MODUL 1

Relasi, Fungsi, dan Transformasi

Drs. Ame Rasmedi S.
Dr. Darhim, M.Si.

PENDAHULUAN

Modul ini merupakan modul pertama pada mata kuliah Geometri Transformasi. Modul ini akan membahas pengertian dan sifat-sifat tentang relasi, fungsi, dan transformasi serta keterhubungan dari ketiganya. Semua bahasan tersebut merupakan dasar untuk mempelajari isi mata kuliah Geometri Transformasi secara keseluruhan.

Oleh sebab itu, pelajarilah dengan saksama dan hati-hati materi yang terdapat dalam modul ini. Hal tersebut dilakukan supaya Anda terhindar dari kesulitan-kesulitan dalam mempelajari dan menyelesaikan secara tuntas mata kuliah Geometri Transformasi ini.

Secara umum, setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan konsep, macam, sifat relasi dan fungsi, serta konsep dan sifat transformasi.

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, secara khusus, setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda dapat:

1. menentukan sebuah relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain;
2. menentukan domain/range sebuah relasi;
3. menentukan relasi refleksi;
4. menentukan relasi simetri;
5. menentukan relasi transitif;
6. menentukan relasi ekuivalen;
7. menganalisis sebuah fungsi;
8. menganalisis sebuah fungsi kepada;
9. menganalisis sebuah fungsi satu-satu;
10. menganalisis sebuah fungsi bijektif;
11. menganalisis sebuah transformasi;
12. menganalisis pernyataan berdasarkan sifat-sifat transformasi.

KEGIATAN BELAJAR 1

Relasi dan Fungsi

A. PENGERTIAN RELASI

Agar Anda dapat memahami pengertian relasi dengan baik, Anda harus mengetahui terlebih dahulu pengertian tentang “pasangan terurut dari dua objek a dan b, yang ditulis dengan (a, b)” serta “kalimat matematika terbuka dengan dua peubah x dan y, yang ditulis dengan P(x, y)”. Notasi (a, b) disebut pasangan terturut apabila tulisan ini memperhatikan urutan penulisan. Artinya, (a, b) ≠ (b, a) sebab bagian pertama dari (a, b) ditempati oleh objek a, sedangkan bagian pertama dari (b, a) ditempati oleh b, dalam hal ini a ≠ b. Begitu pula halnya dengan bagian kedua dari (a, b) ataupun (b, a). Jadi, pasangan terurut (a, b) = (b, a) jika dan hanya jika a = b.

Notasi P(x, y) disebut kalimat matematika terbuka dengan dua peubah x dan y. Apabila nilai kebenaran dari P(x, y) belum dapat ditentukan, kecuali x diganti oleh sesuatu objek tertentu a dan y diganti oleh sesuatu objek b, barulah kebenarannya dapat ditentukan (pasti). Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.1 A = {x|x <10, x suatu bilangan asli}
P(x, y) = x habis membagi y
Jelas bahwa P(1,2) bernilai benar sebab 1 habis membagi 2. Akan tetapi, P(3,7) bernilai salah sebab 3 tidak habis membagi 7.

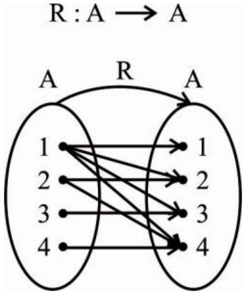
Berdasarkan bekal pengetahuan di atas, diharapkan Anda dapat mempelajari dan memahami relasi dari dua himpunan A dan B, seperti ditetapkan pada definisi berikut.

Definisi 1.1

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong dan P(x, y) kalimat matematika terbuka, x ∈ A ke y ∈ A. Relasi R dari himpunan A ke B merupakan suatu himpunan yang anggota-anggotanya pasangan terurut (a, b) dengan a ∈ A dan b ∈ B serta P(a, b) bernilai benar.

Untuk memperjelas maksud definisi di atas, cobalah Anda pelajari contoh berikut ini.

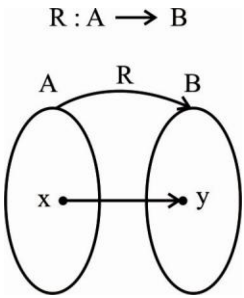
Contoh 1.2 $A = \{z|z < 5$, z suatu bilangan asli$\}$, $P(x, y)$ = x habis membagi y. Relasi R dari himpunan A ke A yang ditunjukkan oleh $P(x, y)$ adalah $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$, seperti Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1

Ada beberapa istilah yang perlu Anda ingat kembali sehubungan dengan pengertian relasi di atas, yaitu peta, prapeta, domain, dan range.

Misalkan R relasi dari himpunan A ke B. Apabila $x \in A$ maka peta dari x oleh relasi R adalah semua $y \in B$ sehingga $(x, y) \in R$. Apabila $y \in B$ maka prapeta dari y oleh relasi R adalah semua $x \in A$ sehingga $(x, y) \in R$ disebut domain dari R. Sementara itu, himpunan terdiri atas semua $y \in B$ menyebabkan $(x, y) \in R$ disebut range dari R. Perhatikan Gambar 1.2.



Gambar 1.2

Untuk lebih jelasnya, cobalah Anda cermati contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.3 Perhatikan relasi pada Contoh 1.2 di atas. Dari hasil relasi tersebut, dapat kita tentukan bahwa peta dari $1 \in A$ oleh relasi R adalah 1, 2, 3, dan 4 sebab $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \in R$. Kemudian, peta dari $2 \in A$ oleh relasi R adalah 2 dan 4 sebab $(2,2), (2,4) \in R$. Sementara itu, prapeta dari $2 \in A$ oleh R adalah 1 dan 2 sebab $(1,2), (2,2) \in R$. Dari contoh itu pula, terlihat bahwa domain dan range dari R adalah himpunan A sendiri.

Contoh 1.4 Misalkan $A = \{2,3,4,5\}$ dan $B = \{2,3,7\}$ dengan $P(x, y)$ = x habis dibagi y, $x \in A$ ke $y \in A$ relasi R yang diakibatkan oleh $P(x, y)$ dari A ke B adalah $\{(2,2), (4,2), (3,3)\}$. Dari hasil relasi tersebut, dapat terlihat bahwa peta dari 2 adalah 2. Sementara itu, prapeta dari 2 adalah 2 dan 4 sebab $2 \in A$ oleh relasi R hanya $(2,2) \in R$, sedangkan $2 \in B$ oleh relasi R adalah (2,2) dan (4,2) yang keduanya anggota R.
Domain dari R adalah $\{2,3,4\}$, sedangkan range dari R adalah $\{2,3\}$ sebab $R = \{(2,2), (4,2), (3,3)\}$.

