

# Objek Pembelajaran Matematika Sekolah

Drs. Soemoenar  
Dr. Drs. Anton Noornia, M.Pd.



## PENDAHULUAN

---

Modul ini menyajikan kajian tentang Objek Pembelajaran Matematika Sekolah. Didahului dengan penjelasan tentang ilmu matematika yang memiliki sistem dan struktur deduktif aksiomatik yang terdiri dari himpunan pengertian dan himpunan pernyataan. Matematika Sekolah terdiri atas bagian-bagian matematika yang dipilih guna menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan dan membentuk pribadi siswa yang mampu bersaing di era perkembangan IPTEK.

Kajian Objek Pembelajaran Matematika Sekolah meliputi empat cakupan sebagai berikut.

1. Fakta.
2. Konsep.
3. Prinsip.
4. Keterampilan.

Kajian Fakta, memberikan kemampuan membedakan antara kebenaran sebagai semufakatan dan kebenaran yang didapat secara konsistensi.

Kajian Konsep, memberikan kemampuan contoh beberapa macam definisi.

Kajian Prinsip, memberikan kemampuan contoh prinsip dan menentukan kapan suatu prinsip diajarkan sebagai prinsip dan kapan diajarkan sebagai fakta.

Kajian Penalaran, memberikan kemampuan menyebutkan ciri-ciri penalaran deduksi, ciri-ciri penalaran induksi, dan ciri-ciri penalaran ilmiah.

Kajian Pemecahan Masalah, memberikan kemampuan menyebutkan empat langkah pemecahan masalah dan beberapa strategi pemecahan masalah.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. membedakan antara matematika sebagai ilmu matematika dan matematika sebagai matematika sekolah;
2. menyebutkan objek pembelajaran matematika sekolah;
3. memberikan contoh fakta yang berbentuk lambang;
4. memberikan contoh dalil yang diajarkan sebagai fakta;
5. memberikan contoh konsep untuk setiap macam definisi;
6. memberikan contoh prinsip yang dibuktikan;
7. membedakan antara penalaran deduksi dan penalaran induksi;
8. menyebutkan empat langkah pemecahan masalah;
9. menyebutkan beberapa strategi pemecahan masalah.

### **Susunan Kegiatan Belajar**

- **Kegiatan Belajar 1: Matematika Sekolah**  
Kegiatan belajar ini, merupakan uraian tentang matematika sekolah. Meliputi objek langsung pembelajaran matematika sekolah dan objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah. Disinggung juga ilmu matematika yang deduktif aksiomatis.
- **Kegiatan Belajar 2: Kemahiran Matematika**  
Kemahiran matematika di antaranya adalah penalaran, komunikasi (penyebaran), dan pemecahan masalah. Penalaran yang dibicarakan adalah penalaran deduksi, penalaran induksi, dan penalaran ilmiah. Penyebaran matematika memberikan gambaran tentang tumbuh dan kembangnya matematika sejak mula pertumbuhannya hingga sekarang. Pemecahan masalah meliputi langkah-langkah pemecahan masalah dan strategi pemecahan masalah.

Untuk mempelajari modul ini, sebaiknya dilakukan dalam kegiatan belajar kelompok. Kelompok belajar yang dibentuk sebaiknya beranggotakan tidak terlalu banyak. Tiga atau empat orang anggota sudah cukup. Salah seorang diangkat sebagai ketua kelompok yang berkewajiban menjaga keharmonisan kelompok dalam belajar bersama, dan membuat rencana

belajar bersama. Hal-hal yang kurang dipahami dicatat untuk diajukan sebagai pertanyaan pada waktu tutorial berlangsung. Soal latihan didiskusikan jawabnya, sebelum mencocokkan kepada kunci jawaban.

**Selamat belajar. Semoga Anda berhasil!**

**KEGIATAN BELAJAR 1****Matematika Sekolah**

Banyak guru matematika kurang memahami beda antara matematika sebagai ilmu pengetahuan matematika, yang untuk selanjutnya disebut saja ilmu matematika, dan matematika sebagai materi pengajaran matematika sekolah, yang untuk selanjutnya disebut matematika sekolah.

Bagi seorang guru matematika memiliki pemahaman tentang beda antara matematika sebagai ilmu matematika dan matematika sebagai matematika sekolah adalah merupakan suatu keharusan. Hanya dengan memiliki pemahaman beda matematika sebagai ilmu matematika dan matematika sebagai matematika sekolah yang benar maka guru akan mampu menanamkan nilai-nilai pembentukan kemampuan menalar secara matematika, dan nilai-nilai pembentukan pribadi yang didapat dari belajar matematika sekolah kepada anak didiknya. Dengan kata lain, guru menyadari akan objek langsung maupun objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah. Setelah belajar Kegiatan Belajar 1 ini, diharapkan Anda dapat:

1. menyebutkan sistem dan struktur matematika sebagai ilmu;
2. menyebutkan ciri matematika sekolah;
3. menyebutkan objek langsung pembelajaran matematika sekolah;
4. menyebutkan objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah;
5. memberikan contoh belajar konsep;
6. memberikan contoh belajar prinsip yang diajarkan sebagai konsep;
7. memberikan contoh definisi demonstrasi;
8. memberikan contoh latihan keterampilan pemahaman konsep;
9. memberikan contoh latihan pemahaman prinsip;
10. menyebutkan kegunaan aksioma;
11. memberikan contoh konsep dalam bentuk lambang.

**A. HAKIKAT MATEMATIKA**

Di abad dua puluh satu ini, hanya bangsa yang menguasai teknologi akan menjadi bangsa yang dipandang di dunia. Atas kesadaran akan hal ini maka bangsa-bangsa di dunia berlomba-lomba untuk menguasai teknologi. Apa

sebenarnya yang dimaksud dengan teknologi itu? Di buku *The New Book Of Knowledge* ditulis:

*“Technology is the human activity that changes the material world around us to satisfy needs.”*

Alam menyediakan air terjun. Air terjun dan teknologi bersama-sama menciptakan pembangkit listrik yang menambah kenikmatan dan kepuasan hidup kita. Alam menyediakan pasir kwart. Pasir kwart dan teknologi bersama-sama menciptakan ic dan cip, yang merupakan komponen yang sangat penting untuk alat-alat elektronika. Kemampuan menciptakan teknologi dan menerapkannya inilah yang membedakan antara manusia dengan hewan. Hewan tidak mampu menciptakan teknologi.

Lalu ilmu-ilmu apakah yang mendukung terciptanya teknologi itu? Dari definisi teknologi di atas, tersirat bahwa ilmu-ilmu dasarlah yang mendukung dan mendorong berkembangnya teknologi, yaitu ilmu fisika, biologi, kimia, dan matematika. Matematika sengaja disebut terakhir karena matematika memiliki sifat dan kedudukan yang sangat khas terhadap ilmu-ilmu dasar yang lain. Ada yang mengatakan bahwa “Matematika adalah ratu dan pelayan sains”. Matematika sebagai ratu, memelihara dan mengayomi tumbuh dan berkembangnya ilmu-ilmu dasar itu. Sementara itu, matematika sebagai pelayan, menyediakan diri sebagai alat yang diperlukan untuk tumbuh dan berkembangnya ilmu-ilmu dasar tersebut. Bahkan, boleh dikatakan bahwa ilmu-ilmu dasar tersebut, tidak akan mampu tumbuh dan berkembang tanpa bantuan matematika. Sementara itu, matematika tumbuh dan berkembang secara mandiri. Kadangkala tumbuh begitu liar dan tidak menunjukkan manfaatnya pada saat tumbuhnya. Barulah dikemudian hari orang merasakan manfaatnya. Inilah sifat khas matematika.

Dewasa ini, berkembangnya pemahaman bahwa matematika pada dasarnya berkembang dari budaya-budaya atau aktivitas-aktivitas keseharian manusia yang kemudian diabstraksi menjadi pengetahuan atau ilmu matematika. Matematika tidak boleh dipelajari sebagai sebuah sistem yang tertutup, melainkan sebagai suatu kegiatan mematematisasi realitas dan jika mungkin yang dari mematematisasi matematika.

## B. ILMU MATEMATIKA

Apakah matematika itu? Karena sifat khas matematika tersebut, yang mandiri dan mampu berkembang tanpa bantuan ilmu-ilmu lain sehingga menjadi besar dan luas daerah cakupannya maka sampai saat ini tidak pernah ada jawaban yang pasti atas pertanyaan, "Apakah matematika itu?". Ada beberapa pernyataan yang mencoba menjawab pertanyaan tersebut, di antaranya:

1. Mathematics is the study of numbers, shape, and symbols. It also includes the rules for dealing with these things.
2. The logical study of shape, arrangement, quantity, and many related concepts.
3. Mathematics as a human activity.

Berdasarkan tiga pernyataan tersebut, terlihat bahwa cakupan matematika tidak hanya meliputi bilangan, bangun, simbol, aturan-aturan yang berhubungan dengannya, juga meneliti bangun, susunan, kuantitas, dan pengertian-pengertian yang terkait. Selain hal itu, matematika juga terkait dengan konteks kehidupan keseharian kita. Atas dasar tiga pernyataan ini, dicoba untuk mengkaji, apa itu matematika?

