MODUL 1

Vektor dan Operasi Dasarnya

Drs. Sukirman, M.Pd.

PENDAHULUAN

Dalam modul ini disajikan pengertian vektor, aljabar vektor dan aplikasinya dalam geometri. Aljabar vektor membicarakan penjumlahan vektor dan perkalian skalar dengan vektor beserta sifat-sifatnya. Banyak masalah-masalah dalam geometri yang dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan vektor, selain masalah tersebut dapat diselesaikan dengan tanpa menggunakan vektor, meskipun dengan panjang lebar.

Selain penggunaan vektor dalam geometri, kelak akan ditemui penggunaan vektor dalam Mekanika, Aljabar Linear, Kalkulus Peubah Banyak dan matematika terapan. Oleh karena itu, penguasaan konsep dasar tentang vektor perlu dimatangkan, agar kelak tidak menjadi penghambat dalam menggunakannya.

Dalam modul ini diperkenalkan persamaan vektor dari suatu garis lurus dan aplikasinya dalam geometri. Kelak dalam Modul 2 akan dikaitkan persamaan vektor dengan persamaan Cartesius dan persamaan parametrik dari suatu kurva. Hal ini perlu dibahas karena dalam Analisis Vektor, akan membicarakan 3 jenis persamaan tersebut, maka sudah selayaknya apabila Anda menguasai konsep dasar tentang persamaan vektor tersebut.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat menjelaskan pengertian vektor dan aljabar vektor serta dapat mengaplikasikannya dalam geometri.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:
1. membedakan vektor dan skalar;
2. menentukan hasil penjumlahan dan pengurangan dua vektor atau lebih,
3. menentukan sifat-sifat penjumlahan vektor;
4. menjelaskan pengertian perkalian skalar (bilangan real) dan vektor;
5. menentukan sifat-sifat perkalian skalar dan vektor;
6. menggunakan rumus perbandingan pada geometri;

7. menentukan persamaan vektor suatu garis lurus dan mengaplikasikannya dalam geometri;
8. menggunakan dalil-dalil de Ceva, Menelaos, dan garis berat dalam segitiga untuk menyelesaikan masalah dalam geometri.

KEGIATAN BELAJAR 1

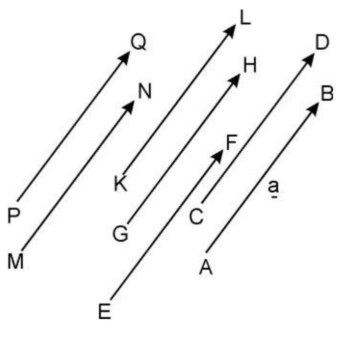
Vektor dan Operasinya

A. PENGERTIAN VEKTOR

Dalam kehidupan sehari-hari, kita banyak menjumpai besaran-besaran, seperti panjang sebuah tongkat, volume suatu kaleng, luas sebidang kebun, banyaknya muatan listrik, massa suatu benda dan sebagainya. Besaran-besaran itu biasanya dinyatakan dengan suatu bilangan yang disertai dengan satuan besaran tersebut. Besaran-besaran seperti itu, disebut *skalar*.

Akan tetapi, ada besaran-besaran lain yang tidak hanya dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan saja, melainkan dinyatakan dengan suatu bilangan (pasangan bilangan) yang mencirikan besar dan arah dari besaran tersebut. Besaran-besaran seperti ini, misalnya gaya, kecepatan, percepatan, torsi, pergeseran/perpindahan. Besaran-besaran seperti ini disebut *vektor*. Secara grafis, sebuah vektor digambarkan sebagai anak panah (ruas garis berarah). Panjang ruas garis menyatakan besarnya vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor. Selanjutnya vektor didefinisikan sebagai berikut.

Vektor adalah himpunan ruas garis berarah yang mempunyai besar dan arah sama.



Gambar 1.1

Pada Gambar 1.1 disajikan gambar sebagian dari ruas-ruas garis yang mempunyai panjang dan arah sama. Suatu vektor dapat diberi simbol dengan salah satu anggotanya sebagai wakil dari himpunan ruas garis.

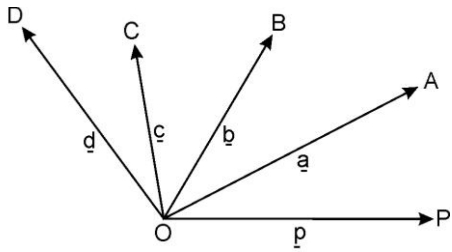
Vektor pada Gambar 1.1 dapat diwakili oleh salah satu ruas garis, misalnya $\underline{a}$ atau $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, atau lainnya. Dalam literatur terdapat beberapa simbol untuk wakil vektor, antara lain:

(1) dengan huruf kecil **a**, **b**, **c**, ... (yang dicetak tebal) atau $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ..., atau $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (2) dengan dua huruf besar, misalnya $\overrightarrow{AB}$ atau $\underset{\rightarrow}{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ atau $\underset{\rightarrow}{PQ}$ dan sebagainya. Anak panah yang menyertainya menyatakan arah, misalnya $\overrightarrow{AB}$

dimaksudkan sebagai wakil vektor dengan titik pangkal A dan bertitik ujung B.

Mengingat definisi vektor di atas, maka kita dapat menggambarkan sebuah vektor dengan titik pangkal dan titik ujung sebarang, asalkan besar dan arahnya tetap. Vektor-vektor seperti ini dinamakan *vektor bebas*. Suatu vektor yang titik pangkalnya tertentu dari vektor-vektor lainnya harus bertitik pangkal tertentu itu maka vektor seperti ini disebut vektor posisi (vektor letak).

Pada Gambar 1.2, vektor-vektor posisi dari titik-titik P, A, B, C dan D masing-masing terhadap titik O berturut-turut adalah $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, dan $\overrightarrow{OD}$ atau dapat dinyatakan berturut-turut dengan $\underline{p}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, dan $\underline{d}$.

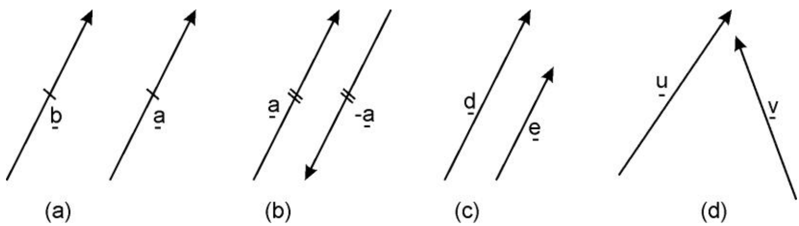


Gambar 1.2

Telah dinyatakan di awal pembahasan ini bahwa suatu wakil vektor, secara grafis dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah (anak panah). Panjang ruas garis menyatakan besarnya vektor, sedangkan arah anak panah menyatakan arah vektor.

Besar vektor $\underline{a}$ dinyatakan dengan $|\underline{a}|$ atau a. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ dinyatakan dengan $|\overrightarrow{AB}|$ atau $\overline{AB}$ (tanpa panah).

Dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dikatakan sama ditulis $\underline{a} = \underline{b}$, apabila setiap wakil-wakilnya mempunyai besar dan arah yang sama.

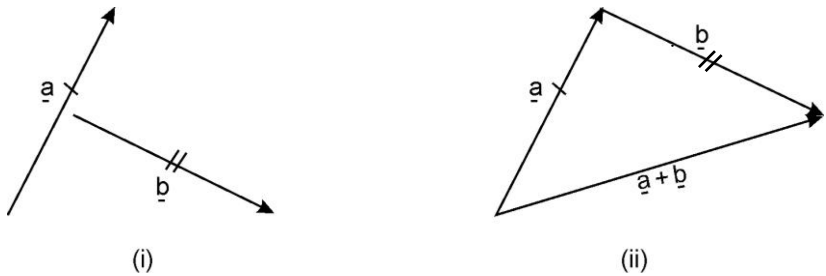


Gambar 1.3

Gambar 1.3(a) menyatakan bahwa $\underline{a} = \underline{b}$, Gambar 1.3(b) menyatakan dua vektor yang besarnya sama, tetapi arahnya berlawanan, jika salah satu vektor dinyatakan dengan $\underline{a}$ maka vektor lainnya (yang besarnya sama dan arahnya berlawanan) dinyatakan dengan -$\underline{a}$. Gambar 1.3(c) menyatakan dua vektor yang arahnya sama, tetapi besarnya berbeda, sedangkan Gambar 1.3(d) menyatakan dua vektor yang besar dan arahnya berbeda.

B. PENJUMLAHAN VEKTOR

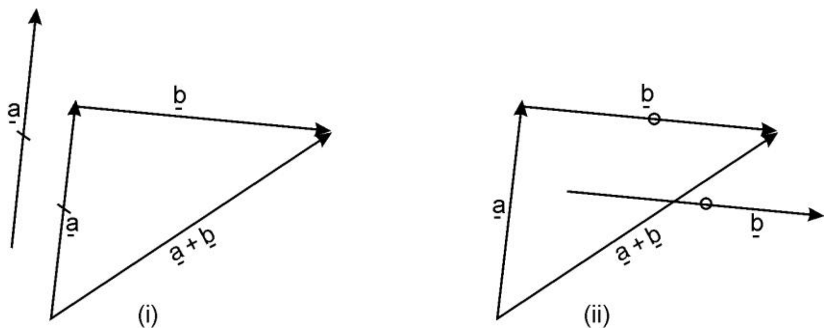
Misalkan, diketahui 2 vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$. Kita dapat menentukan jumlah (*resultant*) dari 2 vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ tersebut, yaitu ($\underline{a}$ + $\underline{b}$) sebagai berikut. Gambarlah vektor $\underline{a}$, kemudian gambarlah vektor $\underline{b}$ dengan titik pangkalnya berimpit dengan titik ujung vektor $\underline{a}$. Maka, $\underline{a}$ + $\underline{b}$ adalah suatu vektor yang menghubungkan titik pangkal vektor $\underline{a}$ dengan titik ujung vektor $\underline{b}$ (lihat Gambar 1.4).



Gambar 1.4

Pada Gambar 1.4(i) diketahui 2 vektor a dan b, sedangkan Gambar 1.4(ii), vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ digambar lagi dengan vektor $\underline{b}$ titik pangkalnya berimpit dengan titik ujung $\underline{a}$. Selanjutnya tampak $\underline{a}$ + $\underline{b}$ sebagai vektor dengan titik pangkal vektor $\underline{a}$ dan titik ujungnya berimpit dengan titik ujung vektor $\underline{b}$.