B. MACAM-MACAM RELASI

Ada beberapa macam relasi yang akan dibahas di sini, yaitu relasi refleksi, relasi simetri, relasi transitif, relasi ekuivalen, dan relasi balikan (invers). Karena pengertian-pengertian ini akan dipakai pada bagian ruas garis berarah nanti, ada baiknya kita mulai mempelajarinya dari definisi dan contoh-contoh.

Definisi 1.2 Misalkan A suatu himpunan tak kosong, R suatu relasi dari A ke A. R disebut relasi refleksi jika dan hanya jika untuk setiap $x \in A$ berlaku $(x, x) \in R$.

Contoh 1.5 Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dengan $R_1 = \{(1,1), (2,4), (4,1), (4,4)\}$ dan $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$. R_1 bukan relasi refleksi, sebab $2, 3 \in A$, sedangkan $(2,2), (3,3) \notin R_1$. Akan tetapi, R_2 adalah relasi refleksi sebab untuk setiap

$x \in A$ maka $(x,x) \in R_2$, yaitu: $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R_2$.

Definisi 1.3

Misalkan A suatu himpunan tak kosong, R suatu relasi pada A (dari A ke A). Relasi R disebut relasi simetri jika dan hanya jika untuk setiap $(x,y) \in R$ berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 1.6 R_1 dan R_2 pada Contoh 1.5 di atas, masing-masing bukan merupakan relasi simetri, sebab $(2,4) \in R_1$. Akan tetapi, $(4,2) \notin R_1$ dan $(4,1) \in R_2$, tetapi $(1,4) \notin R_2$.

Contoh 1.7 Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dengan $R_3 = \{(1,2), (2,1)\}$ dan $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$. Setiap $(x,y) \in R_3$ maka $(y,x) \in R_3$. Demikian pula untuk setiap $(x,y) \in R_4$ maka $(y,x) \in R_4$, dalam hal ini $x = y$. Jadi, R_3 ataupun R_4 merupakan relasi simetri. Sekarang, coba Anda renungkan apakah R_3 dan R_4 termasuk relasi refleksi? Anda benar bahwa R_3 bukan relasi refleksi, tetapi R_4 merupakan relasi refleksi sebab untuk setiap $x \in A$ berlaku $(x,x) \in R_4$.

Definisi 1.4

Misalkan A suatu himpunan tak kosong, R suatu relasi pada A. Relasi R disebut relasi transitif jika dan hanya jika untuk setiap $(x,y), (y, z) \in R$ berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 1.8 Ambil relasi R_1, R_2, R_3, dan R_4, pada Contoh 1.5 dan Contoh 1.7. Dari contoh-contoh tersebut, dapat kita pastikan bahwa R_1 dan R_3 bukan merupakan relasi transitif, sebab $(2,4), (4,1) \in R_1$, tetapi $(2,1) \notin R_1$. Sementara itu, $(1,2), (2,1) \in R_3$, tetapi $(1,1) \notin R_3$.

R_2 dan R_4 merupakan suatu relasi transitif karena keduanya berlaku bahwa setiap $(x,y), (y,z) \in R_2$ maka $(x,z) \in R_2$. Demikian pula untuk setiap $(x,y), (y,z) \in R_4$ maka $(x,z) \in R_4$ (x, y, dan z bisa ketiga-tiganya sama, x dan z sama, atau y dan z sama).

Definisi 1.5

Misalkan A suatu himpunan, R suatu relasi pada A. Relasi R disebut relasi ekuivalen jika dan hanya jika R adalah relasi refleksi, simetri, dan transitif.

Contoh 1.9 Di antara R_1 sampai R_4 dari contoh di atas, yang merupakan relasi ekuivalen hanya R_4 sebab relasi tersebut mencakup relasi refleksi, simetri, dan transitif.

Contoh 1.10 Misalkan A = {1,2,3,4} dan R_5 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1), (3,3), (4,4)}. Relasi ini merupakan relasi ekuivalen sebab R_5 memenuhi syarat sebagai relasi refleksi, yaitu $1 \in A$ dan $(1,1) \in R_5$, $2 \in A$ dan $(2,2) \in R_5$, $3 \in A$ dan $(3,3) \in R_5$, $4 \in A$ dan $(4,4) \in R_5$. Jadi $\forall\, x \in A$ berlaku $(x,x) \in R_5$. R_5 ini pun memenuhi syarat sebagai relasi simetri sebab $(1,2) \in R_5$ maka $(2,1) \in R_5$, $(2,3) \in R_5$ maka $(3,2) \in R_5$ dan $(1,3) \in R_5$ maka $(3,1) \in R_5$. Jadi, untuk setiap $(x,y) \in R_5$ maka $(y,x) \in R_5$. Kemudian, relasi ini juga memenuhi syarat sebagai relasi transitif sebab (1,2), $(2,1) \in R_5$ maka $(1,1) \in R_5$, (1,2), $(2,3) \in R_5$ maka $(1,3) \in R_5$, (2,1), $(1,3) \in R_5$ maka $(2,3) \in R_5$, (2,3), $(3,2) \in R_5$ maka $(2,2) \in R_5$, (2,3), $(3,1) \in R_5$ maka $(2,1) \in R_5$, (3,2), $(2,3) \in R_5$ maka $(3,3) \in R_5$, (3,2), $(2,1) \in R_5$ maka $(3,1) \in R_5$ dan (1,1), $(1,3) \in R_5$ maka $(1,3) \in R_5$. Jadi, untuk setiap (x,y), $(y,z) \in R_5$ berlaku $(x,z) \in R_5$ juga.

Definisi 1.6 Misalkan A, B dua himpunan, dan R relasi dari A ke B. Relasi balikan (invers) dari R yang ditulis dengan R^{-1} adalah $\{(x,y) | (y,x) \in R\}$.

Contoh 1.11 Perhatikan R_1 dan R_2 pada Contoh 1.5. Dari contoh tersebut, dapat kita tentukan bahwa
R_1^{-1} = {(1,1), (4,2), (1,4), (4,4)} dan R_2^{-1} = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,4), (4,4)}.

C. PENGERTIAN FUNGSI

Coba Anda perhatikan kembali relasi R_1 sampai R_5 dalam Contoh 1.5 sampai dengan Contoh 1.10 sebagai berikut.

R_1 = {(1,1), (2,4), (4,1), (4,4)}
R_2 = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)}
R_3 = {(1,2), (2,1)}

$R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
$R_5 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1), (3,3), (4,4)\}$

Jika Anda cermati, terlihat bahwa domain dari R_1, R_3 tidak sama dengan $A = \{1,2,3,4\}$. Sementara itu, domain dari R_2, R_4, dan R_5 sama dengan A. Perhatikan R_4, setiap unsur dari A pada relasi tersebut mempunyai peta masing-masing tunggal. Untuk R_2 dan R_5, ada unsur dari A yang petanya tidak tunggal. Untuk $R_{2,}$ dapat Anda lihat bahwa $4 \in A$ oleh R_2 dipetakan ke 1 dan 4. Untuk R_5, kita lihat bahwa $1 \in A$ oleh R_5 dipetakan ke 1, 2, dan 3; $2 \in A$ oleh R_5 dipetakan ke 1,2,3; dan $3 \in A$ oleh R_5 dipetakan ke 2,1,3.