Seperti halnya ilmu-ilmu yang lain, matematika memiliki objek, metode, sistem, dan berlaku umum.

### 1. Objek

Objek matematika pada tingkat awal pertumbuhannya adalah benda-benda nyata yang dijumpai di kehidupan sehari-hari yang berada di sekitar kita. Misalnya, pematang sawah, patok sebidang tanah, petak persawahan, pagar pembatas kepemilikan tanah, dan sebagainya. Setelah matematika berkembang menjadi ilmu yang deduktif aksiomatis, benda-benda nyata tersebut, melalui abstraksi dan idealisasi, dijadikan benda pikiran yang abstrak. Melalui abstraksi dan idealisasi sebuah pematang sawah menjadi sebuah garis lurus yang memiliki panjang, tetapi tidak memiliki tebal. Garis lurus dapat diperpanjang di kedua ujungnya secara tak terbatas. Garis lurus seperti ini, hanya ada di dalam pikiran. Tidak ada benda nyata yang dapat dijadikan padanannya. Bekas patok berdiri, melalui abstraksi dan idealisasi dijadikan benda pikiran yang disebut titik. Titik tidak memiliki panjang dan lebar. Titik hanya menentukan letak.

## 2. Metode

Di dalam menyusun teorema dan mendapatkan kebenaran-kebenaran baru, penalaran yang digunakan hanya penalaran deduksi. Suatu definisi dirumuskan berdasarkan pengertian pangkal, yaitu pengertian yang tidak didefinisikan karena kebenarannya sudah jelas, atau berdasarkan definisi sebelumnya.

Berdasarkan aksioma atau dalil-dalil sebelumnya, dengan penalaran deduksi diciptakan dalil-dalil baru.

## 3. Sistem

Sistem matematika berupa suatu himpunan  $H$  yang memiliki dua himpunan bagian, yaitu himpunan pengertian dan himpunan pernyataan yang memuat hal-hal yang berhubungan dengan anggota himpunan  $H$ . Anggota himpunan pengertian dan himpunan pernyataan tersebut, harus memenuhi syarat sebagai berikut.

- a. Semua pengertian dan pernyataan harus mengenai suatu daerah cakupan yang jelas.
- b. Semua pengertian dan semua pernyataan harus benar.
- c. Jika dari beberapa pengertian dan pernyataan anggota himpunan  $H$  ditarik kesimpulan secara logis dengan penalaran deduksi maka setiap kesimpulan tersebut adalah juga anggota himpunan  $H$ .
- d. Di dalam himpunan pengertian ada sekelompok pengertian yang artinya tidak memerlukan penjelasan lagi, yang disebut pengertian pangkal. Pengertian lainnya didefinisikan berdasarkan pengertian pangkal atau definisi sebelumnya. Pengertian yang didefinisikan disebut pengertian bukan pangkal.
- e. Di dalam himpunan pernyataan terdapat sekelompok pernyataan yang kebenarannya sudah jelas. Tidak perlu dibuktikan lagi. Pernyataan ini, disebut pernyataan pangkal. Pernyataan pangkal dikenal juga sebagai aksioma atau postulat. Pernyataan lain yang didapat melalui penalaran deduksi dari suatu pernyataan pangkal atau pernyataan lain sebelumnya disebut dalil. Setiap dalil harus dibuktikan kebenarannya dengan penalaran deduksi.
- f. Berlaku umum. Kebenaran yang disajikan oleh matematika berlaku umum, tidak terbatas oleh ruang dan waktu.

#### 4. Himpunan Pengertian

Anggota himpunan pengertian adalah pengertian yang merupakan jawab atas pertanyaan, “Apakah itu?”. Ada kalanya jawab yang diberikan atas pertanyaan tersebut kurang jelas sehingga menimbulkan pertanyaan lebih lanjut. Bahkan, dapat menimbulkan rangkaian pertanyaan dan rangkaian jawab yang berputar, yang disebut dengan *circulus in definiendo* atau rangkaian jawab yang mundur tidak berkesudahan yang disebut *regresus in infinitum*.

##### Contoh 1.1

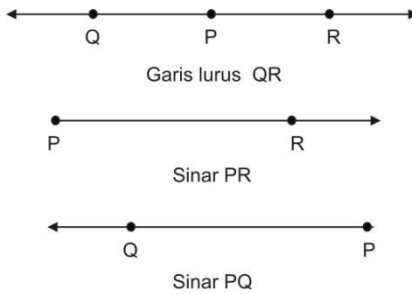
- “Apakah himpunan itu?”  
Himpunan adalah kelompok.
- “Apakah kelompok itu?”  
Kelompok adalah gugus.
- “Apakah gugus itu?”  
Gugus adalah gerombolan.
- “Apakah gerombolan itu?”  
Gerombolan adalah himpunan.

Ternyata jawab akhir adalah hal yang ditanyakan pertama kali. Di sini terjadilah *circulus in definiendo*. Tetapi, jika selalu tersedia jawab, atas pertanyaan yang diajukan maka akan terjadilah *regresus in infinitum*, mundur tidak berkesudahan. Untuk menghindari dua hal tersebut maka perlu ditetapkan himpunan sebagai pengertian pangkal, yaitu pengertian yang merupakan unsur tidak didefinisikan.

Di geometri datar Euclides dikenal tiga pengertian pangkal, yaitu titik, garis, dan himpunan. Sinar didefinisikan berdasarkan pengertian pangkal tersebut, sebagai berikut.

Sinar adalah himpunan bagian dari garis yang beranggotakan sebuah titik tetap dari garis dan semua titik yang terletak sepihak dari garis.

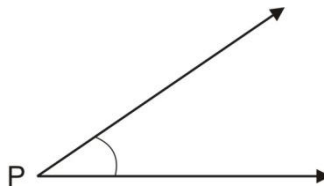




Gambar 1.1

Sudut didefinisikan berdasarkan definisi sinar sebagai berikut.

Sudut adalah gabungan dua buah sinar yang memiliki titik pangkal yang sama. Gambar 1.2 adalah ilustrasi sebuah sudut.



Gambar 1.2

## 5. Himpunan Pernyataan

Anggota himpunan pernyataan adalah pernyataan yang merupakan jawab dari pertanyaan:

- “Bagaimanakah itu?”
- “Bagaimanakah jumlah ukuran sudut sebuah segitiga?”
- Jumlah ukuran sudut sebuah segitiga sama dengan  $180^\circ$ .
- “Bagaimanakah sudut alas sebuah segitiga sama kaki?”
- Sudut alas sebuah segitiga sama kaki kongruen.
- “Bagaimanakah sisi berhadapan sebuah jajar genjang?”
- Sisi berhadapan sebuah jajar genjang adalah kongruen.

Jawab setiap pertanyaan tersebut disebut pernyataan yang dikenal sebagai *dalil*. Seperti juga pada himpunan pengertian yang mengenal pengertian pangkal dan pengertian bukan pangkal. Demikian pula himpunan pernyataan, juga memuat pernyataan pangkal yang disebut *aksioma*, dan pernyataan bukan pangkal yang disebut *dalil*.

Aksioma atau sering juga disebut postulat adalah pernyataan yang kebenarannya tidak diragukan lagi sehingga tidak memerlukan bukti. Misalnya, *melalui dua buah titik dapat dibuat satu dan hanya satu garis lurus*.

Aksioma tersebut menyatakan bahwa jika terdapat dua buah titik, pasti dapat dibuat tepat sebuah garis lurus melalui dua titik tersebut. Tidak lebih dari satu. Kebenaran aksioma ini sudah jelas tidak perlu pembuktian lagi.

Dalil harus dibuktikan. Bukti sebuah dalil harus menggunakan penalaran deduksi yang menuju kepada kebenaran konsistensi, yaitu kebenaran yang didasarkan kepada rangkaian kebenaran terdahulu yang sudah diterima. Misalnya, akan dibuktikan dalil: **Jika dua sudut adalah sudut siku-siku maka dua sudut tersebut kongruen.**

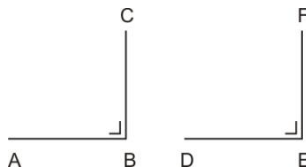
Pembuktian dalil ini digunakan penalaran deduksi berdasarkan kebenaran pengertian dan kebenaran pernyataan sebagai berikut.

- Definisi: Sudut siku-siku adalah sudut yang ukurannya  $90^\circ$ .
- Aksioma transitif: Jika  $a = b$  dan  $b = c$  maka  $a = c$
- Definisi: Dua sudut yang kongruen adalah dua sudut yang sama ukurannya.

### *Pembuktian*

Diketahui:

$\angle ABC$  adalah sudut siku-siku.  $\angle DEF$  adalah sudut siku-siku.