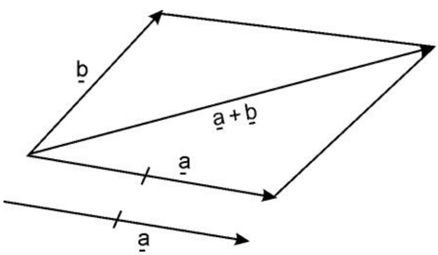
Cara penjumlahan vektor seperti ini disebut *cara segitiga* (*aturan segitiga*). Gambar 1.4 dapat dipersingkat dengan hanya menggambar lagi salah satu vektor $\underline{a}$ atau $\underline{b}$ saja. Misalkan, pada ketentuan vektor $\underline{b}$ yang dipertahankan dan kita menggambar lagi vektor $\underline{a}$ yang titik ujungnya berimpit dengan titik pangkal vektor $\underline{b}$. Selanjutnya $\underline{a}$ + $\underline{b}$ adalah vektor dengan titik pangkalnya vektor $\underline{a}$ dan titik ujungnya berimpit dengan titik ujung vektor $\underline{b}$, seperti tampak pada Gambar 1.5(i).



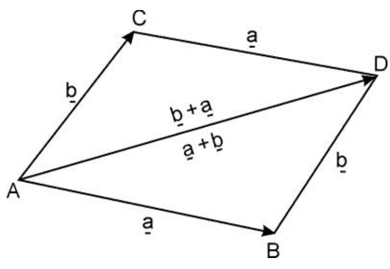
Gambar 1.5

Pada Gambar 1.5 (ii) kita mempertahankan vektor $\underline{a}$ dan menggambar lagi vektor $\underline{b}$ yang titik pangkalnya berimpit dengan titik ujung vektor $\underline{a}$. Maka, $\underline{a} + \underline{b}$ adalah suatu vektor yang menghubungkan titik pangkal vektor $\underline{a}$ dan titik ujung vektor $\underline{b}$.

Cara lain untuk menjumlah dua vektor adalah *cara/aturan jajar genjang*. Misalnya, kita akan menjumlahkan dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dengan aturan jajargenjang. Gambarlah dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dengan titik-titik pangkalnya berimpitan. Selanjutnya buatlah garis lurus melalui titik ujung vektor $\underline{a}$ sejajar dengan vektor $\underline{b}$ dan buatlah garis lurus melalui titik ujung vektor $\underline{b}$ sejajar dengan vektor $\underline{a}$. Sehingga vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan dua garis lurus tersebut membentuk sebuah jajargenjang. Maka $\underline{a} + \underline{b}$ adalah vektor dengan titik pangkal vektor $\underline{a}$ atau $\underline{b}$ dan tepat berimpitan dengan diagonal jajargenjang tersebut (Gambar 1.6).



Gambar 1.6



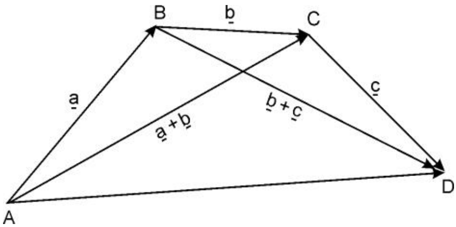
Gambar 1.7

Perhatikan Gambar 1.7, yaitu suatu bangun jajargenjang yang dibentuk dari vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \underline{a}$ dan $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \underline{b}$. Pada $\Delta\,ABD$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \underline{b}$ dan pada $\Delta\,ACD$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \underline{b} + \underline{a}$, sehingga $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$. Hal ini menunjukkan bahwa penjumlahan vektor *bersifat komutatif*.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa penjumlahan vektor *bersifat asosiatif*.

Perhatikan Gambar 1.8, pada $\Delta\,ABC$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$ dan pada $\Delta\,ACD$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$.

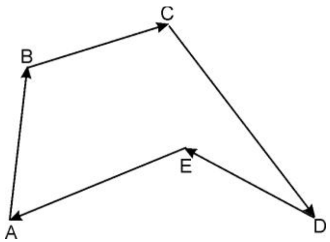
Pada Δ BCD, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \underline{b} + \underline{c}$ dan pada Δ ABD, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$. Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa



Gambar 1.8

$$\overrightarrow{AD} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}).$$

Jadi, penjumlahan vektor bersifat asosiatif.
Perhatikanlah Gambar 1.9 berikut ini.



Gambar 1.9

Mengingat aturan segitiga dan sifat asosiatif penjumlahan vektor, maka kita dapat melakukan penjumlahan vektor sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\\
&= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\\
&= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\\
&= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EA}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA}$$

Atau dapat dilakukan sebagai berikut.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EA}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$$
$$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})+\overrightarrow{EA}$$
$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}$$
$$=\overrightarrow{AA}$$

$\overrightarrow{AA}$ adalah suatu wakil vektor yang besarnya nol dan arahnya sebarang (tak tentu). Selanjutnya vektor nol dinyatakan dengan notasi $\underline{0}$.
Jika $\overrightarrow{AB}$ sebagai wakil dari vektor $\underline{a}$, maka

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ atau $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ dan $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ atau $\underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$

Sehingga pada penjumlahan vektor berlaku bahwa $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$. Selanjutnya $\underline{0}$ disebut *elemen identitas* pada penjumlahan vektor.

Jika $\overrightarrow{AB}$ sebagai wakil dari vektor $\underline{a}$, maka
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \underline{0}$ dan $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \underline{0}$

Karena $\overrightarrow{AB}$ sebagai wakil dari vektor $\underline{a}$, maka $\overrightarrow{BA}$ dapat dipandang sebagai wakil dari -$\underline{a}$ (negatif $\underline{a}$), sehingga pada penjumlahan vektor berlaku:

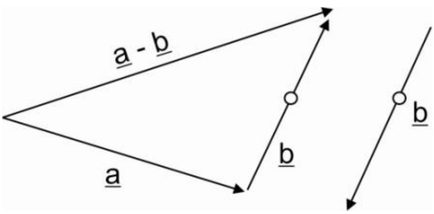
$$\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}$$

-a disebut lawan (*invers penjumlahan*) dari $\underline{a}$.

Oleh karena setiap vektor mempunyai lawan, maka kita dapat mendefinisikan pengurangan vektor sebagai berikut.

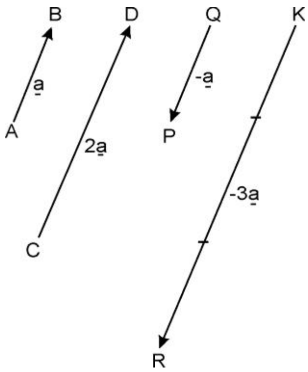
$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$$

$\underline{a}$ dikurangi $\underline{b}$ sama dengan $\underline{a}$ ditambah lawan dari $\underline{b}$. Hal ini diperjelas pada Gambar 1.10.



Gambar 1.10

C. PERKALIAN SKALAR DAN VEKTOR



Gambar 1.11

Perhatikan Empat Vektor pada Gambar 1.11, $\overrightarrow{AB} = \underline{A}$, $\overrightarrow{CD} = 2\underline{a}$, $\overrightarrow{QP} = -\underline{A}$, dan $\overrightarrow{KR} = -3\underline{a}$, maka $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{KR} = 3\overrightarrow{QP}$ atau $\overrightarrow{KR} = -3\overrightarrow{AB}$. Dari $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ dapat dimengerti bahwa $|\overrightarrow{CD}| = 2\,|\overrightarrow{AB}|$ dan $\overrightarrow{CD} \,//\, \overrightarrow{AB}$. Demikian pula dari $\overrightarrow{KR} = -3\overrightarrow{AB}$ maka $|\overrightarrow{KR}| = |-3\overrightarrow{AB}| = 3\,|\overrightarrow{AB}|$ dan $\overrightarrow{KR} \,//\, \overrightarrow{AB}$. Dari sini dapat dimengerti bahwa apabila dua vektor mempunyai arah yang sama, maka dua vektor tersebut sejajar, tetapi tidak sebaliknya, yaitu apabila dua vektor sejajar maka tidak dapat disimpulkan bahwa dua vektor tersebut mempunyai arah yang sama, sebab dua vektor itu dapat berlawanan arah. Dari uraian tersebut dapat disimpulkan pernyataan berikut ini.

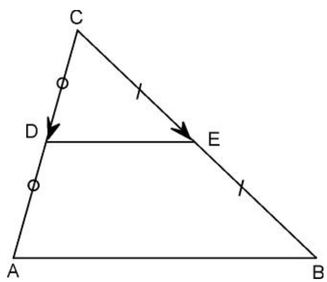
> Apabila k suatu skalar (dalam modul ini k diambil bilangan real) dan $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ maka $\overrightarrow{CD} \,//\, \overrightarrow{AB}$ dan $|\overrightarrow{CD}| = k\,|\overrightarrow{AB}|$.

Contoh 1.1

Pada suatu segitiga ABC diketahui bahwa titik-titik D dan E berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi AC dan BC. Buktikanlah bahwa $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{DE} \,//\, \overrightarrow{AB}$.

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar 1.12. Kita misalkan $\overrightarrow{CD} = \underline{a}$ dan $\overrightarrow{CE} = \underline{b}$, maka $\overrightarrow{DE} = \underline{b} - \underline{a}$ (ingat $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$)
dan $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CD} = 2\underline{a}$,
$\overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CE} = 2\,\underline{b}$.



Gambar 1.12

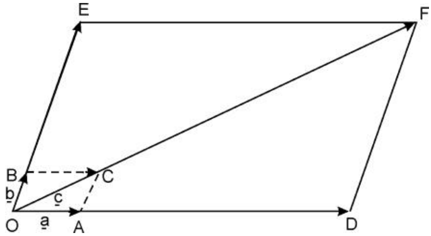
Sehingga $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ atau

$\overrightarrow{AB} = 2\underline{b} - 2\underline{a}$.

$\overrightarrow{AB} = 2(\underline{b} - \underline{a})$.

Oleh karena $\overrightarrow{DE} = \underline{b} - \underline{a}$ dan $\overrightarrow{AB} = 2(\underline{b} - \underline{a})$, maka $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DE}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DE}$ dan $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{DE}|$ atau

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Gambar 1.13

Pada Gambar 1.13 diketahui bahwa $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ dan $\overrightarrow{OC} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$.

$\overrightarrow{OD} = k\ \overrightarrow{OA} = k\ \underline{a}$. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OE} = k\ \overrightarrow{OB} = k\ \underline{b}$. (k suatu skalar).

$\overrightarrow{OF} = k\ \overrightarrow{OC} = k(\underline{a} + \underline{b})$.

Menurut aturan segitiga pada penjumlahan vektor, maka

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF}$$
$$k(\underline{a} + \underline{b}) = k\underline{a} + k\underline{b}$$

Uraian tersebut merupakan pembuktian dari salah satu bagian dari teorema berikut ini.

Teorema:

Untuk sebarang vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dan sebarang skalar k dan h berlaku sifat-sifat berikut ini.

1. $k(\underline{a} + \underline{b}) = k\underline{a} + k\underline{b}$
2. $k(h\underline{a}) = (kh)\underline{a} = \underline{a}(kh)$
3. $(k + h)\underline{a} = k\underline{a} + h\underline{a}$

Contoh 1.2

Diketahui bahwa $\underline{u} = \underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c}$, $\underline{v} = -2\underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}$ dan $\underline{w} = 3\underline{a} - \underline{b} - 2\underline{c}$. Tentukan $\underline{u} - 2\underline{v} + 3\underline{w}$.