Domain relasi, seperti R_4 dari A ke A (pada A) yang mempunyai ketentuan, adalah A dan setiap unsur dari A mempunyai peta yang tunggal, selanjutnya ditetapkan sebagai fungsi dari A ke A. Secara umum, pengertian fungsi ditetapkan dalam definisi berikut.

Definisi 1.7 Suatu relasi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi dari A ke B jika dan hanya jika setiap $x \in A$ ada dengan tunggal $y \in B$ sehingga $(x,y) \in f$.

Jika suatu $x \in A$ dipetakan oleh f ke suatu $y \in B$, dikatakan y adalah peta dari x oleh f atau x adalah prapeta dari y oleh f dan secara matematis ditulis sebagai $y = f\,(x)$. Domain dari f adalah himpunan A, sedangkan Range dari f adalah setiap $y \in B$ sehingga $y = f\,(x)$.

Contoh 1.12 Misalkan R himpunan semua bilangan real. Ditetapkan relasi f dari R ke R sebagai berikut.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \in R$
2. $f(x) = x^2,\ x \in R$
3. $f(x) = x^3,\ x \in R$

Manakah di antara relasi di atas yang merupakan fungsi?

Penyelesaian:

1. Kita ambil $-1 \in R$, kemudian kita substitusikan ke dalam f(x), yaitu $f(-1) = \dfrac{1}{-1+1} = \dfrac{1}{0}$. Ternyata, hasilnya tak didefinisikan, jadi –1 tidak

mempunyai peta di R oleh relasi f. Karena ada x $\in$ R yang tidak mempunyai peta di R oleh f maka $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \in R$ bukan merupakan fungsi dari R ke R.

2. Karena $\forall$ x $\in$ R, x^2 = x . x adalah anggota R dan juga merupakan hasil yang tunggal maka setiap x $\in$ R mempunyai peta, yaitu x^2. Jadi, f merupakan fungsi dari R ke R.
3. Karena $\forall$ x $\in$ R, x^3 = x . x . x $\in$ R, x . x . x merupakan hasil yang tunggal maka f adalah fungsi dari R ke R.
4. Jadi, dari relasi-relasi yang ditetapkan di atas, yang merupakan fungsi adalah relasi $f(x) = x^2,\ x \in R$ dan $f(x) = x^3,\ x \in R$.

D. MACAM-MACAM FUNGSI

Sesuai kebutuhan, yang dibicarakan dalam mata kuliah Geometri Transformasi ini hanya terfokus pada fungsi kepada, fungsi satu-satu, dan fungsi bijektif. Sebab, hal ini diperlukan sebagai landasan dalam rangka mempelajari transformasi.

Setiap pembahasan fungsi-fungsi tersebut didahului dengan menyajikan definisi-definisi dan teorema. Kemudian, dibahas keterkaitan definisi-definisi tersebut dengan contoh-contoh soalnya.

Definisi 1.8

Misalkan f fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi ini disebut fungsi A kepada B (disingkat fungsi kepada) jika dan hanya jika setiap y $\in$ B ada x $\in$ A sehingga y = f(x).

Contoh 1.13

Dari Contoh 1.12, seperti kita ketahui, relasi f dari R ke R ditetapkan oleh rumus f(x) = x^2, $\forall$ x $\in$ R dan f(x) = x^3, $\forall$ x $\in$ R yang masing-masing merupakan fungsi.

Manakah di antara kedua fungsi tersebut yang merupakan fungsi kepada?

Penyelesaian:

Untuk fungsi f(x) = x^2, $\forall$ x $\in$ R.

Misalkan kita ambil –2 $\in$ R. Sekarang, yang menjadi permasalahannya, apakah ada x $\in$ R sehingga f(x) = –2, f(x) = x^2 berarti x^2 = –2.

Seperti kita ketahui bahwa $x^2 \geq 0$, $\forall$ x $\in$ R. Jadi, dari hubungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa tidak ada x $\in$ R sehingga $x^2 = -2$ atau dengan kata lain fungsi tersebut tidak mempunyai prapeta di R. Jadi, fungsi f dari R ke R yang ditetapkan oleh $f(x) = x^2$, $\forall$ x $\in$ R bukan fungsi kepada.

Sekarang, perhatikanlah fungsi $f(x) = x^3$, $\forall$ x $\in$ R. Ambil unsur sebarang y $\in$ R, apakah ada x $\in$ R sehingga y = f(x)? y = f(x) dan $f(x) = x^3$ maka $y = x^3$ atau $x = \sqrt[3]{y}$. Berdasarkan perhitungan dalam aljabar, tentunya Anda mengetahui bahwa hasil akar pangkat tiga dari sebarang bilangan real adalah bilangan real. Hal ini berarti bahwa setiap y $\in$ R ada x $\in$ R sehingga $y = x^3$. Jadi, fungsi f dari R ke R yang ditetapkan oleh rumus $f(x) = x^3$, $\forall$ x $\in$ R merupakan fungsi kepada.

Definisi 1.9

Misalkan f fungsi dari himpunan A ke himpunan B, fungsi ini disebut fungsi satu-satu dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap x, y $\in$ A, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 1.1

Misalkan f fungsi dari A ke B. Pernyataan $\forall$ x, y $\in$ A, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ ekuivalen dengan pernyataan: $\forall$ x, y $\in$ A jika f(x) = f(y) maka x = y.

Bukti:

1. Andaikan berlaku $\forall$ x, y $\in$ A, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ ...*). Misalkan bentuk pernyataan berikut kita abaikan dulu, yaitu jika f(x) = f(y), $\forall$ x, y $\in$ A maka x = y tidak berlaku, artinya ada x, y $\in$ A dengan f(x) = f(y) dan $x \neq y$.
   Berdasarkan *), kalau $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$. Hal ini menunjukkan terjadinya kontradiksi dengan pernyataan bahwa ada x, y $\in$ A dengan f(x) = f(y) dan $x \neq y$. Jadi, pengandaian bahwa ada x, y $\in$ A dengan f(x) = f(y) dan $x \neq y$ bernilai salah. Jadi, pernyataan $\forall$ x, y $\in$ A dengan f(x) = f(y) maka x = y bernilai benar.
2. Andaikan berlaku $\forall$ x, y $\in$ A jika f(x) = f(y) maka x = y. Kita andaikan lagi bahwa $\forall$ x, y $\in$ A, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ tidak berlaku. Artinya, $\exists$x, y $\in$ A dengan $x \neq y$ dan f(x) = f(y).
   Berdasarkan hipotesis, kita telah ketahui bahwa jika f(x) = f(y) maka x = y. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\exists$x, y $\in$ A dengan $x \neq y$ dan f(x) = f(y). Maka itu, pengandaian bahwa $\exists$x, y $\in$ A dengan $x \neq y$ maka f(x) = f(y) bernilai salah. Artinya, $\forall$x, y $\in$ A jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ bernilai benar.