Gambar 1.3

Buktikan:

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

Bukti:

Pernyataan	Alasan
1. $\angle ABC$ siku-siku	1. Diketahui
2. $m\angle ABC = 90^\circ$	2. Definisi sudut siku-siku
3. $\angle DEF$ siku-siku	3. Diketahui
4. $m\angle DEF = 90^\circ$	4. Definisi sudut siku-siku
5. $m\angle ABC = m\angle DEF$	5. Aksioma transitif
6. $\angle ABC \cong \angle DEF$	6. Lawan definisi dua sudut yang kongruen

Penjelasan:

Pembuktian selalu dimulai dari yang diketahui. Setiap langkah yang dibuat merupakan kesimpulan dari langkah sebelumnya disertai dengan alasan penarikan kesimpulan tersebut. Langkah nomor 2 disimpulkan dari nomor 1 dengan menggunakan alasan definisi sudut siku-siku. Demikian juga langkah nomor 4 disimpulkan dari nomor 3 dengan alasan yang sama. Langkah nomor 5 merupakan kesimpulan dari nomor 2 dan nomor 4 berdasarkan aksioma transitif. Kesimpulan akhir nomor 6 ditarik dari kesimpulan nomor 5 berdasarkan lawan definisi dua sudut yang kongruen. Kebenaran kesimpulan nomor 6 merupakan kebenaran konsistensi.

Aksioma sebagai pernyataan pangkal berguna untuk mencegah pembuktian yang berputar-putar, yang disebut *circulus in probando*, atau pembuktian yang mundur tidak berkesudahan, yang disebut *regresus in infinitum*.

### C. MATEMATIKA SEKOLAH

Matematika sekolah adalah matematika yang diajarkan di Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah. Bahan ajar matematika sekolah terdiri atas bagian-bagian matematika yang dipilih, guna menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan dan membentuk pribadi siswa yang mampu bersaing di era perkembangan IPTEK. Dalam hal ini, jelaslah bahwa

matematika sekolah sangatlah berbeda dengan ilmu matematika. Ilmu matematika merupakan kesatuan yang utuh, yang terjaga oleh sistem aksiomatiknya sehingga penalaran yang digunakan hanya penalaran deduksi. Sementara itu, matematika sekolah terdiri atas bagian-bagian matematika yang terpilih guna menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan dan membentuk pribadi siswa. Bahan ajar geometri datar di matematika sekolah adalah bagian-bagian terpilih dari geometri Euclides, dilepaskan dari sistem aksiomatiknya. Meskipun bahan ajar matematika sekolah juga abstrak, tetapi penalaran yang dikembangkan oleh matematika sekolah tidak hanya penalaran deduksi saja. Penalaran induksi juga mendapat perhatian pengembangannya sehingga intuisi siswa, dan pengalaman siswa ikut berperan di dalam belajar matematika sekolah.

Ada dua objek pembelajaran matematika sekolah, yaitu objek langsung pembelajaran matematika sekolah dan objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah. Objek langsung pembelajaran matematika sekolah adalah Fakta, Konsep, Prinsip, dan Keterampilan. Objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah di antaranya adalah, disiplin diri, kemahiran matematika, apresiasi terhadap matematika, dan berpikir secara matematika, yaitu logis, rasional, dan eksak.

### 1. Fakta

Fakta adalah semufakatan-semufakatan yang ada di dalam matematika sekolah. Fakta banyak dijumpai pada lambang matematika, juga pada pengerjaan hitungan.

#### *Contoh 1.2*

Lambang “5” telah disepakati sebagai lambang bilangan lima maka “5” adalah fakta.

- Jika ditulis 25, disepakati memiliki arti sebagai  $20 + 5$ .
- Jika ditulis  $2\frac{1}{2}$ , disepakati memiliki arti  $2 + \frac{1}{2}$  bukan  $20 + \frac{1}{2}$ .

Jika ditulis  $2\sqrt{2}$ , disepakati memiliki arti  $2 \times \sqrt{2}$ , bukan  $20 + \sqrt{2}$  atau  $2 + \sqrt{2}$ .

Jika ditulis  $2x$ , disepakati memiliki arti 2 kali  $x$ .

- Di dalam pengerjaan hitungan yang sederhana, disepakati urutan pengerjaan hitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 10 - 2 \times 3 + 4 &= 10 - (2 \times 3) + 4 \\
 &= 10 - 6 + 4 \\
 &= 4 + 4 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Semufakatan-semufakatan di atas adalah fakta. Karena fakta adalah suatu semufakatan maka nilai benar yang terkandung tidak perlu diperdebatkan.

## 2. Konsep

Konsep adalah pengertian. Ada pengertian pangkal yang tidak didefinisikan dan ada pengertian bukan pangkal yang didefinisikan.

Setiap definisi memiliki daerah cakupan yang disebut ekstensi, dan isi yang disebut intensi. Makin luas ekstensinya akan makin sedikit intensinya. Sebaliknya, jika makin banyak intensinya maka akan makin sempit ekstensinya. Contoh:

Daerah cakupan segiempat adalah, segiempat, trapesium, jajar genjang, persegi panjang, dan persegi.

- a. Definisi: Trapesium adalah segiempat yang **sepasang sisinya sejajar**.  
Ekstensi: trapesium, jajar genjang, persegi panjang, dan persegi.
- b. Definisi: Jajar genjang adalah segiempat yang **sisi-sisi berhadapannya sejajar**.  
Ekstensi: jajar genjang, persegi panjang, dan persegi.
- c. Definisi: Persegi panjang adalah **jajar genjang yang memiliki sebuah sudut siku-siku**.  
Ekstensi: persegi panjang dan persegi.
- d. Definisi: Persegi adalah **persegi panjang yang semua sisinya kongruen**.  
Ekstensi: persegi.

Berdasarkan contoh di atas, jelas terlihat makin banyak intensinya maka makin sempit ekstensinya. Juga dapat terlihat bahwa persegi itu boleh disebut sebagai persegi panjang, sebagai jajar genjang, sebagai trapesium, juga boleh disebut sebagai segiempat. Demikian juga jajar genjang boleh disebut sebagai trapesium atau segiempat.

### 3. Macam-Macam Definisi

Definisi atau pengertian menjawab pertanyaan apakah itu. Cara menjawab pertanyaan ini, dapat dilakukan dengan berbagai macam cara, di antaranya adalah:

#### a. Definisi Demonstrasi

Yaitu suatu cara mendefinisikan suatu pengertian dengan menunjukkan benda aslinya atau benda peraganya.

#### Contoh 1.3

Mendefinisikan segitiga dengan cara menunjukkan peraga segitiga yang terbuat dari kawat.

Mendefinisikan kalimat terbuka dengan cara menuliskan beberapa kalimat terbuka di papan tulis.

#### b. Definisi Genitis

Yaitu definisi yang menyebutkan *genus proximum* (keluarga/kelompok terdekat) dan *deferensia specifica* (perbedaan khas yang terdapat).

#### Contoh 1.4

Himpunan kosong didefinisikan sebagai berikut. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Dalam hal ini, **himpunan** sebagai *genus proximum*, dan **yang tidak memiliki anggota** sebagai *deferensia specifica*.

#### c. Definisi Analitis

Yaitu definisi yang menguraikan terjadinya pengertian yang dimaksud.

#### Contoh 1.5

Segitiga Pascal didefinisikan sebagai berikut. Jika koefisien suku dua yang dipangkatkan disusun dari atas ke bawah maka didapat bangun yang mirip dengan segitiga yang dinamai *segitiga Pascal*.

#### d. Definisi Rumus

Yaitu definisi yang disajikan dalam bentuk rumus. Rumus yang digunakan untuk mendefinisikan disebut rumus definisi.

*Contoh 1.6*

Definisi tentang logaritma  ${}^p \log q$  didefinisikan dengan rumus  $p^{p \log q} = q$ .

e. *Definisi Dengan Induksi Matematika*

Yaitu definisi yang disajikan dalam bentuk induksi matematika.

*Contoh 1.7*

Definisi faktorial (!). Faktorial didefinisikan dengan sepasang persamaan:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

$n \in A$ , dengan  $A$  adalah himpunan bilangan asli.

Jadi,

$$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

.....

.....

.....

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

**4. Prinsip**

Prinsip adalah pernyataan yang biasa dikenal sebagai aksioma atau dalil.

*Contoh 1.8*

- a. Jumlah ukuran sudut sebuah segitiga sama dengan  $180^\circ$ .
- b. Jika  $a = b$  dan  $b = c$  maka  $a = c$ .
- c. Kuadrat sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya.

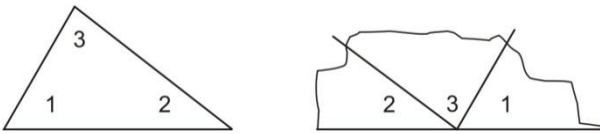
Aksioma dan dalil merupakan komponen sangat penting pada penalaran deduksi. Demikian juga pada penarikan kesimpulan yang berupa kebenaran konsistensi pada ilmu matematika yang utuh sistem dan struktur

aksiomatiknya. Karena matematika sekolah terdiri atas bagian-bagian matematika yang dipilih guna menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan dan membentuk pribadi siswa yang mampu bersaing di era perkembangan IPTEK maka bahan ajar matematika menjadi tidak utuh sistem dan strukturnya sehingga ada kalanya suatu dalil tidak diajarkan sebagai prinsip, tetapi diajarkan sebagai fakta, yang hanya merupakan kesepakatan yang harus diterima.

