.

8. Transpos Suatu Matriks
   Transpos dari suatu matriks A adalah matriks yang diperoleh dengan cara merubah baris menjadi kolom dan sebaliknya dan dinotasikan $A' = A^t$.

9. Matriks Simetri dan Matriks Simetri Miring
   Matriks simetri adalah matriks persegi dengan $a_{ij} = a_{ji}$. Sedangkan matriks simetri miring adalah matriks persegi dengan $a_{ij} = -a_{ji}$.

10. Transnyugat Suatu Matriks
    Transmyugat dari suatu matriks A adalah matriks yang merupakan transpos konyugat dari matriks A dan dinotasikan $A^\theta = A^*$. Atau $A^\theta = A^* = \left(\overline{A}\right)'$.

11. Matriks Hermit dan Matriks Hermit Miring
    Matriks hermit adalah matriks persegi dengan $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Sedangkan matriks hermit miring adalah matriks persegi dengan $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$.

TES FORMATIF 2

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1) Yang merupakan matriks satuan ordo 3 adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) Transpos dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

3) Konyugat dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -2i \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1+2i \end{bmatrix}$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & -1-i & 2i \\ 5 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1+i & 2 & 0 \\ -2i & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4) Transpos konyugat dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -2i \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1-2i \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1-i & 2 & 0 \\ 2i & 0 & -1-2i \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1-i & 2 & 0 \\ -2i & 0 & -1-2i \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -1 & 1-i & 2i \\ -5 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}$

5) Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks ….

A. hermit
B. konyugat
C. hermit miring
D. transpos konyugat

6) Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks ….

A. konyugat
B. transnyugat
C. hermit
D. hermit miring

7) Yang merupakan matriks diagonal utama adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

8) Matriks $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ dengan a, b, c, d, e, f $\in$ R merupakan matriks ….
   A. diagonal utama
   B. diagonal kedua
   C. segitiga atas
   D. segitiga bawah

9) Matriks $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks ….
   A. skalar
   B. diagonal utama
   C. diagonal kedua
   D. satuan

10) Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks ….
   A. simetri
   B. skalar
   C. transpos
   D. simetri miring

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\boxed{\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D Karena P adalah matriks nol atau $P_{2 \times 2}$, Q adalah matriks (3×1) dan R adalah matriks (2×1) yang ketiganya ditulis dalam notasi matriks yang berbeda. Sedangkan S bukanlah matriks (2×2) karena susunan bilangan yang disajikan dalam bentuk $|\quad|$ bukanlah matriks melainkan notasi untuk determinan.

2) A Elemen-elemen dari matriks A adalah 0 semuanya dan A adalah salah satu contoh matriks nol.

3) B Bentuk umum matriks $A_{m\times2}$ terdiri dari m baris dengan 2 kolom.

4) B Sebab $a - b = 8$, $b + c = 1$, $3d + c = 7$, dan $2a - 4d = 6$ maka $a = 5$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 1$.

5) A Sebab $A - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

6) C $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

7) C $4\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X = 6\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} -6 & 18 & 24 \\ 30 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 14 & 12 \\ 34 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

8) A $PQ = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$

9) C C(aB) tidak terdefinisi karena $C_{3\times4}$ sedangkan $(aB)_{2\times3}$ berarti jumlah kolom matriks C tidak sama dengan jumlah baris matriks (aB) sehingga tidak bisa dikalikan.

10) D AO ≠ O adalah pernyataan yang salah, sebab AO = O. (sembarang matriks dikalikan dengan matriks nol hasilnya adalah matriks nol)

Tes Formatif 2

1) C Sebab unsur-unsur pada diagonal utamanya satu sedangkan unsur-unsur lainnya nol.

2) A Sebab unsur-unsur pada baris pertama matriks yang diketahui menjadi unsur-unsur kolom pertama, kemudian unsur-unsur pada baris kedua dan ketiga yang diketahui berturut-turut menjadi kolom kedua dan kolom ketiga.

3) A Sebab unsur-unsurnya merupakan konyugat dari unsur-unsur matriks yang diketahui bilangan a + bi dan a – bi disebut konyugat).

4) C Konyugat dari matriks yang diketahui adalah (a), sedangkan transpos konyugatnya tentunya (c) yang merupakan transpos dari (a).

5) A Matriks hermit sebab $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ untuk setiap i dan j.

6) D Matriks hermit miring, sebab $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ untuk setiap i dan j.

7) A Sebab ada unsur yang tidak nol pada diagonal utamanya sedangkan unsur-unsur lainnya nol.

8) C Sebab ada unsur-unsur $a_{ij} \neq 0$ untuk i > j.

9) A Sebab unsur-unsur pada diagonal utama sama tidak nol, yaitu 2 sedangkan unsur-unsur lainnya nol.

10) A Sebab transposnya sama dengan matriks simetri.

Glosarium

Hukum komutatif penjumlahan, *commutative law for addition* adalah aturan penukaran yang berlaku pada penjumlahan dua buah matriks.

Hukum asosiatif penjumlahan, *associative law for addition* adalah aturan pengelompokan yang berlaku untuk penjumlahan tiga buah matriks.

Hukum asosiatif perkalian, *associative law for multiplication* adalah aturan pengelompokan yang berlaku untuk penjumlahan tiga buah matriks.

Hukum distributive, *distributive law* adalah aturan penyebaran yang berlaku untuk penjumlahan dan perkalian tiga buah matriks.

Comparable adalah matriks yang sederajat yaitu matriks-matriks yang berukuran sama.

Matriks, *matric* atau *matrix* adalah susunan unsur (bilangan) yang berbentuk prsegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom.

Matriks Persegipanjang, *rectangular matrix* adalah matriks yang mempunyai banyak baris tidak sama dengan banyaknya kolom.

Matriks Persegi, square matrix yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Matriks nol, *zero matrix* adalah matriks yang semua unsurnya nol.

Matriks identitas atau **matriks satuan**, *identity matrix* adalah matriks persegi yang unsur-unsur diagonal utamanya 1 sedangkan unsur-unsur lainnya 0.

Ordo, *orde* adalah ukuran dari suatu matriks yang menyatakan banyaknya baris dan kolom dari matriks tersebut.

Trace matriks, *trace of matrix* adalah jumlah dari unsur-unsur diagonal utama suatu matriks persegi.

Daftar Pustaka

Ayres, Frank, JR.Ph.D. (1982). *Theory and Problems of Matrices*. Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.

Anton Howard. (1987). *Elementary Linear Algebra*, 5^{th} Edition. New York: John Wiley & Sons.

Larry Smith. (1998). *Linear* Algebra. Gottingen: Springer.

Raisinghania & Aggarwal, R.S. (1980). *Matrices*. New Delhi: S. Chan & Company Ltd.

Roman Steven. (1992). *Advanced Linear Algebra*. New York, Berlin, Herdelberg, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer-Velag.

Seymour Lipschutz. (1981). *Linear Algebra*. Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.