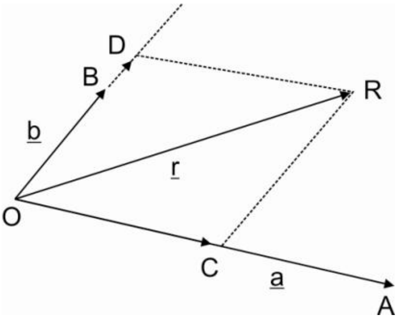
Penyelesaian:

$$\underline{u} - 2\underline{v} + 3\underline{w} = (\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c}) - 2(-2\underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}) + 3(3\underline{a} - \underline{b} - 2\underline{c})$$
$$= \underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c} + 4\underline{a} - 2\underline{b} - 6\underline{c} + 9\underline{a} - 3\underline{b} - 6\underline{c}$$
$$= \underline{a} + 4\underline{a} + 9\underline{a} + 2\underline{b} - 2\underline{b} - 3\underline{b} - c - 6\underline{c} - 6\underline{c}$$
$$= 14\underline{a} - 3\underline{b} - 13\underline{c}$$

Contoh 1.3

Diberikan dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ yang tidak sejajar dan tidak segaris. Dua vektor ini menentukan tepat sebuah bidang. Nyatakanlah sebarang vektor $\underline{r}$ yang terletak pada bidang tersebut dengan vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$.

Penyelesaian:



Gambar 1.14

Pada Gambar 1.14, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ dan $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$

Vektor $\underline{r}$ adalah sebarang vektor yang terletak pada bidang yang memuat vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ yang titik pangkalnya berimpitan dengan titik pangkal vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$. Dari titik ujung vektor $\underline{r}$ dilukis garis-garis lurus yang sejajar dengan vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$, sehingga terbentuk bangun jajargenjang OCRD. Vektor $\overrightarrow{OD}$ searah dengan vektor $\overrightarrow{OB}$, maka $\overrightarrow{OD}$ sama dengan sekian kali vektor $\overrightarrow{OB}$, misalnya $\overrightarrow{OD} = h\overrightarrow{OB} = h\,\underline{b}$.

Demikian pula $\overrightarrow{OC}$ sama dengan sekian kali $\overrightarrow{OA}$, misalnya $\overrightarrow{OC} = k\ \overrightarrow{OA} = k\,\underline{a}$

Jadi, $\underline{r} = k\,\underline{a} + h\,\underline{b}$

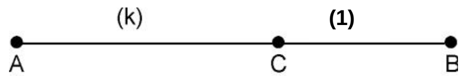
$\overrightarrow{OC} = k\,\underline{a}$ disebut komponen vektor $\underline{r}$ pada arah $\underline{a}$

$\overrightarrow{OD} = k\,\underline{b}$ disebut komponen vektor $\underline{r}$ pada arah $\underline{b}$

Vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ disebut vektor-vektor basis pada bidang tersebut. Selanjutnya, kita dapat mengatakan bahwa vektor $\underline{r}$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$.

D. RUMUS PERBANDINGAN

Jika titik-titik A, B dan C terletak pada satu garis lurus, C dikatakan membagi ruas garis AB dengan perbandingan k, apabila $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{CB}$ (lihat Gambar 1.15)



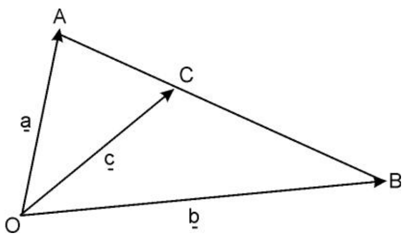
Gambar 1.15

Nilai dari k dapat positif atau negatif sesuai letak dari titik C, yaitu apakah titik C tersebut di dalam atau di luar ruas garis AB. Jika titik C terletak di sebelah kiri titik A, maka nilai k bergerak di antara 0 dan -1. Jika C terletak di antara titik A dan titik B, maka nilai k berada di antara 0 dan ~.
Dan jika titik C terletak di sebelah kanan titik B maka nilai k berada di antara -~ dan -1. Letak titik C yang bersesuaian dengan nilai k diperjelas dengan Gambar 1.16 sebagai berikut.

Gambar 1.16

Jika titik C berimpit dengan titik A, maka k = 0. Jika C berimpit dengan titik B, maka k = $\underline{+}$ ~ dan jika C di sebelah kanan titik B yang jauh tak hingga, maka k = 1.

Perhatikan Gambar 1.17. Misalkan vektor-vektor letak (posisi) dari titik-titik A, B dan C terhadap titik O berturut-turut adalah $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$.
Apabila $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{CB}$ atau $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = k : 1$, kita akan menyatakan vektor $\underline{c}$ dengan $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ sebagai berikut.



Gambar 1.17

Oleh karena $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \underline{c} - \underline{a}$ dan $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \underline{b} - \underline{c}$ maka dari $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ akan menjadi

$$\begin{aligned}
\underline{c} - \underline{a} &= k(\underline{b} - \underline{c}) \\
\underline{c} - \underline{a} &= k\,\underline{b} - k\,\underline{c} \\
\underline{c} + k\,\underline{c} &= \underline{a} + k\,\underline{b} \\
(1 + k)\,\underline{c} &= \underline{a} + k\,\underline{b}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{c} = \frac{\underline{a} + k\underline{b}}{1 + k}} \qquad \text{(rumus perbandingan)}$$

Jika $k = \frac{q}{p}$, yaitu $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = q : p$, maka rumus perbandingan tersebut menjadi:

$$\boxed{\underline{c} = \frac{p\,\underline{a} + q\,\underline{b}}{p + q}}$$

Jika k = 1, yaitu titik C pada pertengahan AB maka:

$$\boxed{\underline{c} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})}$$

Contoh 1.4.

Diketahui segiempat sebarang ABCD. Titik-titik M dan N berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi AD dan BC. Buktikanlah bahwa $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{MN}$.

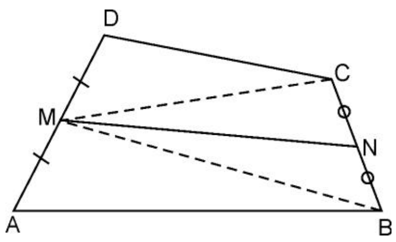
Penyelesaian:

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}}{2}$$



Gambar 1.18

Oleh karena $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}$ maka $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \underline{0}$, sehingga

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \text{ atau}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Contoh 1.5

Jika vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ tidak segaris dan tidak sejajar dan $k\underline{a} + h\underline{b} = \underline{0}$, buktikan bahwa k = h = 0.

Bukti:

Andaikan k = 0, maka dari $k\underline{a} + h\underline{b} = \underline{0}$, dapat diubah menjadi

$\underline{a} = -\left(\frac{h}{k}\right)\underline{b}$. Hal ini berarti vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ sejajar atau segaris dan bertentangan dengan ketentuan, sehingga pengandaian di atas tidak benar, jadi k = 0. Selanjutnya karena k = 0, maka $h\underline{b} = \underline{0}$ sehingga h = 0.

Contoh 1.6

Jika vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ tidak segaris dan tidak sejajar serta diketahui bahwa $k\underline{a} + h\underline{b} = m\underline{a} + n\underline{b}$, buktikanlah bahwa k = m dan h = n.

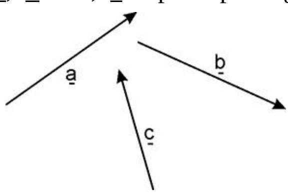
Bukti:

Dari $k\underline{a} + h\underline{b} = m\underline{a} + n\underline{b}$ dapat diubah menjadi $k\underline{a} + h\underline{b} - (m\underline{a} + n\underline{b}) = \underline{0}$
atau $(k - m)\,\underline{a} + (h - n)\,\underline{b} = \underline{0}$
Mengingat contoh 1.5 di atas maka dari persamaan terakhir ini dapat disimpulkan bahwa k - m = 0 dan h - n = 0 sehingga k = m dan h = n

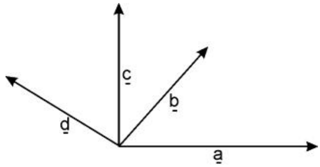
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan, $\underline{c}$ seperti pada gambar berikut ini. Gambarlah:
   a. $\underline{a} + \underline{b} - \underline{c}$
   b. $\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$.



2) Jika diketahui vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ dan $\underline{d}$, seperti pada gambar berikut ini, gambarkanlah:
   a. $\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} - 2\underline{d}$
   b. $2\underline{a} - \underline{b} - \underline{c} - 2\underline{d}$

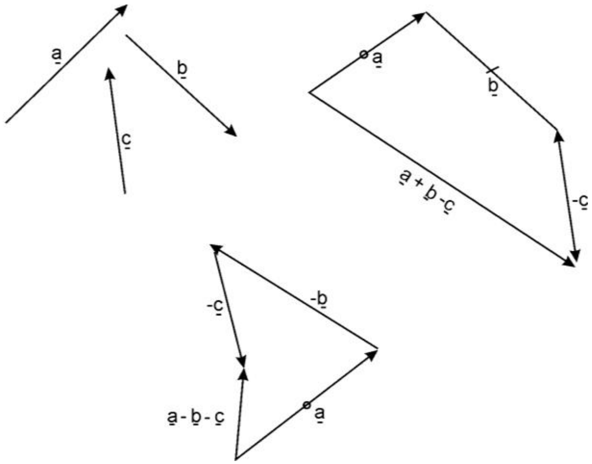


3) Apabila $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ adalah vektor-vektor yang tidak sebidang datar dan $k\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} = \underline{0}$, buktikanlah bahwa $k = m = n = 0$.
4) Jika $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ adalah vektor-vektor yang tidak sebidang datar dan $k_1\underline{a} + m_1\underline{b} + n_1\underline{c} = k_2\underline{a} + m_2\underline{b} + n_2\underline{c}$, buktikanlah bahwa $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$.
5) Diketahui segiempat sebarang ABCD. Titik-titik P, Q, R dan S berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi AB, BC, CD dan DA. Buktikanlah bahwa segiempat PQRS adalah suatu jajargenjang.
6) Diketahui segiempat sebarang ABDC. Titik-titik M dan N berturut-turut pada pertengahan diagonal-diagonal AC dan BD. Buktikanlah bahwa $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{MN}$.
7) O adalah suatu titik di bagian dalam segitiga ABC. Titik-titik P, Q dan R berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi AB, BC dan CA. Buktikanlah bahwa $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$. Apakah hal tersebut tetap benar, apabila titik O berada di bagian luar segitiga ABC? Buktikanlah jawaban Anda!
8) Diketahui trapesium ABCD. Titik-titik M dan N berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi tegak AD dan BC.