Teorema 1.2 Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah satu-satu jika dan hanya jika $\forall$ x, y $\in$ A jika f(x) = f(y) maka x = y.

Bukti: Akibat langsung dari Teorema 1.1.

Contoh 1.14 Perhatikan fungsi f dari R ke R dengan R sebagai himpunan semua bilangan real yang ditetapkan oleh rumus $f(x) = x^3$, $\forall$ x $\in$ R. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi satu-satu.

Penyelesaian:
Ambil dua unsur sebarang x, y $\in$ A sehingga f(x) = f(y). Karena $f(x) = x^3$ dan $f(y) = y^3$ maka $x^3 = y^3$.

$$
\begin{aligned}
x^3 = y^3 &\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = y \text{ atau } x^2 + xy + y^2 = 0
\end{aligned}
$$

Dari bentuk $x^2 + xy + y^2 = 0$, ternyata tidak ada x, y $\in$ R sehingga $x^2 + xy + y^2 = 0$, kecuali x = y = 0. Akibatnya, $\forall$ x, y $\in$ R, jika f(x) = f(y) maka x = y. Jadi, berdasarkan Teorema 1.2, disimpulkan bahwa fungsi f dari R ke R untuk $f(x) = x^3$, $\forall$ x, y $\in$ R merupakan fungsi satu-satu.

Definisi 1.10 Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika f merupakan fungsi kepada dan fungsi satu-satu.

Contoh 1.15 Berdasarkan kajian yang telah kita lakukan dalam Contoh 1.13 dan Contoh 1.14, tentunya Anda dapat menyimpulkan bahwa fungsi f dari R ke R (R himpunan semua bilangan real) yang ditetapkan rumus $f(x) = x^3$ adalah fungsi kepada dan fungsi satu-satu. Oleh sebab itu, f merupakan fungsi bijektif.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan R relasi dari P = {1,2,3,4} ke Q = {1,3,5} yang ditetapkan oleh P(x,y) = $x < y$. Tentukan:
   a) R
   b) Domain dan Range dari R
   c) R^{-1}
   d) Domain dan range dari R^{-1}

2) Misalkan A = {1,2,3}. Perhatikan relasi-relasi pada A berikut ini.
   R_1 = {(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)}
   R_2 = {(1,1)}
   R_3 = {(1,2)}
   Selidikilah apakah relasi R_1, R_2, dan R_3 termasuk relasi refleksi, simetri, atau transitif?

3) Buktikan bahwa setiap relasi transitif R pada suatu himpunan maka relasi balikan R^{-1} juga merupakan relasi transitif pada himpunan itu!

4) Buktikan bahwa relasi-relasi berikut merupakan relasi ekuivalen.
   a) "≤" (lebih kecil atau sama dengan) pada himpunan semua bilangan real R.
   b) "≡" Kongruen modulo n pada himpunan semua bilangan bulat B ($a \equiv b \bmod n$, $n > 0$ jika dan hanya jika $a - b$ habis dibagi n).
   c) Kesejajaran (//) pada himpunan semua garis.
   d) Kekongruenan (≅) pada himpunan semua segitiga.
   e) Kekongruenan (≅) pada himpunan semua sudut.

5) Manakah di antara relasi f dari R ke R di bawah ini (R himpunan semua bilangan real) yang merupakan fungsi.
   a) $f(x,y) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$, $\forall x \in R$
   c) $f(x) = 2x - 1$, $\forall x \in R$

6) Manakah di antara fungsi f dari B ke B di bawah ini (B himpunan semua bilangan bulat), yang merupakan fungsi bijektif.
   a) $f(x) = 2x - 1, \forall x \in B$
   b) $f(x) = 1 - x, \forall x \in B$
   c) $f(x) = x^2 + x, \forall x \in B$

7) Manakah di antara fungsi f dari R ke R di bawah ini (R himpunan semua bilangan real) yang merupakan fungsi bijektif.
   a) $f(x) = ax - 1, a \in R, \forall x \in R$
   b) $f(x) = x + b, b \in R, \forall x \in R$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $R = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)\}$
   b) Domain dari R adalah $D_R = \{1,2,3,4\} = P$, Range dari R adalah $R_R = \{3,5\}$.
   c) $R^{-1} = \{(3,1), (5,1), (3,2), (5,2), (5,3), (5,4)\}$
   d) $D_{R-1} = R_R$ dan $R_{R-1} = D_R$

2) $A = \{1,2,3\}$ untuk $R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}$
   Karena setiap $x \in A$ maka $(x, x) \in R_1$ maka R_1 relasi refleksi.
   Karena $(2,1) \in R_1$, tetapi $(1,2) \notin R_1$, maka R_1 bukan relasi simetri.
   Karena $(3,2), (2,1) \in R_1$, tetapi $(3,1) \notin R_1$, maka R_1 bukan relasi transitif.
   Untuk $R_2 = \{(1,1)\}$
   Karena $2 \in A$ dan $(2,2) \notin R_2$ maka R_2 bukan relasi refleksi.
   Karena setiap $(x,y) \in R_2$ maka $(y,x) \in R_2$, yaitu $(1,1) \in R_2$. Jadi, relasi R_2 suatu relasi simetri.
   Karena setiap $(x,y) \in R_2$ dan $(y,z) \in R_2$ maka $(x,z) \in R_2$. Di sini, $x = y = z = 1$ sehingga $(1,1) \in R_2$. Jadi, relasi R_2 suatu relasi simetri.
   Untuk $R_3 = \{(1,2)\}$
   Karena $1 \in A$ dan $(1,1) \notin R_3$ maka R_3 bukan relasi refleksi.
   Karena $(1,2) \in R_3$ dan $(2,1) \notin R_3$ maka R_3 bukan relasi simetri.
   Suatu relasi disebut relasi transitif apabila setiap $(x,y), (y,z) \in R$ berlaku $(x, z) \in R$. Jadi, untuk kasus R_3, relasi tersebut bukan relasi transitif.

3) Ambil himpunan sebarang A dan relasi transitif R. Artinya, untuk setiap (x,y) dan (y,z) $\in$ R, berlaku (x,z) $\in$ R dengan x,y,z $\in$ A. Karena R^{-1} = {(a,b)|(b,a) $\in$ R}, serta (x,y), (y,z) dan (x,z) $\in$ R maka (y,x), (z,y) dan (z,x) $\in R^{-1}$. Sehingga, untuk setiap (z,y), (y,x) $\in R^{-1}$ berlaku (z,x) $\in R^{-1}$ dengan x,y,z $\in$ A. Jadi, R^{-1} relasi transitif.