### Contoh 1.9

Dalil: Jumlah ukuran sudut sebuah segitiga sama dengan  $180^\circ$ .

Dalil ini diajarkan kepada siswa SD sebagai fakta, bukan sebagai dalil. Dengan demikian dalil ini tidak dibuktikan. Cukup hanya ditunjukkan kebenarannya dengan cara, dibuatlah segitiga dari kertas. Kemudian dipotong-potong bagian sudutnya. Kaki-kaki sudut dihimpitkan, sehingga terlihat bahwa jumlah ukuran sudut segitiga tersebut sama dengan ukuran sudut lurus.



Gambar 1.4

## 5. Keterampilan

Dalam hal ini, keterampilan yang dimaksud adalah keterampilan matematika, yaitu keterampilan menuliskan lambang matematika, mengaplikasikan fakta, konsep dan prinsip matematika dengan benar. Juga keterampilan berpikir secara matematika. Dengan demikian, keterampilan matematika erat hubungannya dengan kesungguhan, dan ketekunan di dalam mengerjakan latihan-latihan soal yang didahului dengan penguasaan dan pemahaman akan fakta, konsep, dan prinsip matematika.

Karena bahan ajar matematika sekolah adalah bagian-bagian matematika yang terpilih, dengan demikian lepas dari sistem dan struktur aksiomatiknya maka penalaran yang digunakan tidak lagi terbatas kepada penalaran deduksi saja. Penalaran ilmiah yang merupakan rangkaian penalaran induksi dan deduksi yang dibantu dengan intuisi siswa dipelajari juga di matematika



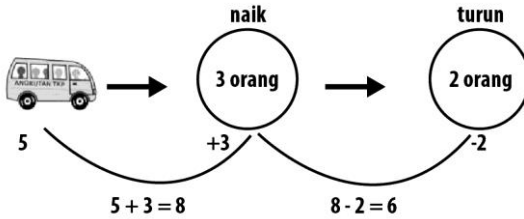
sekolah. Banyak dalil matematika yang didapat sebagai hasil eksperimen, yang kemudian dijadikan sebagai fakta.

Berkenaan dengan kegiatan proses memperoleh pengetahuan matematika, dewasa ini berkembang pendapat bahwa untuk mendapatkan pengetahuan matematika berupa fakta, konsep, prinsip, dan bahkan keterampilan, bisa diperoleh melalui pemahaman terhadap konteks keseharian kita. Hans Freudenthal (1905 – 1990) seorang matematisi kelahiran Jerman yang kemudian menetap di Belanda, yang memberi pemahaman baru tersebut. Hans Freudenthal berpendapat bahwa “*Mathematics as a human activity*”, berdasarkan pendapatnya tersebut, matematika tidak boleh dipelajari sebagai sebuah sistem yang tertutup, melainkan sebagai suatu kegiatan mematematisasi realitas dan jika mungkin yang dari mematematisasi matematika. Hal itu didasari dari pengamatannya pada seseorang yang sedang dalam proses belajar matematika bahwa mereka dapat menggambarkan konsep, struktur, dan idea matematika dikaitkan dengan fenomena sekitar yang diciptakannya. Inilah kemudian yang menjadi dasar Freudenthal mengembangkan apa yang disebut teori *Realistic Mathematics Education* (RME).

Fenomena atau konteks keseharian dapat dijadikan dasar seseorang dengan bantuan guru menemukan kembali (*re-invention*) konsep matematika ketika mempelajari matematika. Jadi, dalam hal ini ilmu atau pengetahuan matematika (objek matematika) bukanlah suatu yang “*ready-made*”, tetapi sesuatu yang harus ditemukan kembali untuk dapat memperolehnya.

### *Contoh 1.10*

- a. Memberikan pemahaman operasi penjumlahan dan pengurangan awal di sekolah dasar dapat diawali dengan konteks keseharian, seperti naik dan turun dari angkutan kota (angkot) di setiap pemberhentian, yang siswa alami, dimana dalam konteks tersebut terdapat konsep matematika mengenai penjumlahan dan pengurangan.



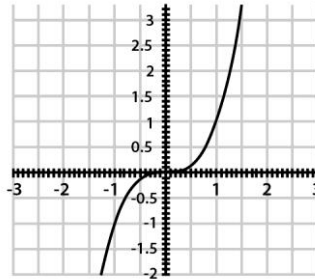
- b. Di tingkat sekolah menengah atas, menempel *wall paper* dapat digunakan untuk memberi pemahaman siswa ketika mereka belajar integral tertentu.

Contoh: Tentukan luas daerah yang dibatasi sumbu- $x$ , dan  $y = x^2$  dengan batas bawah  $a = -2$  dan  $b = 8$

Penyelesaian soal ini, apabila siswa tidak mengawali belajarnya melalui pemahaman pemasangan *wall paper* akan terjadi kekeliruan karena siswa hanya bekerja cenderung mekanistik untuk menyelesaikan nilai dari

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x^3 &= \left(\frac{1}{4}2^4\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4\right) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Hasil ini tentulah keliru! Sebaliknya tanpa penjelasan panjang lebar siswa yang memperoleh konsepnya menggunakan konteks *wall paper*, akan segera memahami bahwa jika langsung menghitung dengan mengintegrasikan dalam interval dari  $a$  hingga  $b$ , mereka akan menemukan bahwa jawaban tidak bersesuaian dengan *wall paper* yang dibutuhkan untuk menutup luas daerah. Siswa yang telah memahami konteks setelah mensketsakan gambar, mereka akan menghitung daerah merupakan harga positif, karena luas daerah tidak mungkin negatif, hal ini sangat dipahami peserta didik dengan konteks *wall paper* harus dibeli, untuk menutup daerah tersebut.



$$\int_{-2}^0 x^3 = \left(\frac{1}{4}0^4\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4\right) = -4 \tag{1}$$

Tahap ini akan menyadari bahwa luasan *wall paper* tidak mungkin negatif sehingga mereka melihat bahwa itu tetap positif (di dalam pemikiran mereka). Selanjutnya ketika mereka menyelesaikan sisa permasalahan,

$$\int_0^2 x^3 = \left(\frac{1}{4}2^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right) = 4 \tag{2}$$

Dengan demikian, hasil akhirnya  $(1) + (2) = 4 + 4 = 8$  satuan luas.



**LATIHAN** \_\_\_\_\_

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Sebutkan ilmu-ilmu yang menunjang pertumbuhan dan perkembangan teknologi!
- 2) Sebutkan sifat khas matematika dibandingkan dengan ilmu-ilmu dasar fisika, kimia, dan biologi!
- 3) Apakah yang menjadi objek matematika pada awal perkembangannya?
- 4) Apa yang dimaksud dengan “pengertian”?

- 5) Apa yang dimaksud dengan “pernyataan”?
- 6) Apa guna pernyataan pangkal?
- 7) Apa guna pengertian pangkal?
- 8) Sebutkan beda antara matematika sekolah dan ilmu matematika!
- 9) Sebutkan objek langsung pembelajaran matematika sekolah!
- 10) Sebutkan objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah!
- 11) Berikan contoh fakta yang berupa simbol!
- 12) Guru mengajarkan sifat “sudut alas segitiga sama kaki sama ukurannya”, tanpa bukti. Dikatakan guru tersebut mengajarkan objek pembelajaran matematika sekolah yang mana?
- 13) Berikan contoh konsep yang berupa definisi genetis!
- 14) Seorang guru mengajarkan konsep segiempat dengan menunjukkan segiempat dari kawat. Dikatakan guru tersebut mengajarkan konsep segiempat dengan definisi apa?
- 15) Fungsi  $x$  didefinisikan sebagai  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ . Dikatakan fungsi  $f(x)$  didefinisikan dengan macam definisi apa?
- 16) Dalil Pythagoras di ajarkan oleh guru lengkap dengan bukti. Dikatakan guru tersebut mengajarkan objek matematika sekolah yang mana?
- 17) Siswa mengerjakan soal latihan  $6 \times 3 - 2 + 5 + 9 : 3$ , murid belajar keterampilan objek pembelajaran matematika sekolah apa?
- 18) Siswa menjawab pertanyaan guru, “Apakah segitiga itu?”. Dikatakan murid belajar keterampilan objek pembelajaran matematika sekolah apa?
- 19) Siswa sekolah taman kanak-kanak belajar menuliskan lambang angka “2” berulang kali. Dikatakan bahwa siswa tersebut belajar keterampilan objek pembelajaran matematika sekolah apa?
- 20) Berikan contoh soal latihan keterampilan pemahaman konsep derivatif!
- 21) Apakah yang dimaksud dengan “*Mathematics as a human activity*”?
- 22) Dapatkah Anda memilihkan konteks untuk memahami konsep *persamaan garis lurus*  $y = mx + c$ !

### *Petunjuk Jawaban Latihan*

- 1) Ilmu-ilmu yang menunjang pertumbuhan dan perkembangan teknologi adalah ilmu-ilmu dasar, yaitu ilmu fisika, ilmu kimia, biologi, dan matematika.