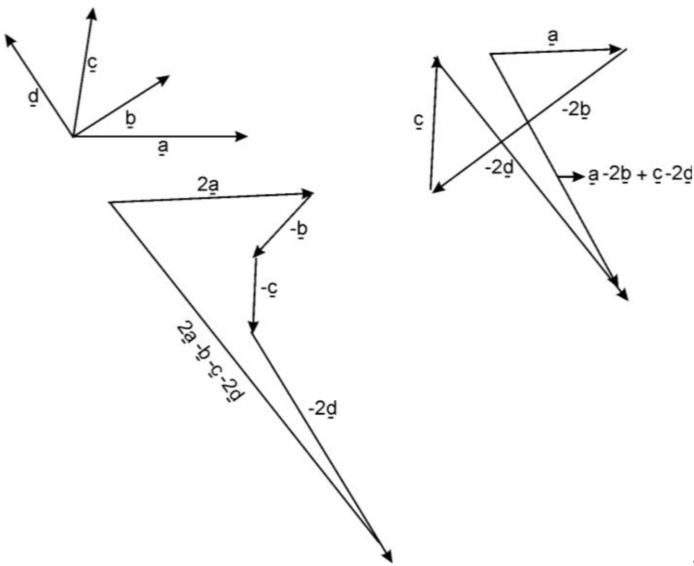
   Buktikanlah bahwa MN // AB dan $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1)



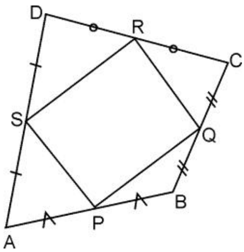
2)



3) Andaikan $k \neq 0$, maka dari $k\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} = \underline{0}$ dapat diubah menjadi $\underline{a} = -\frac{m}{k}\underline{b} - \frac{n}{k}\underline{c}$. Oleh karena $-\frac{m}{k}\underline{b} - \frac{n}{k}\underline{c}$ adalah suatu vektor yang terletak pada bidang yang memuat $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ maka vektor-

vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ terletak dalam satu bidang datar. Hal ini bertentangan dengan ketentuan. Jadi, k = 0. Sejalan dengan ini carilah pembuktiannya apabila diandaikan bahwa $m \neq 0$ dan $n \neq 0$.

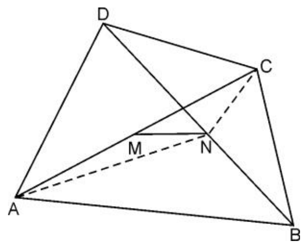
4) Lihat contoh 1.6, soal ini merupakan perluasannya dalam dimensi tiga dan gunakan soal nomor 3.

5) 

ABCD segiempat sebarang sesuai dengan penyelesaian pada contoh 1.1 maka $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ sehingga $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$.

Akibatnya SR // PQ dan $|\overrightarrow{SR}| = |\overrightarrow{PQ}|$. Jadi segi empat PQRS adalah suatu jajargenjang, karena sepasang sisinya sejajar dan sama panjang.

6) ABCD segiempat sebarang. M pada pertengahan AC. N pada pertengahan BD. Menurut rumus perbandingan, maka



$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ dan $\overrightarrow{CN}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

Perhatikan segitiga ANC dan M pada pertengahan AC, maka menurut rumus perbandingan

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$$

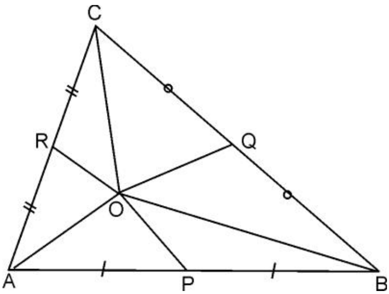
Jadi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{MN}$.

7) $\overline{OP} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB}$

$\overline{OR} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA}$

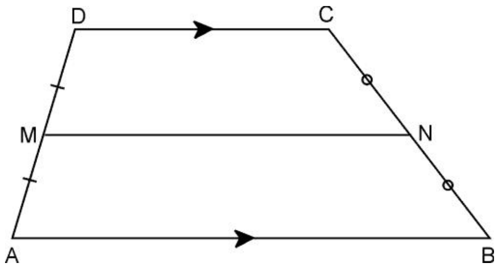
$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OC}$

$\overline{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$



Apabila titik O terletak di bagian luar segitiga ABC, pernyataan (kesamaan) tersebut tetap benar. Buktikanlah dengan cara yang sama dengan cara di atas.

8)



Sejalan dengan contoh 1.6 maka akan diperoleh bahwa

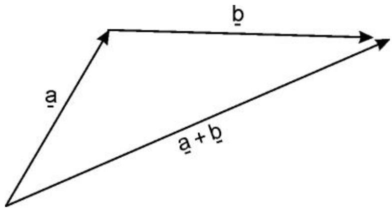
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

Oleh karena $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{DC}$ maka MN // AB dan $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

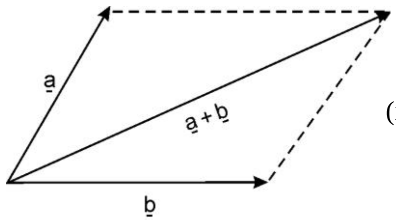
RANGKUMAN

1. Skalar adalah suatu besaran yang hanya mempunyai atau memiliki besar saja, seperti luas, volume, panjang, muatan listrik, massa.
2. Vektor adalah suatu besaran yang memiliki besar dan arah atau ruas garis berarah, secara formal, vektor didefinisikan sebagai himpunan ruas garis berarah yang mempunyai besar dan arah sama.
   Suatu vektor diberi notasi dengan huruf kecil dan dibubuhi tanda garis di bawahnya, misalnya $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ atau dengan dua huruf kapital dan dibubuhi anak panah di atasnya, seperti $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$.

3. Besar vektor $\underline{a}$ ditulis $|\underline{a}|$ atau a (tanpa garis di bawahnya) Penjumlahan dua vektor dapat dilakukan dengan aturan segitiga atau aturan jajaran genjang.

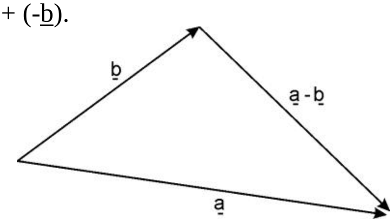


(i) penjumlahan vektor dengan aturan segitiga



(ii) penjumlahan vektor dengan aturan jajargenjang

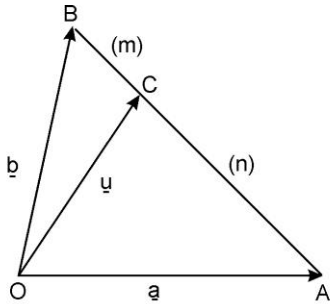
4. Pengurangan Vektor
$\underline{a}$ dikurangi $\underline{b}$ sama dengan $\underline{a}$ ditambah lawan dari $\underline{b}$, atau
$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.



5. Sifat penjumlahan vektor.
   i). $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (sifat komutatif penjumlahan)
   ii). $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (sifat asosiatif penjumlahan)
   iii). $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$. ($\underline{0}$ adalah vektor nol dan merupakan elemen identitas penjumlahan)
   iv). $\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}$ ($-\underline{a}$ adalah lawan/invers penjumlahan dari $\underline{a}$)
6. Perkalian Skalar dan Vektor
Jika k suatu skalar (bilangan nyata) dan $\underline{a}$ suatu vektor, maka k $\underline{a}$ adalah suatu vektor yang besarnya k $|\underline{a}|$ dan arahnya sama dengan arah $\underline{a}$.

7. Sifat Perkalian Skalar dan Vektor
   Jika k dan h adalah skalar dan $\underline{a}$, b adalah vektor-vektor sebarang maka berlaku:
   1. $k(\underline{a} + \underline{b}) = k\,\underline{a} + k\,\underline{b}$
   2. $k(h\underline{a}) = (kh)\,\underline{a} = \underline{a}\,(kh)$
   3. $(k + h)\,\underline{a} = k\,\underline{a} + h\,\underline{a}$

   Jika $\underline{b} = k\underline{a}$ maka $|\,\underline{b}\,| = k|\,\underline{a}\,|$ dan $\underline{b} \,//\, \underline{a}$.
   Rumus Perbandingan



$$\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CA} = m : n$$

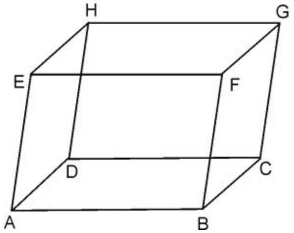
$$\underline{u} = \frac{m\underline{a} + n\underline{b}}{m + n}$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Berikut ini yang merupakan skalar adalah ….
   A. medan magnet
   B. gaya berat
   C. kecepatan
   D. volume

2) Berikut ini yang merupakan vektor adalah ....
   A. panjang
   B. muatan listrik
   C. medan listrik
   D. luas

3) 

Jika ABCD EFGH adalah suatu paralel epipedum, maka $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BF}$ = ...

A. $\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AH}$

C. $\overrightarrow{AG}$

D. $\overrightarrow{AG}$

4) Jika ketentuan, seperti nomor 3 maka $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HD}=....$

A. $\overrightarrow{HF}$

B. $\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{FH}$

D. $\overrightarrow{BA}$

5) Masih dengan ketentuan seperti nomor 3 maka $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=....$

A. $\overrightarrow{DE}$

B. $\overrightarrow{EG}$

C. $\overrightarrow{AG}$

D. $\overrightarrow{HF}$

6) Jika $\underline{u}$ = 3$\underline{a}$ + 2$\underline{b}$ + $\underline{c}$ dan $\underline{v}$ = $\underline{a}$ + $\underline{b}$ - 3$\underline{c}$, maka $\underline{u}$ - 2$\underline{v}$ = ...

A. $\underline{a}$ + 4$\underline{b}$ - 5$\underline{c}$

B. $\underline{a}$ - 4$\underline{b}$ + 5$\underline{c}$

C. $\underline{a}$ - 4$\underline{b}$ + 7$\underline{c}$

D. 2$\underline{a}$ - 3$\underline{b}$ - 4$\underline{c}$

7) Jika $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ berturut-turut adalah vektor posisi titik-titik A, B dan C terhadap titik O maka agar titik-titik A, B dan C terletak dalam satu garis lurus harus dipenuhi syarat bahwa ….