4) a) Ambil sebarang unsur x $\in$ R dan tentunya Anda telah mengetahui bahwa x $\leq$ x bernilai benar maka (x,x) $\in$ "$\leq$", $\forall$ x $\in$ R. Jadi, relasi "$\leq$" adalah relasi refleksi. Ambil dua unsur, yaitu 2 dan 3 $\in$ R, maka (2,3) $\in$ "$\leq$", tetapi (3,2) $\notin$ "$\leq$". Jadi, "$\leq$" bukan relasi simetri. Dengan demikian, relasi "$\leq$" bukan relasi ekuivalen.

   b) Ambil sebarang unsur a $\in$ R maka (a, a) $\in$ "$\equiv$" sebab a – a = 0 dan $n > 0$, sedangkan 0 habis dibagi n. Jadi, "$\equiv$" relasi refleksi.
   Ambil dua unsur sebarang a,b $\in$ R sehingga (a,b) $\in$ "$\equiv$". Artinya, a – b habis dibagi n atau a – b = kn dengan k suatu bilangan bulat. Karena –a + b = $-kn$ dan $-k$ suatu bilangan bulat maka b – a habis dibagi n sehingga (b, a) $\in$ "$\equiv$". Jadi, "$\equiv$" relasi simetri. Ambil tiga unsur a, b, dan c $\in$ R. Jika (a,b) $\in$ "$\equiv$" dan (b,c) $\in$ "$\equiv$" maka a – b = kn dengan k bilangan bulat
   b – c = ln dengan l bilangan bulat, berakibat
   $(a - b) + (b - c) = kn + ln$
   $a - c = (k + l)\, n$
   karena k bilangan bulat dan l bilangan bulat maka $(k + l)$ bilangan bulat berakibat $a \equiv c \pmod{n}$ atau (a,c) $\in$ "$\equiv$". Jadi, relasi "$\equiv$" adalah relasi transitif. Jadi, "$\equiv$" relasi ekuivalen.

   c) Karena setiap garis l sejajar dengan dirinya sendiri maka relasi kesejajaran (//) merupakan relasi refleksi. Karena l // m dan m // l maka relasi kesejajaran (//) merupakan relasi simetri.
   Karena setiap l // m dan m // n berakibat l // n maka relasi kesejajaran merupakan relasi transitif. Jadi, relasi kesejajaran merupakan relasi ekuivalen.

   d) Karena setiap segitiga kongruen dengan dirinya sendiri maka relasi kekongruenan merupakan relasi refleksi.

Karena setiap Δ ABC $\cong$ Δ DEF, dan Δ DEF $\cong$ Δ ABC maka relasi kekongruenan merupakan relasi simetri.

Karena setiap Δ ABC $\cong$ Δ DEF dan Δ DEF $\cong$ GHI berakibat Δ ABC $\cong$ Δ GHI maka relasi kekongruenan merupakan relasi transitif. Secara keseluruhan, dapatlah dikatakan bahwa relasi kekongruenan merupakan relasi yang ekuivalen.

e) Alasannya serupa dengan d), tinggal mengganti Δ dengan $\angle$. Maka, relasi kekongruenan pada himpunan semua sudut juga merupakan relasi ekuivalen.

5) a) Misalkan kita tentukan satu bilangan 4 $\in$ R dan tentunya jika (4,y) $\in$ f(x,y) maka 16 + y^2 = 1. Jadi, $y = \sqrt{1-16} = \sqrt{-15} \in R$. Akibatnya, 4 $\in$ R relasi ini tidak mempunyai peta anggota R. Jadi, relasi f ini bukan fungsi dari R ke R.

b) Bentuk $x^2 - x - 2$ dapat difaktorkan menjadi (x – 2)(x + 1). Perhatikan x = 2 $\in$ R. Maka, hasil dari f(2) = $\dfrac{1}{(2-2)(2+1)} = \dfrac{1}{0}$ tak terdefinisi. Artinya, 2 $\in$ R tidak mempunyai peta di R. Oleh karena itu, relasi f bukan merupakan fungsi dari R ke R.

c) Untuk setiap x $\in$ R, 2x $\in$ R, dan 2x – 1 $\in$ R, setiap x $\in$ R mempunyai peta, yaitu 2x – 1 $\in$ R. Berarti, untuk setiap x $\in$ R, 2x tunggal dan 2x – 1 juga tunggal. Jadi, relasi f ini merupakan suatu fungsi dari R ke R.

6) a) Untuk y = 2 $\in$ B. Dari bentuk y = f(x) = 2x – 1, didapat x = $\dfrac{3}{2} \notin$ B. Jadi, 2 $\in$ B tidak mempunyai prapeta di B oleh fungsi f ini. Maka itu, fungsi f ini bukan fungsi kepada. Akibatnya, fungsi f ini bukan fungsi bijektif.

b) Untuk setiap y $\in$ B. Dari bentuk y = f(x) = 1 – x, didapat x = 1 – y $\in$ B. Jadi, setiap y $\in$ B mempunyai prapeta 1 – y $\in$ B. Berarti, fungsi ini merupakan fungsi kepada. Sekarang, ambil dua unsur sebarang x,y $\in$ B dengan f(x) = f(y). Didapat 1 – x = 1 – y

=> x = y. Dari kenyataan tersebut, fungsi ini merupakan fungsi satu-satu. Jadi, fungsi f ini merupakan fungsi bijektif.

c) Ambil $y = 1 \in B$. Dari bentuk $y = f(x)$, didapat $1 = x^2 + x$ atau $x^2 + x - 1 = 0$. Karena diskriminan persamaan kuadrat tersebut $D = 1 + 4 = 5$ bukan bilangan kuadrat maka x yang memenuhi $x^2 + x - 1 = 0$ bukan suatu bilangan bulat. Jadi, $1 \in B$ tidak mempunyai prapeta di B oleh fungsi f. Maka itu, fungsi f ini bukan fungsi kepada. Akibatnya, fungsi f ini bukan fungsi bijektif.