- 2) Ilmu-ilmu dasar fisika, kimia, dan biologi sangat memerlukan bantuan matematika untuk menumbuhkembangkan dirinya. Sementara itu, matematika tumbuh dan berkembang secara mandiri.
- 3) Pada permulaan perkembangannya objek matematika adalah benda-benda nyata di kehidupan sehari-hari yang ada di sekitar kita.
- 4) Yang dimaksud dengan pengertian adalah jawab atas pertanyaan, “apakah itu”.
- 5) Yang dimaksud dengan pernyataan adalah jawab atas pertanyaan, “bagaimanakah itu”.
- 6) Pernyataan pangkal berguna untuk menghindari *circulus in probando* dan *regresus in infinitum*.
- 7) Pengertian pangkal berguna untuk menghindari *circulus in definiendo* dan *regresus in infinitum*.
- 8) Ilmu matematika adalah matematika yang utuh, yang merupakan ilmu deduktif aksiomatik. Sementara itu, matematika sekolah adalah bagian-bagian matematika yang dipilih guna menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan dan membentuk pribadi siswa, serta berpadu kepada perkembangan iptek.
- 9) Objek langsung pembelajaran matematika sekolah adalah fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan.
- 10) Objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah adalah disiplin diri, kemahiran matematika, apresiasi terhadap matematika, berpikir secara logis, rasional, dan eksak.
- 11) Misalnya simbol operasi logaritma “log”.
- 12) Guru tersebut mengajarkan objek matematika fakta.
- 13) Segitiga sama kaki adalah segitiga yang memiliki sepasang sisi yang sama ukurannya.
- 14) Mengajarkan konsep segiempat dengan definisi demonstrasi.
- 15) Definisi  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  adalah definisi rumus.
- 16) Dikatakan guru mengajarkan objek matematika sekolah prinsip.
- 17) Murid belajar keterampilan pemahaman fakta urutan menghitung.
- 18) Dikatakan murid belajar keterampilan pemahaman prinsip.
- 19) Dikatakan siswa belajar keterampilan pemahaman fakta.
- 20) Jika  $y = \sin x$ , tunjukkanlah kebenaran bahwa  $y' = \cos x$  dengan menggunakan definisi derivatif.

- 21) *Mathematics as a human activity* bermakna bahwa matematika tidak boleh dipelajari sebagai sebuah sistem yang tertutup, melainkan sebagai suatu kegiatan mematematisasi realitas dan jika mungkin yang dari mematematisasi matematika, dengan kata lain bahwa konteks dapat memberikan jalan terhadap pemahaman dan perolehan pengetahuan akan konsep-konsep matematika, karena konteks yang tepat memberikan gambaran bagaimana sebenarnya konsep matematika itu teraplikasi di dalamnya.
- 22) Konteks-konteks, seperti menyusun kursi, argo taksi, atau mengisi bensin dapat dijadikan konteks dalam memahami konsep persamaan garis lurus.

Apa yang sudah dipelajari di atas disajikan ulang dalam bentuk rangkuman sebagai berikut.



## RANGKUMAN

---

### A. Hakikat Matematika

Matematika adalah salah satu ilmu dasar yang mendukung pertumbuhan dan perkembangan teknologi. Matematika memiliki sifat khas sebagai “Ratu dan pelayan sains”. Sebagai ratu, matematika mengayomi tumbuh berkembangnya sains, dan sebagai pelayan, matematika menyediakan alat untuk tumbuh berkembangnya sains.

### B. Ilmu Matematika

Matematika sebagai ilmu adalah matematika yang utuh dalam sistem maupun strukturnya yang deduktif aksiomatik. Penalaran di matematika sebagai ilmu hanya penalaran deduksi. Objek ilmu matematika adalah benda-benda abstrak. Sistem ilmu matematika berupa himpunan yang memiliki himpunan pengertian dan himpunan pernyataan sebagai himpunan bagiannya. Di dalam mencari kebenaran hanya digunakan penalaran deduksi, kemudian disusun rangkaian kebenaran konsistensi yang menuju kepada kesimpulan akhir.

### C. Matematika Sekolah

Matematika sekolah terdiri atas bagian-bagian matematika yang dipilih guna menumbuhkembangkan kemampuan–kemampuan dan membentuk pribadi siswa serta berpadu kepada perkembangan IPTEK. Jelas bahwa matematika sekolah bukan matematika yang deduktif

aksiomatik. Penalaran yang digunakan tidak hanya penalaran deduksi, tetapi juga penalaran induksi, dan juga menggunakan penalaran ilmiah, yaitu penalaran yang merupakan rangkaian berulang kali dari penalaran deduksi dan penalaran induksi. Bahkan eksperimen dan intuisi ikut berperan.

Objek langsung pembelajaran matematika sekolah adalah fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan. Fakta adalah semufakatan-semufakatan tentang lambang yang dipakai, atau aturan-aturan yang disepakati bersama. Konsep merupakan jawab atas pertanyaan, “Apakah itu?”. Prinsip merupakan jawaban atas pertanyaan, “Bagaimanakah itu?”. Untuk mendapatkan pemahaman atas fakta, konsep, dan prinsip perlu latihan keterampilan penguasaan fakta, keterampilan penggunaan konsep dan prinsip di dalam menyusun kebenaran konsistensi. Objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah di antaranya adalah disiplin diri, kemahiran matematika, apresiasi terhadap matematika, dan berpikir secara matematika, yaitu logis, rasional, dan eksak.

“*Mathematics as a human activity*” berarti matematika tidak boleh dipelajari sebagai sebuah sistem yang tertutup, melainkan sebagai suatu kegiatan mematematisasi realitas dan jika mungkin yang dari mematematisasi matematika. Seseorang yang sedang dalam proses belajar matematika bahwa mereka dapat menggambarkan konsep, struktur, dan idea matematika dikaitkan dengan fenomena sekitar yang diciptakannya.



## TES FORMATIF 1

---

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Ilmu matematika adalah ilmu yang ....
  - A. deduktif aksiomatik
  - B. menggunakan penalaran induksi saja
  - C. diajarkan di sekolah pada masa kini
  - D. memiliki objek benda-benda nyata
  
- 2) Matematika sekolah adalah ....
  - A. sama dengan matematika sebagai ilmu
  - B. berhitung yang diajarkan di Sekolah Dasar
  - C. bahan ajar matematika di perguruan tinggi
  - D. bagian-bagian matematika yang diajarkan di Pendidikan Dasar dan Menengah

- 3) Objek langsung pembelajaran matematika sekolah adalah....
  - A. benda-benda nyata yang dijumpai di kehidupan sehari-hari
  - B. lambang-lambang dan pengertian
  - C. fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan
  - D. fakta, konsep, dan pengertian
  
- 4) Siswa Taman Kanak-kanak belajar menulis angka “6”, dikatakan siswa Taman Kanak-kanak itu belajar ....
  - A. konsep
  - B. prinsip
  - C. fakta
  - D. menulis
  
- 5) Guru mengajarkan dalil Pythagoras tanpa bukti. Dikatakan guru tersebut mengajarkan ....
  - A. fakta
  - B. prinsip
  - C. konsep
  - D. pengertian
  
- 6) Guru mendefinisikan garis lurus dengan cara membentangkan seutas tali. Dikatakan guru tersebut mendefinisikan garis dengan definisi ....
  - A. genetis
  - B. demonstrasi
  - C. dengan induksi
  - D. analitis
  
- 7) Soal latihan menghitung  $3! = . . .$ ,  $7! = . . .$  merupakan soal latihan keterampilan pemahaman ....
  - A. konsep
  - B. fakta
  - C. prinsip
  - D. urutan berhitung
  
- 8) Buktikanlah sudut alas segitiga sama kaki sama ukurannya. Merupakan soal latihan keterampilan pemahaman ....
  - A. fakta
  - B. prinsip
  - C. konsep
  - D. pengertian



- 9) Aksioma berguna untuk menghindari ....
- A. regresus infinitum dan circulus in probando
  - B. regresus infinitum dan circulus in definiendo
  - C. definisi yang tidak jelas
  - D. pembuktian yang ruwet
- 10) Lambang huruf x adalah variabel. Jika ditulis  $2x$  artinya ....
- A. 2 ditambah x
  - B. 20 ditambah x
  - C. 20 kali x
  - D. 2 kali x

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
80 - 89% = baik  
70 - 79% = cukup  
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

## KEGIATAN BELAJAR 2

## Kemahiran Matematika

**K**emahiran matematika merupakan salah satu objek tidak langsung pembelajaran matematika sekolah. Artinya kemampuan kemahiran matematika di peroleh sebagai hasil pembentukan pribadi dari belajar matematika. Kemahiran matematika merupakan kemampuan pengalihan hasil belajar matematika ke dalam situasi dan kondisi lain di dalam kehidupan sehari-hari. Kemahiran matematika di antaranya adalah Penalaran, Komunikasi (Penyebaran) dan Pemecahan masalah. Setelah mempelajari Kegiatan Belajar 2 ini, Anda diharapkan dapat:

1. menyebutkan ciri penalaran induksi;
2. menyebutkan ciri penalaran deduksi;
3. menyebutkan ciri penalaran ilmiah;
4. menyebutkan penalaran yang digunakan di dalam membuktikan dalil;
5. membuat pernyataan bahwa penciptaan sistem matematika tiada akhir;
6. menyebutkan langkah-langkah di dalam pemecahan masalah;
7. menyebutkan beberapa strategi pemecahan masalah;
8. menyebutkan di langkah pemecahan masalah yang mana? strategi pemecahan masalah dimunculkan;
9. menyebutkan beda pemecahan masalah dan menyelesaikan soal latihan;
10. menggunakan strategi pemecahan masalah dengan tepat.