A. $\underline{a}$ + 2$\underline{b}$ - 4$\underline{c}$ = 0

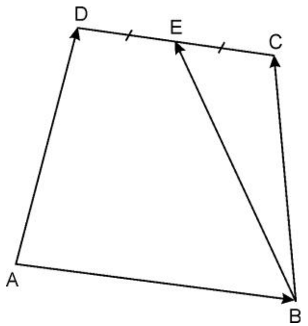
B. 3$\underline{a}$ - 2$\underline{b}$ + 3$\underline{c}$ = 0

C. $\underline{a} - 4\underline{b} - 2\underline{c} = 0$
D. $\underline{a} + 2\underline{b} - 3\underline{c} = 0$

8) Apabila $\underline{b} = -3\underline{a}$ maka dapat disimpulkan bahwa ....
A. $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ mempunyai arah yang sama
B. $|\,\underline{a}\,|$ lebih panjang dari $|\,\underline{b}\,|$
C. $\underline{a}$ sejajar atau berimpitan dengan $\underline{b}$
D. $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ tidak sebidang datar

9) Jika $5\underline{c} = 3\underline{a} + 2\underline{b}$ maka dapat disimpulkan bahwa ....
A. vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ sebidang datar
B. vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ segaris lurus
C. vektor $\underline{c}$ tegak lurus pada bidang yang memuat $\underline{a}$ dan $\underline{b}$
D. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tidak sebidang datar karena $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ pasti sebidang datar

10)



ABCD segi empat sebarang. Jika $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{c}$, dan E pada pertengahan DC maka $\overrightarrow{BE}$ = ...

A. $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c}$

B. $\frac{1}{2}(-\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$

C. $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b} - \underline{c})$

D. $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b} + \underline{c})$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Banyaknya Jawaban yang Benar}}{\text{Banyaknya Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

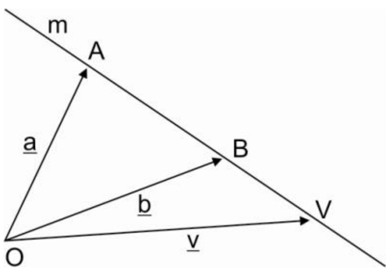
Persamaan Vektor suatu Garis Lurus dan Aplikasinya

A. PERSAMAAN VEKTOR SUATU GARIS LURUS

Kita telah terbiasa dengan persamaan garis lurus (persamaan linier) pada bidang Cartesius dan biasanya menggunakan variabel-variabel x dan y. Kini akan kita pelajari persamaan garis lurus dalam vektor atau persamaan vektor dari suatu garis lurus. Kelak dalam Modul 2 akan dipelajari hubungan timbal-balik persamaan vektor dan persamaan Cartesius dari suatu kurva.

Misalkan, $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ berturut-turut adalah vektor-vektor posisi dari titik-titik A dan B terhadap titik O (lihat Gambar 1.19). Selanjutnya kita akan menentukan persamaan vektor dari suatu garis lurus yang melalui titik A dan titik B tersebut.

Misalnya, garis yang melalui titik-titik A dan B adalah garis m.



Gambar 1.19

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\underline{a} + \underline{b}$. $\overrightarrow{AB}$ adalah suatu vektor yang terletak pada garis m, maka $\overrightarrow{AB}$ diambil sebagai *vektor arah* dari garis m. Ambil sebarang titik V pada garis m, dan vektor posisi titik V terhadap titik O adalah $\underline{v}$, maka $\overrightarrow{AV}$ dapat dibandingkan dengan $\overrightarrow{AB}$, misalnya:

$\overrightarrow{AV} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$ (λ dibaca lamda dan λ suatu bilangan real)

$\overrightarrow{AV} = \lambda\ (-\underline{a} + \underline{b})$

Selanjutnya $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AV}$

$$\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ (-\underline{a} + \underline{b}) \qquad \text{...................*)}$$

Oleh karena V adalah sebarang titik pada garis m, maka setiap titik V pada garis m akan berlaku persamaan *) tersebut. Dengan kata lain persamaan *) merupakan persamaan vektor dari garis m. Jadi, persamaan vektor garis yang melalui A dan B adalah:

$$\boxed{\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ (-\underline{a} + \underline{b})}$$

$\underline{v}$ adalah variabel (untuk vektor), yaitu vektor posisi sebarang titik V pada garis m.

Selanjutnya, $\underline{a}$ disebut vektor tumpu

λ disebut parameter (bilangan real)

$-\underline{a} + \underline{b}$ disebut vektor arah (arah garis lurus)

Kita dapat menentukan persamaan vektor dari garis AB tersebut dengan mengambil $\underline{b}$ sebagai vektor tumpu.

Misalkan, $\overrightarrow{BV} = \mu\ \overrightarrow{AB}$ (μ dibaca "mu" sebagai parameter)

$\overrightarrow{BV} = \mu\ (-\underline{a} + \underline{b})$

Maka, $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BV}$

$\underline{v} = \underline{b} + \mu\ (-\underline{a} + \underline{b})$ adalah persamaan vektor garis yang melalui titik-titik A dan B.

Kita dapat pula menentukan persamaan vektor dari garis lurus yang melalui A dan B tersebut dengan mengambil $\overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{b}$ sebagai vektor arah dan $\underline{a}$ sebagai vektor tumpu, yaitu:

$\underline{v} = \underline{a} + \alpha\ (\underline{a} - \underline{b})$, dengan α sebagai parameter

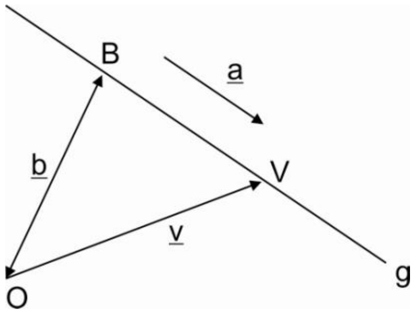
Persamaan vektor dari garis lurus yang melalui A dan B dapat pula dibentuk dengan vektor arah $\overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{b}$ dan dengan vektor tumpu $\underline{b}$, yaitu

$\underline{v} = \underline{b} + \beta\ (\underline{a} - \underline{b})$ dengan β sebagai parameter

Meskipun terdapat beberapa persamaan vektor yang berbeda-beda, namun persamaan-persamaan vektor tersebut menyatakan sebuah garis lurus atau menyatakan representasi dari garis lurus yang sama.

Suatu garis lurus, selain ditentukan oleh dua titiknya, dapat pula ditentukan oleh sebuah titik dan arah garis tersebut. Berikut ini diuraikan cara menentukan persamaan vektor dari garis lurus yang diketahui sebuah titiknya dan vektor arah garis tersebut.

Misalkan $\underline{b}$ adalah vektor posisi titik B terhadap O dan diketahui pula sebuah vektor $\underline{a}$ sebagai vektor arah dari garis lurus. Akan ditentukan persamaan vektor dari garis lurus yang melalui titik B dan sejajar dengan vektor $\underline{a}$.



Gambar 1.20

Misalkan, g adalah garis lurus yang melalui titik B dan sejajar dengan $\underline{a}$. Ambil sebarang titik V pada garis g dan vektor posisi titik V terhadap O adalah $\underline{v}$. $\overrightarrow{BV}$ pada garis g dan g sejajar dengan $\underline{a}$, maka $\overrightarrow{BV}$ sejajar dengan $\underline{a}$, sehingga $\overrightarrow{BV} = \lambda\ \underline{a}$ ($\overrightarrow{BV}$ = sekian kali $\underline{a}$).

Selanjutnya, $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BV}$

$\underline{v} = \underline{b} + \lambda\ \underline{a}$ dengan λ sebagai parameter

Oleh karena V adalah sebarang titik pada garis g yang memenuhi persamaan terakhir, maka persamaan itu akan dipenuhi oleh setiap titik V pada garis g. Jadi, persamaan vektor dari garis lurus yang melalui titik B dan sejajar dengan vektor $\underline{a}$ adalah

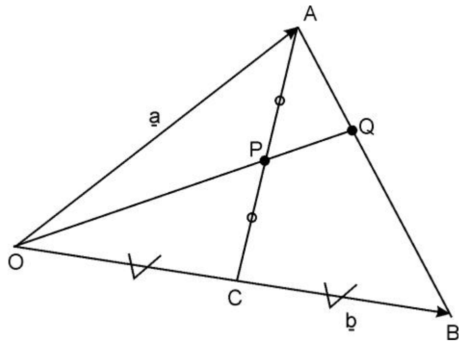
$\boxed{\underline{v} = \underline{b} + \lambda\ \underline{a}}$ dengan parameter λ

Contoh 1.7

Pada segitiga OAB ditarik garis berat AC (C pada pertengahan sisi OB). Selanjutnya ditarik garis OP (P pada pertengahan AC) yang memotong sisi AB di Q. Jika $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ dan $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$.

(i) Tentukanlah persamaan vektor garis AB.
(ii) Tentukanlah persamaan vektor dari garis OP.
(iii) Tentukan $\overrightarrow{AQ}$: $\overrightarrow{QB}$ dan $\overrightarrow{OP}$: $\overrightarrow{PQ}$

Penyelesaian:



Gambar 1.20

Misalkan $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, dan $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$. C pada pertengahan OB dan P pada pertengahan AC

(i) Akan ditentukan persamaan vektor dari garis AB. Sebagai vektor arah adalah $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ dan $\underline{a}$ diambil sebagai vektor tumpu. Maka persamaan vektor dari garis AB adalah $\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ (\underline{b} - \underline{a})$

(ii) Vektor arah garis OP adalah $\overrightarrow{OP}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \underline{a} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \underline{a} + \tfrac{1}{2}\left(-\underline{a} + \tfrac{1}{2}\underline{b}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\underline{a} + \tfrac{1}{2}\underline{b}\right)\end{aligned}$$

Oleh karena garis OP melalui titik asal O, maka vektor tumpu garis OP adalah $\underline{0}$ (vektor nol). Jadi persamaan vektor dari garis OP adalah

$$\underline{v} = \mu\ \overrightarrow{OP}$$

$$\underline{v} = \tfrac{1}{2}\mu\ \left(\underline{a} + \tfrac{1}{2}\underline{b}\right)$$

(iii) Persamaan garis AB adalah $\underline{v} = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a})$ dan persamaan garis OP adalah $\underline{v} = \frac{1}{2}\mu\ (\underline{a} + \frac{1}{2}\ \underline{b})$. Kedua garis tersebut berpotongan di Q, maka di titik Q berlaku

$$\underline{a} + \lambda\ (b - a) = \frac{1}{2}\ \mu\ (\underline{a} + \frac{1}{2}\ \underline{b})$$

$$(1 - \lambda)\ \underline{a} + \lambda\ \underline{b} = \frac{1}{2}\ \mu\ \underline{a} + \frac{1}{4}\ \mu\ \underline{b}$$

Dari kesamaan terakhir ini diperoleh

$$1 - \lambda = \frac{1}{2}\ \mu \text{ dan } \lambda = \frac{1}{4}\mu$$

Dari dua persamaan dalam λ dan μ ini diperoleh $\lambda = \frac{4}{3}$ dan $\mu = \frac{1}{3}$.

Hal ini berarti pada titik Q nilai μ pada persamaan $\underline{v} = \mu\ \overrightarrow{OP}$ adalah $\mu = \frac{4}{3}$. Vektor $\underline{v}$ dalam hal ini adalah $\underline{v} = \overrightarrow{OQ}$, sehingga:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{3}\ \overrightarrow{OP}$$

Ini berarti $\overrightarrow{OP} : \overrightarrow{OQ} = 3 : 4$ atau $\overrightarrow{OP} : \overrightarrow{PQ} = 3 : 1$.