7) a) Tinjauan kasus: jika $a = 0$ maka $f(x) = -1$. Seandainya kita tentukan $y = 2 \in R$, berarti tidak ada x sehingga $f(x) = 2$ sebab $f(x) = -1$, $\forall\, x \in R$. Jadi, f bukan fungsi kepada. Akibatnya, fungsi ini tidak bijektif untuk $a = 0$.
Tinjauan kasus: jika $a \neq 0$, ambil sebarang unsur $y \in R$ sehingga $y = f(x) = ax - 1$. Dari bentuk ini, didapat $x = \frac{y+1}{a}$. Karena, setiap $y \in R$ ada $x \in R$, yaitu $\frac{y+1}{a}$, maka fungsi f ini merupakan fungsi kepada.
Sekarang, ambil x,y sebarang bilangan real dengan $f(x) = f(y)$. Akibatnya, diperoleh $ax - 1 = ay - 1 \Rightarrow a(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ sebab $a \neq 0$. Maka dari itu, $x = y$ sehingga fungsi ini merupakan fungsi satu-satu. Jadi, f ini fungsi bijektif.
Dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa jika $a = 0$ maka fungsi $f(x) = ax - 1$ bukan fungsi bijektif dari R ke R. Jika $a \neq 0$ maka fungsi $f(x) = ax - 1$ merupakan fungsi bijektif dari R ke R.

b) Ambil sebarang unsur $y \in R$ sehingga dari bentuk $f(x) = y$ didapatlah $x = y - b$. Jadi, untuk setiap $y \in R$, didapat $x = y - b \in R$. Berarti, fungsi ini merupakan fungsi kepada.
Jika kita ambil dua unsur sebarang $x,y \in R$ dengan $f(x) = f(y)$, didapat $x + b = y + b \Rightarrow x = y$. Jadi, fungsi f ini merupakan fungsi satu-satu. Akibatnya, fungsi ini juga disebut sebagai fungsi bijektif.

RANGKUMAN

1. Relasi R dari himpunan A ke B mempunyai suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ ke $b \in B$ dan R(a,b) berarti benar.
2. Relasi ekuivalen adalah
   a. relasi refleksi;
   b. relasi simetri;
   c. relasi transitif.
3. Setiap relasi R dari himpunan A ke B mempunyai relasi balikan (invers), yaitu $R^{-1} = \{(a,b)|(b,a) \in R\}$.
4. Relasi f dari himpunan A ke B disebut fungsi jika dan hanya jika setiap $x \in A$ ada tunggal $y \in B$ sehingga f(x) = y.
5. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi kepada jika dan hanya jika setiap unsur $y \in A$ ada $x \in A$ sehingga f(x) = y.
6. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $x,y \in A$ dengan $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ atau untuk setiap $x,y \in A$ menjadi f(x) = f(y) maka x = y.
7. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika f merupakan fungsi kepada dan fungsi satu-satu.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diberikan A = {1,2,3,4} dan B = {2,3,5}. Relasi R di bawah ini yang merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah ....
   A. {(2,3), (3,2), (5,2)}
   B. {(2,3), (3,1), (4,5)}
   C. {(2,3), (3,2), (2,5)}
   D. {(2,3), (2,2), (5,5)}

2) Diberikan A = himpunan semua bilangan asli, $R = \{(x,y)|x,y \in A$, dan $2x + y = 10\}$. Domain dan Range dari relasi R adalah ....
   A. Domain = {(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)}, Range = {8,6,4,2}
   B. Domain = {1,2,3,4}, Range = {8,6,4,2}
   C. Domain = {(8,1), (6,2), (4,3), (2,4)}, Range = {1,2,3,4}
   D. Domain = {2,4,6,8}, Range = {1,2,3,4}

3) Diberikan A = {2,4,6,8}. Relasi pada A yang merupakan relasi refleksi adalah ...
   A. {(2,2), (2,4), (2,6), (4,6), (6,8), (8,2), (8,4)}
   B. {(2,2), (2,4), (2,6), (4,6), (6,8), (8,2), (8,8)}
   C. {(2,4), (4,4), (2,6), (4,6), (6,6), (6,8), (8,8)}
   D. {(2,2), (2,4), (4,4), (2,6), (6,6), (6,8), (8,8)}

4) Diberikan B = {1,2,3}. Relasi pada B yang merupakan relasi simetri adalah ....
   A. {(1,1), (2,2)}
   B. {(1,2), (2,3), (2,1)}
   C. {(1,1), (3,2)}
   D. {(2,2), (1,2), (2,1), (1,3)}

5) Diberikan C = {a,b,c,d}. Relasi pada C yang merupakan relasi transitif adalah ....
   A. {(a,a), (c,c), (d,d)}
   B. {(a,b), (b,c), (c,d), (a,c)}
   C. {(b,c), (d,c), (c,a), (b,d)}
   D. {(d,c), (c,c), (d,e), (c,a), (b,d), (d,a)}

6) Diberikan A = {3,4,5}. Di antara relasi-relasi di bawah ini yang merupakan relasi ekuivalen pada A adalah ....
   A. {(3,3), (3,1), (1,3), (5,5)}
   B. {(3,1), (1,4), (3,4), (3,3), (4,4), (5,5)}
   C. {(3,3), (4,4), (5,5)}
   D. {(3,3), (4,4), (3,4), (5,5), (4,5)}

7) Diberikan R = himpunan semua bilangan real. Relasi-relasi f di bawah ini yang merupakan fungsi pada R adalah ....
   A. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$
   B. $f(x,y) = \{(x,y)|2x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$
   C. $f(x,y) = \{(x, y)|\ xy = 1\}$
   D. $f(x) = x - 2$

8) Diberikan B = himpunan bilangan bulat. Di antara fungsi-fungsi f di bawah ini yang merupakan fungsi dari B kepada B adalah ....
   A. $f(x) = 3x - 1$
   B. $f(x) = x + 4$

C. $f(x) = x^2 + x$
D. $f(x) = x^2$

9) Diberikan R = himpunan bilangan real. Di antara fungsi-fungsi f di bawah ini yang merupakan fungsi satu-satu dari R ke R adalah ....
A. $f(x) = -x^2$
B. $f(x) = x^2 + 1$
C. $f(x) = 4x - 2$
D. $f(x) = x^4$

10) Diberikan R = himpunan bilangan real. Di antara fungsi-fungsi f di bawah ini yang merupakan fungsi bijektif dari R ke R adalah ...
A. $f(x) = 3x^2$
B. $f(x) = x^3 - x$
C. $f(x) = -4x^2 + x$
D. $f(x) = x^3$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Transformasi

A. PENGERTIAN TRANSFORMASI

Tentunya, Anda masih ingat bahwa pengertian transformasi yang dibahas dalam mata kuliah Geometri Analitik hanyalah translasi (penggeseran) sumbu yang sejajar atau rotasi sumbu dengan pusat sumbu koordinat. Sekarang, timbul pertanyaan, apakah yang akan Anda pelajari dalam modul ini hanya yang seperti itu? Pertanyaan ini dapat dijawab apabila Anda telah memahami pengertian transformasi yang ditetapkan dalam definisi berikut.

Definisi 1.11 Misalkan V bidang Euclides. Fungsi T dari V ke V disebut suatu transformasi jika dan hanya jika T sebuah fungsi bijektif.

Untuk lebih memantapkan pengertian yang Anda simak dari definisi di atas, pelajarilah dua contoh berikut ini.