### A. PENALARAN

Penalaran adalah proses berpikir di dalam penarikan kesimpulan. Ada beberapa metode penalaran. Di antaranya adalah penalaran dengan metode deduksi, penalaran dengan metode induksi, dan penalaran dengan metode ilmiah.

#### 1. Penalaran dengan Metode Deduksi

Penalaran dengan metode deduksi, yang biasa disebut secara singkat sebagai penalaran deduksi, adalah penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan yang berlaku umum diberlakukan kepada keadaan khusus.

*Contoh 1.11*

- a. Dari pernyataan: Semua orang akan mati.  
Dengan penalaran deduksi ditarik kesimpulan bahwa si Polan akan mati. Semua orang akan mati merupakan pernyataan yang berlaku umum. Karena si Polan adalah orang maka dengan penalaran deduksi disimpulkan bahwa si Polan akan mati.
- b. Ada pernyataan: Sudut alas segitiga sama kaki sama ukurannya. Diketahui bahwa  $\triangle ABC$  adalah segitiga sama kaki dengan sisi  $AC = BC$ . Dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan penalaran deduksi ukuran  $\angle A =$  ukuran  $\angle B$ .

**2. Penalaran dengan Metode Induksi**

Penalaran dengan metode induksi biasa disebut penalaran induksi, yaitu penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan khusus yang didapat dari beberapa kali pengamatan, diberlakukan secara umum.

*Contoh 1.12*

- a. Dari hasil pengamatan kulit telur ayam kampung si Mamat berwarna putih, kulit telur ayam kampung si Badu berwarna putih, dan kulit telur ayam kampung si Johan berwarna putih. Dengan penalaran induksi, ditarik kesimpulan bahwa kulit telur ayam kampung berwarna putih.
- b. Dari hasil pengukuran keliling beberapa lingkaran didapat hasil bahwa keliling sebuah lingkaran mendekati  $\frac{22}{7}$  kali panjang garis tengah lingkaran. Dengan penalaran induksi ditarik kesimpulan bahwa keliling sebuah lingkaran sama dengan  $\frac{22}{7}$  kali panjang garis tengah lingkaran.

**3. Penalaran dengan Metode Ilmiah**

Sebelumnya orang sangat memuja kepada penalaran deduksi sehingga sesuatu baru dianggap benar, jika dapat dibuktikan dengan penalaran deduksi. Kebenaran yang tidak dapat dibuktikan dengan penalaran deduksi dianggap bukan kebenaran mutlak. Pada pertengahan abad 20 mulailah orang menggunakan penalaran ilmiah, yaitu penalaran yang merupakan rangkaian berulang kali dari penalaran deduksi dan penalaran induksi. Dimulai dengan pengamatan gejala yang terjadi. Dengan penalaran deduksi, berdasarkan kepustakaan yang sudah ada atau teori-teori yang sudah ada, dibuatlah dugaan sementara atas gejala tersebut. Dugaan sementara ini, biasa disebut

sebagai hipotesis. Disusul kemudian dengan uji coba di lapangan. Dengan menggunakan penalaran induksi dan dibantu dengan statistik, diujilah kebenaran hipotesis tersebut. Jika hasil uji coba mendukung kebenaran hipotesis maka selesailah proses penalaran ilmiah untuk mendapatkan kebenaran atas hipotesis tersebut. Jika hasil uji coba tidak mendukung kebenaran hipotesis maka diulang seluruh proses dari awal. Dimulai lagi dengan membuat pengamatan terhadap gejala yang dihadapi. Kemudian dengan penalaran deduksi, dibuatlah hipotesis baru dan seterusnya mengulangi langkah-langkah seperti semula.

## **B. KOMUNIKASI (PENYEBARAN)**

Matematika telah disinggung pada penjelasan sebelumnya yaitu bahwa matematika memiliki sifat yang khas terhadap ilmu-ilmu dasar Fisika, Kimia, dan Biologi sehingga ada yang mengatakan bahwa, "Matematika adalah Ratu dan pelayan sains". Sebagai ratu, matematika mengayomi bertumbuhkembangnya sains, dan sebagai pelayan, matematika melayani dengan menyediakan alat untuk menumbuhkembangkan sains.

Matematika di masa permulaan pertumbuhannya merupakan alat untuk membantu menyelesaikan masalah kesulitan hidup sehari-hari. Karena bencana alam banjir yang menggenangi tanah pekarangan, kebun, dan persawahan, menghanyutkan tanda-tanda yang dipasang sebagai batas pemilikan tanah. Setelah banjir surut timbullah masalah bagaimana menentukan batas-batas pemilikan tanah kembali. Untuk itu, diperlukan pengetahuan matematika tentang pengukuran yang terdapat di geometri datar. Demikian juga pada aktivitas perdagangan yang masih sangat sederhana, memerlukan pengetahuan tentang bilangan di dalam melakukan pertukaran barang. Jadi, dapat disimpulkan bahwa matematika di permulaan pertumbuhannya adalah pengetahuan dengan objek benda-benda nyata di sekeliling kita. Matematika tumbuh dan berkembang untuk menyelesaikan masalah hidup pada masa itu. Baru kemudian melalui abstraksi dan idealisasi, matematika menjadi ilmu yang sistem dan strukturnya merupakan ilmu yang deduktif aksiomatik. Hingga tahun 1600 matematika berkembang sangat lambat. Baru abad ke-17 matematika berkembang menjadi beberapa cabang matematika, di antaranya, teori kemungkinan, geometri analitik, kalkulus, topologi, dan geometri non-Euclides.

Sejak tahun 1800 orang mulai berpikir tentang matematika sebagai suatu permainan. Mereka menyadari bahwa mereka dapat menyusun suatu aturan-aturan dan membangun sistem matematika baru berdasarkan kepada aturan-aturan baru yang dibuat.

Sebelum tahun 1940 keperluan akan matematika tingkat tinggi masih sangat sedikit. Meskipun matematika tingkat tinggi tersebut diciptakan pada abad ke-17, tetapi kegunaan dan manfaatnya baru dirasakan setelah tahun 1940. Sejak itu situasinya sangat berubah apa lagi dengan meluasnya penggunaan komputer. Pengetahuan-pengetahuan lain secara efektif menggunakan komputer untuk perkembangannya. Ahli-ahli biologi dan ilmu-ilmu sosial menggunakan matematika tingkat tinggi untuk memacu perkembangan ilmunya. Ahli-ahli ekonomi masa datang memerlukan pengetahuan matematika yang lebih mendalam dan lebih luas untuk mengendalikan perdagangan dan industri.

Pada masa kini matematika menjadi bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Matematika tidak hanya melayani ilmu-ilmu dasar Fisika, Kimia, dan Biologi saja, tetapi juga ilmu-ilmu lain, di antaranya ilmu-ilmu sosial, ekonomi, keteknikan, dan masih banyak lagi ilmu-ilmu lain yang dilayaninya. Kita tidak perlu tahu perinci pemakaian matematika di bidang kedokteran, di bidang pengendalian lalu lintas, di bidang konstruksi bangunan, dan di bidang pengendalian bekerjanya reaktor atom, tetapi kita menikmati hasil kerja matematika di bidang-bidang tersebut.

Para ahli matematika menyadari bahwa tidak akan ada akhir penciptaan sistem matematika yang baru. Mereka menyadari bahwa mereka tidak cukup kemampuan untuk menyusun semua aturan matematika yang meliputi seluruh sistem matematika. Jadi sesuai dengan berjalannya waktu, masih akan tercipta sistem matematika yang baru. Penciptaan sistem matematika yang baru, sering dilakukan hanya sebagai permainan yang tidak disadari kegunaannya. Setelah beberapa abad kemudian, dapat dirasakan kegunaannya. Seperti pada penciptaan beberapa cabang matematika tingkat tinggi yang pada saat diciptakan orang belum sadar akan kegunaannya. Ternyata matematika tingkat tinggi sangat efektif menunjang perkembangan ilmu-ilmu lain, seiring dengan ditemukannya komputer.

## 1. Pemecahan Masalah

Suatu hari seorang ahli ilmu sosial bertemu dengan seorang pengajar matematika dan bertanya, “Apakah tujuan utama pembelajaran matematika?”. Dijawabnya, “Pemecahan masalah”. Kemudian pengajar matematika tersebut balik bertanya, “Apakah tujuan utama pembelajaran ilmu-ilmu sosial?”. Dijawabnya, “Pemecahan masalah”. Jadi, semua orang penyandang profesi ahli konstruksi, ahli sains, ahli ekonomi, ahli kedokteran, ahli hukum, ahli akuntansi, manager perdagangan yang berhasil adalah orang-orang yang ahli di dalam memecahkan masalah di bidangnya. Meskipun masalah-masalah yang dihadapinya sangat berbeda satu sama lain, tetapi ada kesamaan pola dasar pemecahan masalah tersebut.