$\lambda = \frac{1}{3}$, berarti pada titik Q berlaku kesamaan

$$\underline{v} = \underline{a} + \frac{1}{3}\ (\underline{b} - \underline{a})$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$$

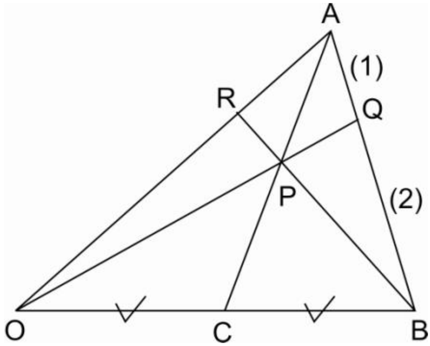
Dalam hal ini $\frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$ maka

$$\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{AB} = 1 : 3$$

$$\text{atau } \overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QB} = 1 : 2$$

Contoh 1.8

Perhatikanlah lagi Gambar 1.20 dan hasil perhitungannya sebagai ketentuan untuk masalah berikutnya. Kita gambar lagi Gambar 1.20 sebagai Gambar 1.21 berikut.



Gambar 1.21

(i) Tentukan persamaan vektor dari garis OA
(ii) Tentukan persamaan vektor dari garis BR
(iii) Tentukan $\overrightarrow{OR}$: $\overrightarrow{RA}$ dan $\overrightarrow{BP}$: $\overrightarrow{PR}$

Penyelesaian:

(i) Persamaan vektor dari garis OA adalah v = $\alpha\underline{a}$, dengan $\underline{a}$ sebagai vektor arah, α sebagai parameter dan vektor tumpunya $\underline{0}$ (vektor nol), karena garis OA melalui titik asal O.

(ii) Persamaan vektor dari garis BR adalah $\underline{v} = \overrightarrow{OB} + \beta\,\overrightarrow{BP}$
$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ sebagai vektor tumpu dan β sebagai parameter. Vektor arahnya adalah $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP} = -\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b}$ atau $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\underline{a} - \frac{3}{4}\underline{b}$.
Jadi persamaan vektor dari garis BR adalah

$$\underline{v} = \underline{b} + \beta\left(\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{3}{4}\underline{b}\right)$$

(iii) Persamaan vektor dari garis OA adalah $\underline{v} = \alpha\underline{a}$ dan persamaan vektor dari garis BR adalah $\underline{v} = \underline{b} + \beta\left(\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{3}{4}\underline{b}\right)$. Garis OA dan garis BR berpotongan di titik R, maka pada titik R berlaku

$$\alpha\underline{a} = \underline{b} + \beta\left(\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{3}{4}\underline{b}\right)$$

$$\alpha\,\underline{a} = \frac{1}{2}\beta\,\underline{a} + \left(1-\frac{3}{4}\beta\right)\underline{b}$$

Sehingga $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ dan $1 - \frac{3}{4}\beta = 0$

Dari dua persamaan dalam α dan β ini diperoleh $\beta = \frac{4}{3}$ dan $\alpha = \frac{2}{3}$.

$\alpha = \frac{2}{3}$ berarti pada titik R berlaku $\underline{v} = \frac{2}{3}\underline{a}$. Dalam hal ini $\underline{v} = \overrightarrow{OR}$ dan $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, sehingga $\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

Jadi $\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{OA} = 2 : 3$ atau $\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{RA} = 2 : 1$.

$\beta = \frac{4}{3}$, berarti pada titik R berlaku $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BP}$. Dalam hal ini $\frac{4}{3}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BR}$ atau $\overrightarrow{BR} : \overrightarrow{BP} = 4 : 3$. Jadi $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{BR} = 3 : 1$.

Perhatikan kembali Gambar 1.21, maka

$$\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{CB}} \times \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{QA}} \times \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RO}} = \frac{1}{-1} \times \frac{2}{-1} \times \frac{1}{-2} = -1$$

Ingat bahwa $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{CB}$, sehingga $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB} = 1 : -1$

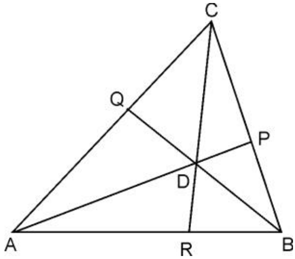
Demikian pula $\overrightarrow{QB} : \overrightarrow{QA} = 2 : -1$ dan $\overrightarrow{RA} : \overrightarrow{RO} = 1 : -2$

Memperhatikan Gambar 1.21, maka pernyataan

$$\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{CB}} \times \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{QA}} \times \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RO}} = -1 \quad \text{disebut dalil/rumus Ceva}$$

Secara umum rumus de Ceva dinyatakan sebagai berikut.
Jika D adalah titik sebarang pada daerah segitiga ABC dan garis-garis AD, BD dan CD berturut-turut memotong sisi-sisi BC, AC dan AD di titik-titik P, Q dan R, maka berlaku bahwa:

$$\frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} \times \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} = -1$$



Gambar 1.22

Dengan penyelesaian, seperti pada contoh 1.7 dapat dibuktikan pula bahwa

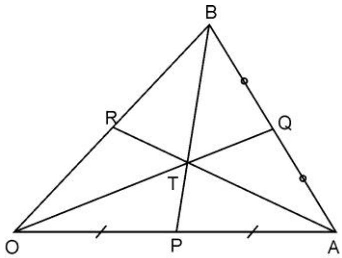
$$\frac{\overrightarrow{PD}}{\overrightarrow{PA}} + \frac{\overrightarrow{RD}}{\overrightarrow{RC}} + \frac{\overrightarrow{QD}}{\overrightarrow{QB}} = 1$$

(Periksalah kebenaran humus ini pada Contoh 1.7 dan Contoh 1.8))

Contoh 1.9

Buktikanlah bahwa ketiga garis berat dalam sebuah segitiga berpotongan pada sebuah titik (konkuren) dan tiap garis berat dipotong oleh garis berat lainnya dengan perbandingan 1 : 2.

Penyelesaian:



Gambar 1.23

Pada Gambar 1.23, perhatikanlah dulu garis berat OQ dan BP. Akan ditunjukkan bahwa $\overrightarrow{OT}$: $\overrightarrow{TQ}$ = $\overrightarrow{BT}$: $\overrightarrow{TP}$ = 1 : 2. Pandanglah O sebagai titik asal dan $\overrightarrow{OA}$ = $\underline{a}$, $\overrightarrow{OB}$ = $\underline{b}$. Persamaan vektor dari garis OQ adalah

$\underline{v} = \lambda\ \overrightarrow{OQ}$ atau $\underline{v} = \lambda\ (\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b})$

Persamaan vektor dari garis BP adalah $\underline{v} = \overrightarrow{OB} + \mu \ \overrightarrow{BP}$ atau

$\underline{v} = \underline{b} + \mu \ (\frac{1}{2}\underline{a} - \underline{b})$

Garis OQ dan garis BP berpotongan di titik T, maka di titik T berlaku hubungan

$$\lambda \ (\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}) = \underline{b} + \mu \ (\frac{1}{2}\underline{a} - \underline{b})$$

$$\frac{1}{2} \ \lambda \underline{a} + \frac{1}{2} \ \lambda \underline{b} = \frac{1}{2} \ \mu \underline{a} + (1 - \mu)\underline{b}$$

Dari kesamaan terakhir ini diperoleh

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2} \ \mu \text{ dan } \frac{1}{2} \ \lambda = 1 - \mu$$

Dari dua persamaan dalam λ dan μ ini diperoleh bahwa $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$

$\lambda = \frac{2}{3}$ berarti pada titik T berlaku $\underline{v} = \frac{2}{3} \ \overrightarrow{OQ}$. Dalam hal ini $\underline{v}$ adalah vektor posisi titik T terhadap O, maka $\underline{v} = \overrightarrow{OT} = \frac{2}{3} \ \overrightarrow{OQ}$.

Jadi $\overrightarrow{OT} : \overrightarrow{OQ} = 2 : 3$ atau $\overrightarrow{OT} : \overrightarrow{TQ} = 2 : 1$.

$\mu = \frac{2}{3}$ berarti di titik T berlaku $\underline{v} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BP}$. Dalam hal ini $\underline{v}$ adalah vektor posisi titik T terhadap O, yaitu $\underline{v} = \overrightarrow{OT}$.

Jadi, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \ \overrightarrow{BP}$

Oleh karena $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$ maka

$$\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3} \ \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{BP} = 2 : 3$$

$$\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TP} = 2 : 1$$

Untuk membuktikan bahwa ketiga garis berat berpotongan pada satu titik ditunjukkan sebagai berikut.

Karena garis-garis berat OQ dan BP berpotongan di titik T, maka apabila kita dapat menunjukkan bahwa garis AT yang memotong sisi OB di R

sebagai garis berat pada sisi OB, maka kita telah membuktikan bahwa ketiga garis berat berpotongan pada satu titik, yaitu titik T.
Jadi, kita akan menunjukkan bahwa $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{RB}$

Persamaan vektor dari garis OB adalah $\underline{v} = \alpha\ \overrightarrow{OB}$ atau $\underline{v} = \alpha\ \underline{b}$
Persamaan vektor dari garis AT adalah $\underline{v} = \overrightarrow{OA} + \beta\ \overrightarrow{AT}$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OT}$$
$$= -\underline{a} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{OQ}$$
$$\overrightarrow{AT} = -\underline{a} + \frac{2}{3}\ (\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b})$$
$$= -\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}$$

Jadi, persamaan vektor dari garis AT adalah $\underline{v} = \underline{a} + \beta\ (-\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b})$

Garis-garis OB dan AT berpotongan di titik R, maka pada titik R berlaku:

$$\alpha\ \underline{b} = \underline{a} + \beta\ (-\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b})$$
$$\alpha\ \underline{b} = (1 - \frac{2}{3}\beta)\ \underline{a} + \frac{1}{3}\beta\ \underline{b}$$

Dari kesamaan terakhir ini diperoleh $1 - \frac{2}{3}\beta = 0$ dan $\lambda = \frac{1}{3}\beta$

Selanjutnya, dari 2 persamaan dalam α dan β, diperoleh $\beta = \frac{3}{2}$ dan $\alpha = \frac{1}{2}$.

$\alpha = \frac{1}{2}$, berarti pada titik R berlaku:

$$\underline{v} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{OB} = 1 : 2$$
$$\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{OB} = 1 : 1$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{RB}$$

Ini berarti bahwa AR adalah garis berat yang melalui titik T.

Dari $\beta = \frac{3}{2}$ diperoleh bahwa $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TR} = 2 : 1$.

Perhatikanlah kembali Gambar 1.23, dapatkah Anda menunjukkan bahwa titik-titik P, Q dan R berturut-turut membagi ruas-ruas garis $\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{OT}$ dan $\overrightarrow{AT}$, sedemikian hingga

$$\frac{\overrightarrow{PT}}{\overrightarrow{PB}} + \frac{\overrightarrow{QT}}{\overrightarrow{QO}} + \frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$

Coba, tunjukkanlah!