Contoh 1.16 Misalkan V bidang Euclides dan A sebuah titik tertentu pada V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut.

i) T(P) = A, jika P = A
ii) Jika P $\in$ V dan P $\neq$ A, T(P) = Q dengan Q merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$.

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Penyelesaian:

Karena yang harus diteliti relasi T sehubungan dengan suatu transformasi, berdasarkan Definisi 1.11, diperoleh persyaratan suatu transformasi, yaitu

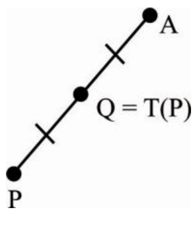
1. T suatu fungsi dari V ke V
2. T suatu fungsi bijektif.

Dari Definisi 1.10, diperoleh persyaratan bahwa suatu fungsi bijektif adalah
1. fungsi tersebut harus merupakan fungsi kepada
2. fungsi tersebut harus merupakan fungsi satu-satu.

Jadi, dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa yang harus Anda lakukan adalah penelitian tentang relasi T yang memenuhi hal-hal berikut.
1. T fungsi dari V ke V
2. T fungsi bijektif, yakni
   a. T fungsi kepada
   b. T fungsi satu-satu.

Sekarang, perhatikanlah bagaimana caranya menjabarkan jawaban soal Contoh 1.16 tersebut.

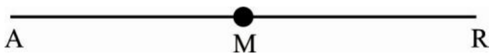
1. Akan ditunjukkan bahwa T fungsi dari V ke V.
   Artinya, harus dijelaskan bahwa setiap unsur V mempunyai peta dari V juga. Untuk hal itu, ambil sebarang titik P $\in V$. Karena sudah ada satu titik tertentu A $\in V$ maka terdapat dua kasus, yaitu P = A atau P $\neq$ A.
   Untuk P = A, berdasarkan ketentuan di atas, ada titik A $\in V$ (tunggal) yang merupakan peta dari P sehingga A = T(P).
   Untuk P $\neq$ A, berdasarkan geometri, ada $\overline{AP} \in V$ (tunggal) dan setiap $\overline{AP}$ mempunyai titik tengah Q (tunggal). Karena Q $\in \overline{AP}$ dan $\overline{AP} \in V$ maka Q $\in V$. Jadi, untuk P $\neq$ A, ada Q $\in V$ sehingga T(P) = Q dan Q titik tengah $\overline{AP}$.



Gambar 1.3

Karena setiap P $\in V$ ada T (P) $\in V$ yang tunggal maka T merupakan fungsi dari V ke V.

2. Akan ditunjukkan bahwa T fungsi bijektif.
   a) T fungsi kepada
      Ambil sebarang titik R $\in$ *V*. Karena di *V* sudah ada satu titik A maka keadaan R dan A ada dua kasus, yaitu R = A dan R $\neq$ A.
      Untuk R = A, berdasarkan ketentuan T bagian pertama, R mempunyai prapeta, yaitu A sendiri.
      Untuk R $\neq$ A, berdasarkan geometri Eucledes, ada $\overline{AR}$ dan setiap ruas garis $\overline{AR}$ selalu mempunyai titik tengah, misalkan M. Jadi, M prapeta dari R. Akibatnya, untuk R $\neq$ A, ada M $\in$ *V* sehingga T(M) = R dan M titik tengah $\overline{AR}$.



Gambar 1.4

      Karena setiap R $\in$ *V* mempunyai prapeta oleh fungsi T maka T merupakan suatu fungsi kepada.

   b) Ambil dua titik sebarang, misalnya P dan Q $\in$ *V* sehingga T(P) = T(Q). Dari keadaan ini, terdapat kasus, yaitu P = A, Q = A, P $\neq$ A, dan Q $\neq$ A.
      Untuk P = A, T(P) = P = A. Sementara itu, T(P) = T(Q) berarti T(Q) = A. Jadi, Q = A dan P = Q.
      Untuk Q = A, T(Q) = Q = A. Telah diketahui bahwa T(P) = T(Q) maka T(P) = A. Jadi, P = A dan P = Q.

      Untuk P $\neq$ A dan Q $\neq$ A. Misalkan T(P) = P′ dan T(Q) = Q′ maka P′ $\in$ $\overline{PA}$ dan Q′ $\in$ $\overline{QA}$. Karena P′ $\in$ $\overline{PA}$ maka $\overline{PA} = \overline{AP'}$. Karena Q′ $\in$ $\overline{QA}$ maka $\overline{QA} = \overline{AQ'}$. Karena T(P) = T(Q) berarti P′ = Q′ dan $\overline{AP'} = \overline{AQ'}$. Dengan demikian, $\overline{PA} = \overline{QA}$. Jadi A, P, dan Q kolinear.
      Karena A, P, dan Q kolinear. Sementara itu, P′ = Q′ dengan P′ titik tengah $\overline{PA}$ dan Q′ titik tengah $\overline{AQ}$ maka P = Q.

Jadi, setiap P, Q $\in$ *V*, T(P) = T(Q) mendapatkan P = Q. Dengan demikian, T dikatakan sebagai fungsi satu-satu. Karena T fungsi kepada dan fungsi satu-satu maka T merupakan fungsi bijektif. Dengan demikian, dapatlah kita katakan bahwa T merupakan suatu transformasi.

Contoh 1.17 Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari r dan pusat titik A pada bidang Euclides.
Ditetapkan relasi T sebagai berikut.
Untuk setiap $P \in V$, T (P) = Q sehingga AP . AQ = r^2.
Apakah T suatu transformasi?

Penyelesaian:
Agar sampai kepada pemecahan yang benar, Anda harus melakukannya seperti Contoh 1.16. Artinya, Anda harus menyelidiki fungsi tersebut ke arah persyaratannya, yaitu

1. T suatu fungsi dari *V* ke *V*
2. T suatu fungsi bijektif.
   a. suatu fungsi kepada
   b. suatu fungsi satu-satu.

Sekarang, perhatikan lagi bagaimana caranya menjawab soal tersebut.

1. T suatu fungsi dari *V* ke *V*.
   Ambil sebarang titik P. Kedudukan P terhadap lingkaran dan titik pusatnya memiliki empat kemungkinan, yaitu P = A, $P \neq A$ tetapi di dalam lingkaran, P pada lingkaran dan P di luar lingkaran.
   Untuk P = A, misalnya Q = T (P = A) $\Rightarrow$ AA . AQ = r^2 $\Rightarrow$ 0 . AQ = r^2 $\Rightarrow$ AQ = $\frac{r^2}{0}$, hasilnya tak didefinisikan. Artinya, tak ada Q sehingga AA . AQ = r^2. Hal ini berakibat bahwa apabila P = A, tak ada $Q \in V$ sehingga AP . AQ = r^2. Jadi, T bukan fungsi dari *V* ke *V*.
   Karena salah satu syarat (syarat pertama) dari suatu transformasi sudah tidak dipenuhi, dapatlah disimpulkan bahwa T bukan suatu transformasi.
   Sekarang, timbul pertanyaan, setelah Anda mempelajari Contoh 1.17, mungkinkah T seperti ini bisa diatur sehingga menjadi suatu transformasi? Dengan kata lain, syarat apa yang harus diberikan agar T ini merupakan suatu transformasi. Masalah ini diberikan sebagai tugas latihan.