Memecahkan masalah berbeda dengan menyelesaikan soal latihan. Menyelesaikan soal latihan merupakan aktivitas rutin keterampilan menggunakan fakta, konsep, dan prinsip untuk mendapatkan jawabannya. Sementara itu, pada pemecahan masalah, kadangkala kita harus berhenti merenung, mengingat langkah-langkah berhasil yang pernah dibuat, atau mendapatkan langkah yang baru sama sekali, menuju ke pemecahan masalah. Mengerjakan soal latihan matematika merupakan aktivitas yang penting untuk latihan pemahaman dan aplikasi fakta, konsep, dan prinsip matematika yang pada gilirannya akan memegang peranan penting di dalam pemecahan masalah.

Tidak setiap kejadian itu, menjadi masalah bagi semua siswa. Mungkin suatu kejadian merupakan sebuah masalah bagi seseorang, tetapi bukan masalah bagi siswa lain.

Sebagai seorang pemula di dalam belajar aritmetika, menghitung jumlah  $4 + 7$  sudah merupakan masalah baginya, sedangkan bagi siswa sekolah dasar kelas dua sudah merupakan fakta baginya. Bagi seorang siswa kelas satu sekolah dasar, pertanyaan, “Berapa butirkah kelereng yang menjadi bagian setiap orang anak jika ada 64 butir kelereng dibagikan secara merata kepada empat orang anak?” sudah merupakan masalah baginya. Sementara itu, bagi siswa kelas tiga bukan masalah lagi karena ia langsung menghitung  $64 : 4 = 16$ . Dengan makna bahwa setiap orang anak akan menerima bagian sebanyak 16 butir kelereng.

**2. Langkah dan Strategi Pemecahan Masalah**

George Polya, yang dijuluki sebagai bapak dari pemecahan masalah modern, memberikan empat langkah yang perlu dilakukan di dalam proses pemecahan masalah. Empat langkah tersebut adalah:

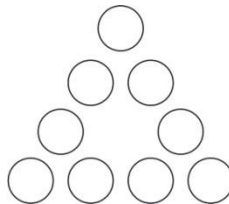
- a. memahami masalah;
- b. memikirkan rencana pemecahan masalah;
- c. melaksanakan pemecahan masalah;
- d. meninjau ulang pemecahan masalah yang telah dilakukan.

Di samping langkah-langkah pemecahan masalah, diperlukan strategi pemecahan masalah. Berikut akan diberikan contoh dari beberapa strategi pemecahan masalah.

*a. Strategi tebak dan periksa*

*Contoh 1.13*

Soal : Isikanlah angka 1, 2, 3, . . . , 9 di dalam setiap lingkaran yang membentuk segitiga di bawah ini sehingga jumlah bilangan pada setiap sisinya sama dengan 17.



Gambar 1.5

Penyelesaian masalah:

Langkah 1: Memahami masalah.

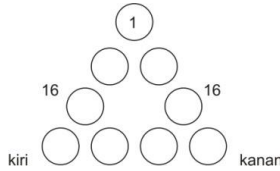
Setiap angka hanya dituliskan sekali di dalam sebuah lingkaran sehingga jumlah bilangan pada setiap sisi segitiga sama dengan 17.

Langkah 2: Memikirkan rencana pemecahan masalah.

Dibuat potongan-potongan kertas sebanyak 9 potong. Tuliskanlah pada setiap potongan kertas angka 1, 2, 3, . . . , 9. Dengan cara coba-coba,

letakkanlah setiap potongan kertas ke dalam setiap lingkaran sehingga di dapat susunan yang sesuai dengan hasil yang diinginkan.

Langkah 3: Melaksanakan rencana pemecahan masalah.



Gambar 1.6.

Jika ke dalam lingkaran puncak di letakkan angka 1 maka ke dalam tiga lingkaran yang terletak pada sebuah sisi harus diletakkan angka sehingga menghasilkan jumlah bilangan 16. Marilah kita coba segala kemungkinan yang dapat terjadi.

- 1)  $2 + 3 + ?$  tidak mungkin
- 2)  $2 + 4 + ?$  tidak mungkin
- 3)  $2 + 5 + 9 = 16$
- 4)  $2 + 6 + 8 = 16$
- 5)  $2 + 7 + ?$  tidak mungkin
- 6)  $2 + 8 + 6 = 16$

Yang mungkin adalah 3), 4), dan 6). Kemudian di selidiki dari kemungkinan 3), 4), dan 6), angka mana yang dimasukkan ke dalam lingkaran ujung kiri sehingga jumlah bilangan pada sisi alas segitiga sama dengan 17.

Angka 2 di masukkan ke dalam lingkaran ujung kiri maka jumlah bilangan pada empat lingkaran alas harus sama dengan 17. Kemungkinan yang ada,

Dari 3),  $2 + 5 + 9 = 16$ . Angka sisa 3, 4, 6, 7, dan 8.

$2 + 6 + 7 + ?$  tidak mungkin

$2 + 7 + 8 + ?$  tidak mungkin

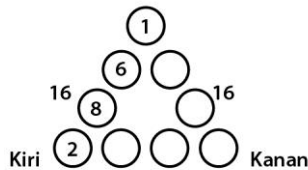
Dari 4),  $2 + 6 + 8 = 16$ . Angka sisa 3, 4, 5, 7, dan 9.

$2 + 3 + 4 + ?$  tidak mungkin

$2 + 3 + 5 + 7 = 17$

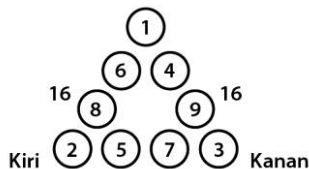


Sebagai kesimpulan sementara didapat susunan sebagai berikut.



Gambar 1.7

Pada sisi alas segitiga didapat susunan angka 2, 3, 5, dan 7. Harus ditentukan angka mana yang mengisi lingkaran ujung kanan. Kemungkinan yang ada adalah angka 3, 5, dan 7. Jadi harus dipilih salah satu dari angka 3, 5, dan 7 sebagai isi lingkaran ujung kanan sehingga jumlah bilangan pada tiga lingkaran yang masih belum terisi angka sama dengan 16. Angka-angka yang sudah terpakai adalah 1, 2, 3, 5, 6, 7, dan 8. Angka yang belum terpakai 4 dan 9. Karena  $4 + 9 = 13$  maka jelas angka di dalam lingkaran ujung kanan adalah angka 3 sehingga hasil akhir sebagai berikut:



Gambar 1.8

Langkah 4: Meninjau ulang pemecahan masalah yang telah di lakukan.

Meskipun di dalam menyelesaikan masalah ini menggunakan strategi Tebak dan Periksa, tetapi cara menebak yang dilakukan tidak asal-asalan. Bayangkan jika yang dilakukan adalah tebak asal-asalan, tentu akan sangat melelahkan, bahkan bisa menimbulkan keputusasaan. Dalam hal ini, terlihat bahwa di dalam menebak juga digunakan langkah-langkah yang terorganisasi dengan baik.

*b. Strategi menggunakan variabel*

Contoh:

Soal : Tunjukkanlah bahwa jumlah lima bilangan bulat ganjil yang berurutan memiliki 5 sebagai faktor.

Penyelesaian masalah:

1) Langkah 1: Memahami masalah.

Lima bilangan bulat ganjil yang berurutan misalnya 3, 5, 7, 9, dan 11. Jumlah lima bilangan bulat ganjil di atas adalah  $3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$ . Jika 5 adalah faktor dari 35 maka 5 kali suatu bilangan bulat akan sama dengan 35.

2) Langkah 2: Memikirkan rencana pemecahan masalah.

Karena kita dapat menggunakan variabel maka bilangan bulat ganjil pertama dapat dimisalkan sebagai  $2n + 1$ , dengan  $n$  adalah bilangan bulat sembarang. Dengan demikian lima bilangan bulat ganjil yang berurutan adalah,

$(2n + 1)$ ,  $(2n + 3)$ ,  $(2n + 5)$ ,  $(2n + 7)$ , dan  $(2n + 9)$ .

3) Langkah 3: Melaksanakan rencana pemecahan masalah.

Jumlah  $(2n + 1)$ ,  $(2n + 3)$ ,  $(2n + 5)$ ,  $(2n + 7)$ , dan  $(2n + 9)$  adalah  
 $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) + (2n + 9) = 10n + 25$   
 $= 5(2n + 5)$

Jadi  $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) + (2n + 9)$  sama dengan 5 kali bilangan bulat  $2n + 5$  maka kita telah berhasil menunjukkan bahwa jumlah lima bilangan bulat ganjil yang berurutan memiliki 5 sebagai faktor. Pada kasus  $n = 0$  maka lima bilangan bulat ganjil yang berurutan adalah 1, 3, 5, 7, dan 9 yang jumlahnya adalah  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5(5)$  yang memiliki 5 sebagai faktor.