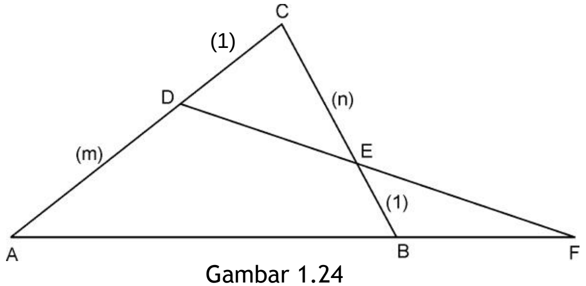
Contoh 1.10

Titik-titik D dan E berturut-turut pada sisi-sisi AC dan BC suatu segitiga ABC sedemikian hingga $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DC} = m : 1$ dan $\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EB} = n : 1$. Perpanjangan garis DE memotong perpanjangan sisi AB di titik F.

Buktikanlah bahwa $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} \times \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EB}} \times \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FA}} = -1$ (dalil Menelaos)

Penyelesaian:

Diambil A sebagai titik asal dan $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{c}$. Selanjutnya, kita akan mencari perbandingan $\overrightarrow{BF} : \overrightarrow{FA}$.



Gambar 1.24

Ruas garis DF biasa disebut transversal dari segitiga ABC

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$= -\frac{m}{m+1}\,\underline{c} + \underline{b} + \frac{1}{n+1}\,(\underline{c} - \underline{b})$$

$$= \frac{1-mn}{(m+1)(n+1)}\,\underline{c} + \frac{n}{n+1}\,\underline{b}$$

Persamaan vektor dari garis DF adalah:

$$\underline{v} = \overrightarrow{AD} + \lambda\ \overrightarrow{DE}$$

$$\underline{v} = \frac{m}{m+1}\underline{c} + \lambda\left(\frac{1-mn}{(m+1)(n+1)}\underline{c} + \frac{n}{n+1}\underline{b}\right)$$

Persamaan vektor dari garis AF adalah

$$\underline{v} = \mu\ \overrightarrow{AB}$$

$$\underline{v} = \mu\,\underline{b}$$

Garis-garis DF dan AF berpotongan di F maka di titik F berlaku hubungan:

$$\frac{m}{m+1}\underline{c} + \lambda\left(\frac{1-mn}{(m+1)(n+1)}\underline{c} + \frac{n}{n+1}\underline{b}\right) = \mu\ \underline{b}$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$\frac{m}{m+1} + \frac{1-mn}{(m+1)(n+1)}\lambda = 0 \text{ dan } \frac{n}{n+1}\lambda = \mu$$

Selanjutnya dari 2 persamaan dalam λ dan μ ini diperoleh bahwa

$$\lambda = \frac{mn+m}{mn-1} \text{ dan } \mu = \frac{mn}{mn-1}$$

$\mu = \dfrac{mn}{mn-1}$, berarti pada titik F, vektor posisinya terhadap titik A adalah

$$\overrightarrow{AF} = \frac{mn}{mn-1}\ \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{AB} = mn : (mn - 1)$$

atau $\overrightarrow{BF} : \overrightarrow{BA} = -1 : mn$

sehingga $\dfrac{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{CE} \times \overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{FA}} = \dfrac{m}{1} \times \dfrac{n}{1} \times \dfrac{-1}{mn} = -1$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan, vektor-vektor posisi titik-titik A dan B berturut-turut terhadap titik O adalah $\underline{a}$ dan $\underline{b}$. Titik P terletak pada AB, sehingga $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = 3 : 1$.
   a. Tentukanlah persamaan vektor dari garis OP.
      Jika titik Q pada pertengahan ruas garis OA dan garis BQ memotong OP di titik R.
   b. Tentukanlah persamaan vektor dari garis BQ.
   c. Nyatakan vektor posisi $\overrightarrow{OR}$ dengan vektor-vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$.
   d. Tentukan perbandingan $\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{RP}$ dan $\overrightarrow{BR} : \overrightarrow{RQ}$. Tarik garis melalui A dan R yang memotong garis OB di titik T.
   e. Tentukan perbandingan $\overrightarrow{OT}$ dan $\overrightarrow{TB}$.
   f. Tentukan perbandingan $\overrightarrow{AR}$ dan $\overrightarrow{RT}$.

2) Titik-titik D dan E berturut-turut pada sisi-sisi AC dan BC suatu segitiga ABC sedemikian hingga $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DC} = 3 : 1$ dan $\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EB} = 2 : 1$. Tariklah garis DE dan perpanjanglah sehingga memotong perpanjangan sisi AB di titik F.
   a. Tentukanlah perbandingan $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BF}$ dan $\overrightarrow{DE} : \overrightarrow{EF}$.
      Tariklah garis AE dan perpanjanglah sehingga memotong garis CF di titik H.
   b. Tentukan perbandingan $\overrightarrow{FH}$ dan $\overrightarrow{HC}$.
   c. Tentukan pula perbandingan $\overrightarrow{AE}$ dan $\overrightarrow{EH}$.

3) Diketahui suatu jajargenjang ABCD. Titik-titik E dan F berturut-turut pada pertengahan sisi-sisi AB dan BC. Buktikanlah bahwa garis-garis DE dan DF membagi tiga sama panjang pada diagonal AC.

4) Diketahui trapesium ABCD dengan sisi-sisi sejajar AB dan DC serta $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$. Titik Q adalah titik potong diagonal-diagonal AC dan BD, sedangkan titik P adalah titik potong sisi-sisi tegak AD dan BC.

a. Tentukanlah perbandingan $\overrightarrow{AQ}$ dan $\overrightarrow{QC}$!

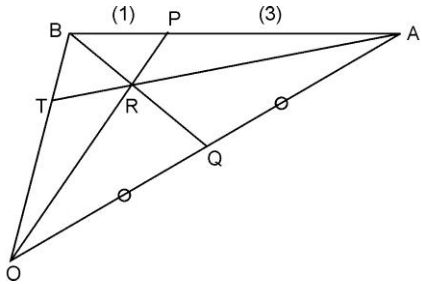
b. Tentukanlah $\overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QD}$!

c. Tentukan $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PD}$ dan $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC}$!

d. Jika garis hubung P dan Q diperpanjang sehingga memotong sisi AB di titik R, tentukanlah $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{QR}$ dan $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1)



Misalkan $\overrightarrow{OA}$ = $\underline{a}$ dan $\overrightarrow{OB}$ = $\underline{b}$.

a. Persamaan vektor dari garis OP adalah $\underline{v} = \lambda \overrightarrow{OP}$, yaitu

$$v = \frac{1}{4}\lambda\ (\underline{a} + 3\underline{b})$$

b. Persamaan vektor garis BQ adalah

$$\underline{v} = \overrightarrow{OB} + \mu\ \overrightarrow{BQ}$$

$$\underline{v} = \underline{b} + \mu\ (\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b})$$

c. Garis OP dan BQ berpotongan di titik R, maka di titik R berlaku

$$\frac{1}{4}\lambda\ (\underline{a} + 3\underline{b}\ ) = \underline{b} + \mu\ (\frac{1}{2}\underline{a} - \underline{b})$$

Dari persamaan ini diperoleh $\frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\mu$ dan $\frac{3}{4}\lambda = 1 - \mu$

Selanjutnya dari dua persamaan dalam λ dan μ diperoleh

$$\lambda = \frac{4}{5} \text{ dan } \mu = \frac{2}{5}$$

$\lambda = \dfrac{4}{5}$ berarti vektor posisi titik R terhadap O adalah

$$\underline{v} = \frac{1}{5}(\underline{a} + 3\,\underline{b})$$

d. $\lambda = \dfrac{4}{5}$ berarti pula $\overrightarrow{OR} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{OP}$ maka $\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{RP} = 4 : 1$

$\mu = \dfrac{2}{5}$ berarti $\overrightarrow{BR} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BQ}$ maka $\overrightarrow{BR} : \overrightarrow{RQ} = 2 : 3.$

e. Menurut dalil Ceva maka

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PA}} \times \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QO}} \times \frac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TB}} = -1$$

$$(-\frac{1}{3}) \times (-1) \times \frac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TB}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TB}} = -3$$

Jadi, $\overrightarrow{OT} : \overrightarrow{TB} = 3 : 1.$

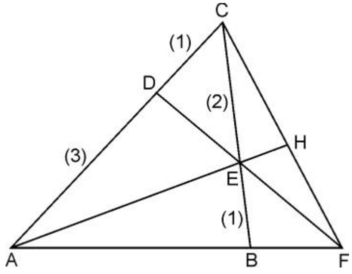
f. $$\frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{TA}} + \frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PO}} + \frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{QB}} = 1$$

$$\frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{TA}} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{TA}} = \frac{1}{5}$$

$\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RT} = 4 : 1.$

2)



a. Dengan menggunakan dalil Menelaos pada segitiga ABC dengan transversal DF, maka diperoleh $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BF} = 5 : 1$
Dengan menggunakan dalil Menelaos pada segitiga ADF dengan transversal BC, maka

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}} \times \frac{\overrightarrow{FE}}{\overrightarrow{ED}} \times \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{CA}} = -1$$

$$\frac{5}{1} \times \frac{\overrightarrow{FE}}{\overrightarrow{ED}} \times \frac{1}{-4} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{FE}}{\overrightarrow{ED}} = \frac{4}{5}$$

b. Dengan menggunakan dalil Ceva pada segitiga AFC akan diperoleh $\overrightarrow{FH} : \overrightarrow{HC} = 3 : 5$

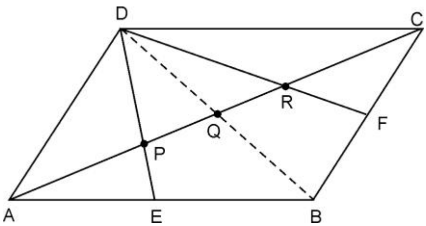
c. $$\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{BC}} + \frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{DF}} + \frac{\overrightarrow{HE}}{\overrightarrow{HA}} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{\overrightarrow{HE}}{\overrightarrow{HA}} = 1$$

$$\overrightarrow{HE} : \overrightarrow{HA} = 1 : 9$$

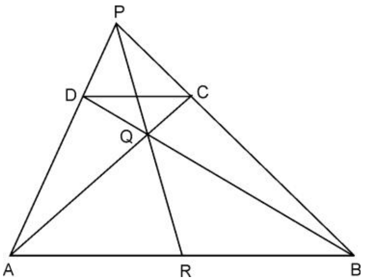
Jadi, $\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{EH} = 1 : 8$

3)



ABCD jajargenjang, maka diagonal-diagonalnya saling berpotongan di tengah-tengah. Perhatikan segitiga ABD, karena AQ dan DE masing-masing garis berat, maka $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PQ}$ = 2 : 1. Demikian pula pada segitiga BCD, diperoleh $\overrightarrow{QR} : \overrightarrow{RC}$ = 1 : 2. Selanjutnya karena AQ = QC, maka $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RC}$.