4) Langkah 4: Meninjau ulang pemecahan masalah yang sudah dilakukan.

Mungkinkah kita menunjukkan bahwa jumlah tiga bilangan bulat ganjil yang berurutan memiliki 3 sebagai faktor? Mungkinkah kita menunjukkan bahwa jumlah tujuh bilangan bulat ganjil yang berurutan memiliki 7 sebagai faktor? Dan mungkinkah kita membuat generalisasi dari pengalaman di atas?



## LATIHAN

---

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Sebutkan ciri penalaran deduksi!
- 2) Sebutkan ciri penalaran induksi!
- 3) Sebutkan ciri penalaran ilmiah!
- 4) Sebutkan ciri matematika pada masa awal perkembangannya!
- 5) Sejak kapan matematika tingkat tinggi dirasakan kegunaan dan manfaatnya?
- 6) Siapakah yang dijuluki sebagai bapak pemecahan masalah modern?
- 7) Sebutkan empat langkah pemecahan masalah George Polya!
- 8) Sebutkan beberapa strategi pemecahan masalah!
- 9) Sebutkan strategi pemecahan masalah yang mungkin digunakan untuk memecahkan masalah: Berat seekor anjing sama dengan 10 kg ditambah dengan setengah berat badannya. Berapakah berat anjing tersebut?
- 10) Tunjukkanlah bahwa jumlah tiga bilangan bulat ganjil yang berurutan, memiliki 3 sebagai faktor. Pemecahan masalah ini menggunakan strategi pemecahan masalah apa?

### *Petunjuk Jawaban Latihan*

- 1) Ciri penalaran deduksi adalah penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan yang berlaku umum, diberlakukan kepada keadaan khusus.
- 2) Ciri penalaran induksi adalah penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan khusus yang didapat dari beberapa kali pengamatan, diberlakukan secara umum.
- 3) Ciri penalaran ilmiah adalah merupakan rangkaian penalaran deduksi dan penalaran induksi yang dilakukan bergantian.
- 4) Ciri matematika pada awal perkembangannya memiliki objek benda-benda nyata di kehidupan sehari-hari, di sekeliling kita.
- 5) Sejak tahun 1940 kegunaan dan manfaat matematika tingkat tinggi dirasakan. Terutama setelah ditemukannya komputer.
- 6) Yang dijuluki sebagai bapak pemecahan masalah modern adalah George Polya.

- 7) Empat langkah pemecahan masalah George Polya adalah memahami masalah, memikirkan pemecahan masalah, melaksanakan rencana pemecahan masalah, dan meninjau ulang pemecahan masalah yang sudah dilakukan.
- 8) Strategi pemecahan masalah di antaranya adalah tebak dan periksa, serta penggunaan variabel.
- 9) Menggunakan strategi pemecahan masalah menggunakan variabel.
- 10) Menggunakan strategi pemecahan masalah menggunakan variabel.

Apa yang sudah dipelajari disajikan ulang dalam bentuk rangkuman sebagai berikut.



## RANGKUMAN

---

### A. Penalaran

1. Penalaran dengan Metode Deduksi  
Penalaran dengan metode deduksi adalah penalaran menarik kesimpulan, dari pernyataan yang berlaku umum diberlakukan kepada keadaan khusus.
2. Penalaran dengan Metode Induksi  
Penalaran dengan metode induksi adalah penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan yang berlaku khusus yang didapat dari beberapa kali pengamatan, diberlakukan secara umum.
3. Penalaran dengan Metode Ilmiah  
Penalaran dengan metode ilmiah adalah penalaran yang merupakan rangkaian penalaran deduksi dan penalaran induksi yang dilakukan berulang kali.

### B. Komunikasi (Penyebaran)

Pada masa awal perkembangannya, matematika memiliki objek benda-benda nyata di kehidupan sehari-hari, di sekeliling kita. Pada waktu itu, matematika merupakan salah satu sarana memecahkan masalah hidup sehari-hari. Kemudian melalui abstraksi dan idealisasi, tersusunlah matematika sebagai pengetahuan yang memiliki sistem dan struktur deduktif aksiomatik. Matematika tumbuh dan berkembang secara mandiri, bahkan sering dirasakan tidak memiliki manfaat. Pada kemudian hari, beberapa abad setelah penemuannya manusia merasakan manfaatnya. Terutama setelah ditemukannya komputer, matematika menjadi sangat diperlukan oleh berbagai cabang ilmu pengetahuan.

Bahkan, dapat dikatakan di setiap kegiatan kehidupan masa kini tidak lepas dari penggunaan matematika.

### C. Pemecahan Masalah

Empat langkah pemecahan masalah modern dari George Polya adalah:

- 1) memahami masalah;
- 2) memikirkan rencana pemecahan masalah;
- 3) melaksanakan rencana pemecahan masalah;
- 4) meninjau ulang pemecahan masalah yang telah dilakukan.

Di samping langkah-langkah pemecahan masalah, dikenal juga strategi pemecahan masalah. Di antaranya adalah strategi pemecahan masalah tebak dan periksa, serta strategi menggunakan variabel.



### TES FORMATIF 2

---

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Penalaran menarik kesimpulan dari pernyataan khusus yang didapat dari beberapa kali pengamatan, diberlakukan secara umum disebut penalaran....
  - A. deduksi
  - B. induksi
  - C. ilmiah
  - D. matematika
- 2) Dari pernyataan, “Jumlah ukuran sudut sebuah segitiga sama dengan  $180^\circ$ ”. Ditarik kesimpulan  $\triangle ABC$  memiliki jumlah ukuran ukuran  $\angle A + \text{ukuran } \angle B + \text{ukuran } \angle C = 180^\circ$  adalah penalaran ....
  - A. deduksi
  - B. induksi
  - C. ilmiah
  - D. matematika
- 3) Penalaran yang digunakan di dalam pembuktian dalil adalah penalaran....
  - A. deduksi
  - B. induksi

- C. ilmiah
  - D. induksi dan deduksi berganti-ganti
- 4) Penciptaan sistem matematika baru, ....
- A. ada batasnya
  - B. suatu ketika berhenti
  - C. tidak bermanfaat
  - D. tak akan ada hentinya
- 5) Memahami masalah adalah salah satu ....
- A. langkah pemecahan masalah
  - B. strategi pemecahan masalah
  - C. objek pembelajaran matematika sekolah
  - D. penalaran
- 6) Di dalam pemecahan masalah, selain diperlukan langkah-langkah pemecahan masalah diperlukan ....
- A. rencana pemecahan masalah
  - B. pelaksanaan rencana pemecahan masalah
  - C. meninjau ulang pelaksanaan pemecahan masalah yang dilakukan
  - D. strategi pemecahan masalah
- 7) Yang manakah pernyataan di bawah ini, yang merupakan strategi pemecahan masalah?
- A. Memikirkan rencana pemecahan masalah.
  - B. Menggunakan penalaran deduksi.
  - C. Menggunakan variabel.
  - D. Menggunakan penalaran induksi.
- 8) Pada langkah pemecahan masalah yang manakah strategi pemecahan masalah dimunculkan?
- A. Memahami masalah.
  - B. Merencanakan pemecahan masalah.
  - C. Melaksanakan rencana pemecahan masalah.
  - D. Meninjau ulang pemecahan masalah yang dilaksanakan.
- 9) Menyelesaikan soal latihan merupakan keterampilan ....
- A. memecahkan masalah
  - B. mengasah otak
  - C. rutin aplikasi fakta, konsep, dan prinsip
  - D. objek tak langsung pembelajaran matematika sekolah

- 10) Masalah, “Tunjukkanlah jumlah tujuh bilangan bulat ganjil yang berurutan memiliki 7 sebagai faktor!”, dipecahkan dengan strategi ....
- A. tebak-tebakan
  - B. tebak dan periksa
  - C. menggunakan variabel
  - D. coba-coba

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
80 - 89% = baik  
70 - 79% = cukup  
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

## Kunci Jawaban Tes Formatif

### *Tes Formatif 1*

- 1) A
- 2) D
- 3) C
- 4) C
- 5) A
- 6) B
- 7) A
- 8) B
- 9) A
- 10) D

### *Tes Formatif 2*

- 1) B
- 2) A
- 3) B
- 4) D
- 5) A
- 6) D
- 7) C
- 8) B
- 9) C
- 10) C



## Daftar Pustaka

- Lewis, Harry. 1978. *Geometry*. McCormick-Mathers Publishing Company. Florence. Kentucky 410-42.
- Musser Gary L, Burger William F. 1991. *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Santosa, M, Soemoenar. 1979. *Metodologi Pengajaran Matematika*. Jakarta: Departemen Agama.
- Tambunan G. Drs. 1987. *Pengajaran Matematika*. Jakarta: Karunika, Universitas Terbuka.
- \_\_\_\_\_ . 1993. *Kurikulum Pendidikan Dasar*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- \_\_\_\_\_ . 1981. *The New Book of Knowledge*. USA: Grolier Incorporated.