4)



ABCD suatu trapesium $\overrightarrow{AB} = 3\ \overrightarrow{DC}$

a. $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = 3 : 1$

b. $\overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QD} = 3 : 1$

c. $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PD} = 3 : -1$

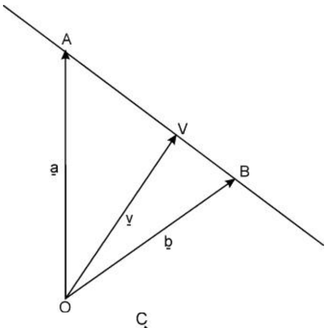
$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = 3 : -1$

d. $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{QR} = 1 : 1$

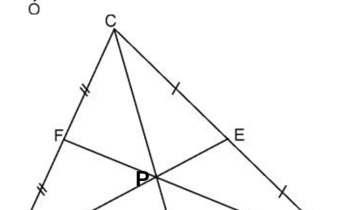
$\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = 1 : 1$

RANGKUMAN

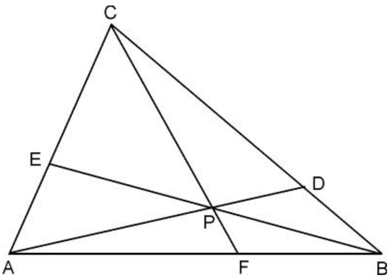
1. Persamaan vektor suatu garis lurus dimaksudkan persamaan garis lurus dalam vektor.
2. Persamaan vektor garis lurus yang melalui titik B dan sejajar dengan vektor $\underline{a}$ adalah $\underline{v} = \underline{b} + \lambda\, \underline{a}$
   $\underline{v}$ adalah vektor posisi sebarang titik pada garis
   $\underline{b}$ adalah vektor posisi titik B terhadap O (disebut vektor tumpu)
   λ adalah parameter (bilangan real) dengan $- \sim < \lambda < \sim$
   $\underline{a}$ disebut vektor arah
3. Persamaan vektor dari garis yang melalui dua titik A dan B adalah



$\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ (\underline{b} - \underline{a})$ atau
$\underline{v} = \underline{a} + \mu\ (\underline{a} - \underline{b})$, atau
$\underline{v} = \underline{b} + \alpha\ (\underline{a} - \underline{b})$, atau
$\underline{v} = \underline{b} + \beta\ (\underline{b} - \underline{a})$.



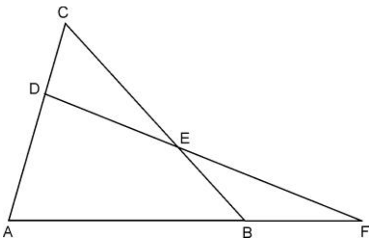
Ketiga garis berat suatu segitiga berpotongan pada satu titik dan
$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = 2 : 1$



Dalil de Ceva:
Jika P sebarang titik pada daerah segitiga ABC, maka

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \times \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \times \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1 \text{ dan}$$

$$\frac{\overrightarrow{FP}}{\overrightarrow{FC}} + \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DA}} + \frac{\overrightarrow{EP}}{\overrightarrow{EB}} = 1$$



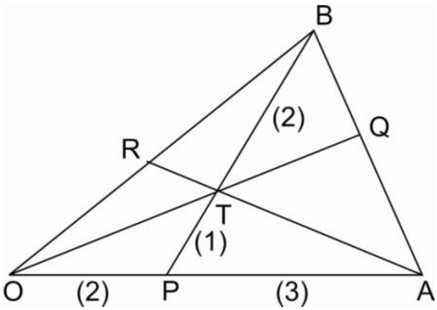
Dalil Menelaos: Jika DF suatu transversal pada segitiga ABC maka berlaku

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} \times \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EB}} \times \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FA}} = -1$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Ketentuan untuk soal nomor 1 – 10



Misalkan pada segitiga OAB, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OP} : \overrightarrow{PA} = 2 : 3$ dan $\overrightarrow{PT} : \overrightarrow{TB} = 1 : 2$

1) Persamaan vektor dari garis AB adalah ....
   A. $\underline{v} = \underline{b} + \lambda\ (5\underline{a} - \underline{b})$
   B. $\underline{v} = \underline{b} + \lambda\ \underline{a}$
   C. $\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ (\underline{b} - \underline{a})$
   D. $\underline{v} = \underline{a} + \lambda\ \underline{b}$

2) Persamaan vektor dari garis OQ adalah ....
   A. $\underline{v} = \alpha\ (\frac{2}{5}\ \underline{a} - \frac{2}{3}\underline{b})$
   B. $\underline{v} = \alpha\ (\frac{4}{15}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b})$

C. $\underline{v} = \alpha \left(\frac{13}{15}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}\right)$

D. $\underline{v} = \alpha \left(\frac{13}{15}\underline{a} - \frac{1}{3}\underline{b}\right)$

3) $\overrightarrow{OQ}$ = ...

A. $\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$

B. $\frac{2}{9}\underline{a} + \frac{7}{9}\underline{b}$

C. $\frac{3}{8}\underline{b} + \frac{2}{8}\underline{b}$

D. $\frac{4}{9}\underline{a} + \frac{5}{9}\underline{b}$

4) $\overrightarrow{OT} : \overrightarrow{TQ}$ = ...

A. 3 : 2
B. 4 : 3
C. 5 : 4
D. 6 : 5

5) $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QB}$ = ...

A. 6 : 5
B. 5 : 4
C. 4 : 3
D. 3 : 2

6) Persamaan vektor dari garis AR adalah ....

A. $\underline{v} = \underline{a} + \beta \left(\frac{4}{15}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}\right)$

B. $\underline{v} = \underline{a} + \beta \left(\frac{4}{9}\underline{a} + \frac{5}{9}\underline{b}\right)$

C. $\underline{v} = \underline{a} + \beta \left(-\frac{11}{15}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}\right)$

D. $\underline{v} = \underline{a} + \beta \left(\frac{4}{15}\underline{a} - \frac{1}{3}\underline{b}\right)$

7) Persamaan vektor dari garis OB adalah ....
A. $\underline{v} = \mu \; \underline{b}$
B. $\underline{v} = \mu \; \underline{a}$
C. $\underline{v} = \mu \; (\underline{b} - \underline{a})$
D. $\underline{v} = \mu \; (\underline{a} - \underline{b})$

8) $\overrightarrow{OR} : \overrightarrow{RB} =$ ....
A. 2 : 3
B. 3 : 4
C. 4 : 5
D. 5 : 6

9) $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TR} =$ ....
A. 2 : 9
B. 3 : 10
C. 4 : 11
D. 5 : 12

10) Persamaan vektor dari garis BP, *kecuali* ....
A. $\underline{v} = \underline{b} + \alpha \left(\frac{2}{5}\underline{a} - \underline{b}\right)$
B. $\underline{v} = \frac{2}{5}\underline{a} + \beta \left(\frac{2}{15}\underline{a} - \frac{1}{3}\underline{b}\right)$
C. $\underline{v} = \frac{4}{15}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} + \lambda \left(\frac{4}{15}\underline{a} - \frac{2}{3}\underline{b}\right)$
D. $\underline{v} = \underline{a} + \mu \left(\underline{b} - \frac{2}{5}\underline{a}\right)$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Banyaknya Jawaban yang Benar}}{\text{Banyaknya Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D. Volume adalah contoh suatu skalar.
2) C. Medan listrik merupakan contoh suatu vektor.
3) C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$
4) A. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HF}$
5) D. $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=(\overrightarrow{HG}+GB)+(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE})$

$$=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BF}$$
$$=\overrightarrow{HF}$$

6) C. $\underline{u}$ - 2$\underline{v}$ = 3$\underline{a}$ - 2$\underline{b}$ + $\underline{c}$ - 2 ($\underline{a}$ + $\underline{b}$ - 3$\underline{c}$) = $\underline{a}$ - 4$\underline{b}$ - 7$\underline{c}$
7) D. Jumlah koefisien-koefisien dari $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ harus nol.
8) C. Definisi dua vektor sama.
9) A. Jika kesamaan tersebut disamadengankan nol, maka jumlah koefisien-koefisien dari $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan $\underline{c}$ sama dengan nol, sehingga $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ sebidang datar.
10) B. $\overrightarrow{BD}$ = $\underline{b}$ - $\underline{a}$ sehingga dengan rumus perbandingan diperoleh

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{a} + \underline{c})$$

Tes Formatif 2

1) C. $\underline{b}$ - $\underline{a}$ atau $\underline{a}$ - $\underline{b}$ masing-masing dapat sebagai vektor arah dan $\underline{a}$ atau $\underline{b}$ masing-masing dapat sebagai vektor tumpu.
2) B. $\underline{v} = \alpha\ \overrightarrow{OT}$ dan $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\ \overrightarrow{OT}$
3) D. Perpotongan garis-garis AB dan OQ memperoleh $\lambda = \frac{5}{9}$ dan

$\alpha = \frac{5}{3}$, sehingga $\overrightarrow{OT} = \frac{3}{5}\ \overrightarrow{OT}$

4) A. Oleh karena $\alpha = \frac{5}{3}$
5) B. Oleh karena $\lambda = \frac{5}{9}$
6) C. Vektor $\underline{a}$ sebagai vektor tumpu dan $\overrightarrow{AT}$ atau $\overrightarrow{TA}$ dapat diambil sebagai vektor arah.

7) A. Oleh karena melalui titik awal O dan dengan vektor arah b.
8) D. Gunakan dalil de Ceva.
9) C. Gunakan rumus: $\frac{\overrightarrow{PT}}{\overrightarrow{PB}} + \frac{\overrightarrow{QT}}{\overrightarrow{QO}} + \frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{RA}} = 1$
10) D. Vektor a bukan merupakan vektor tumpu garis BP.

Glosarium

Kombinasi linear : Vektor r merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor a dan b artinya ada bilangan-bilangan real m dan n sedemikian hingga r = ma + na.

Persamaan vektor: Persamaan yang pengganti untuk variabelnya adalah vektor.

Resultan : Jumlahan dari vektor-vektor.

Vektor arah : Vektor yang merupakan arah dari suatu garis.

Daftar Pustaka

Kaplan, W. (1972). *Advanced Calculus Second Edition*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Kreyszig, E. (1979). *Advanced Mathematics Fourth Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Moeharti Hadiwidjojo. (1989). *Vektor dan Transformasi Geometri,* Yogyakarta: FPMIPA IKIP.

Purcell, Edwin J. and Varberg, Dale (1984). *Calculus with Analytic Geometry Fourth Edition*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Spiegel, M.R. (1974). *Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis.* S1 (Metric) Edition. New York: McGraw-Hill International Book Company.