Kembali ke pertanyaan awal pembicaraan pada pengertian transformasi. Apakah Anda sudah dapat menjawab pertanyaan awal Anda itu? Apabila belum dapat menjawab, tidak menjadi masalah besar. Namun, setelah selesai Kegiatan Belajar 2 ini, Anda diharapkan dapat menjawabnya. Untuk itu, kita lanjutkan saja dengan mempelajari komposisi transformasi.

B. KOMPOSISI TRANSFORMASI

Adapun komposisi transformasi yang dibicarakan dalam modul ini dituangkan dalam definisi berikut.

Definisi 1.12

Andaikan diberikan dua transformasi T_1 dan T_2, komposisi dari T_1 dan T_2 yang ditulis dengan notasi $T_1 \circ T_2$ ditetapkan sebagai:
$(T_1 \circ T_2)(P) = T_1[T_2(P)], \forall P \in V$.

Berdasarkan definisi di atas, terlihat komposisi dari dua transformasi T_1 dan T_2 yang ditulis dengan $T_1 \circ T_2$ mempunyai arti bahwa transformasi T_2 dioperasikan terlebih dahulu. Kemudian, diikuti oleh transformasi T_1. Dengan demikian, jika Anda menemukan bentuk transformasi $T_2 \circ T_1$, berarti Anda harus melakukan transformasi T_1 terlebih dahulu yang diikuti oleh transformasi T_2.

Sekarang, timbul pertanyaan, apakah selalu dapat disusun kedua macam komposisi $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$ apabila masing-masing komposisi itu merupakan suatu transformasi? Jawabnya, selalu ada sebab $T_1 \cap T_2 = V$. Karena T_1 transformasi, daerah asal (kodomain)nya merupakan bidang V. Begitu pula daerah asal dan range dari T_2 yang seluruhnya merupakan bidang V sebab T_2 juga transformasi.

Kemudian, muncul pertanyaan lagi, apakah komposisi dua transformasi ini merupakan suatu transformasi lagi? Untuk menjawab hal ini, pelajari sifat yang dituangkan dalam teorema berikut ini.

Teorema 1.3

Apabila diberikan dua transformasi T_1 dan T_2, komposisi dari T_1 dan T_2 merupakan suatu transformasi. (Teorema ini disebut pula **teorema ketertutupan transformasi**).

Bukti:
Komposisi dari T_1 dan T_2 ada dua macam, yaitu $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$. Namun, pada prinsipnya, pembuktiannya sama saja. Dengan demikian, dalam modul ini, akan ditunjukkan satu saja, yaitu $T_1 \circ T_2$.

Untuk membuktikan transformasi ini, yang harus ditunjukkan adalah
1. $T_1 \circ T_2$ fungsi dari *V* ke *V*
2. $T_1 \circ T_2$ fungsi bijektif, yaitu
   a. $T_1 \circ T_2$ fungsi kepada
   b. $T_1 \circ T_2$ fungsi satu-satu.

1. Ditunjukkan $T_1 \circ T_2$ fungsi dari *V* ke *V*

Karena T_2 suatu transformasi maka T_2 merupakan fungsi dari *V* ke *V* sehingga daerah asal dari $T_1 \circ T_2$ sama dengan daerah asal T_2 (simak arti komposisi $T_1 \circ T_2$). Sekarang, ambil sebarang unsur $X \in V$. Karena T_2 transformasi, berarti ada $Y \in V$ sehingga $T_2(X) = Y$. Seperti kita ketahui bahwa T_1 merupakan transformasi, berarti ada $Z \in V$ sehingga $T_1(Y) = Z$. Berdasarkan informasi ini, diperoleh keadaan $Z = T_1(Y)$, $Y = T_2(X) \Leftrightarrow Z = T_1 [T_2(X)] = (T_1 \circ T_2)(X)$. Oleh karena itu, $\forall\ X \in V$ nilai dari $(T_1 \circ T_2)$ (X) adalah $Z \in V$. Akibatnya, transformasi ini dikatakan sebagai fungsi dari *V* ke *V*.

2. Ditunjukkan $T_1 \circ T_2$ fungsi bijektif

a. $T_1 \circ T_2$ fungsi kepada.

Ambil $Z \in V$. Karena T_1 transformasi maka T_1 fungsi kepada. Akibatnya, ada $Y \in V$ sehingga $T_1(Y) = Z$. Kemudian, karena T_2 juga transformasi maka T_2 juga fungsi kepada. Akibatnya, untuk $Y \in V$, ada $X \in V$ sehingga T_2 (X) = Y. Jadi, untuk sebarang $Z \in V$, ada $X \in V$ sehingga $Z = T_1(Y) = T_1[T_2(X)] = (T_1 \circ T_2)(X)$. Maka dari itu, setiap unsur dari *V* mempunyai prapeta oleh $T_1 \circ T_2$. Akibatnya, $T_1 \circ T_2$ suatu fungsi kepada.

b. $T_1 \circ T_2$ fungsi satu-satu.

Ambil X, Y sebarang unsur pada *V* sehingga $(T_1 \circ T_2)(X) = (T_1 \circ T_2)(Y)$. Karena $(T_1 \circ T_2)(X) = (T_1 \circ T_2)(Y)$ maka $T_1 [T_2(X)] = T_1 [T_2(y)]$. Kita telah ketahui bahwa T_1 transformasi maka T_1 fungsi satu-satu dan $T_1 [T_2(X)] = T_1 [T_2 (Y)]$. Dari hubungan ini, didapat $T_2(X) = T_2(Y)$.

Karena T_2 transformasi maka T_2 fungsi satu-satu dan $T_2(X) = T_2(Y)$ berakibat X = Y. Untuk sebarang X,Y $\in$ *V*, jika $(T_1 \circ T_2)(X) = (T_1 \circ T_2)(Y)$ berakibat X = Y, $T_1 \circ T_2$ merupakan fungsi satu-satu.

Dari a) dan b), disimpulkan $T_1 \circ T_2$ suatu fungsi bijektif.
Jadi, kesimpulan uraian di atas: karena $T_1 \circ T_2$ fungsi dari *V* ke *V* dan $T_1 \circ T_2$ fungsi bijektif maka $T_1 \circ T_2$ suatu transformasi.

Teorema di atas dinyatakan lengkap apabila Anda telah membuktikan bahwa $T_2 \circ T_1$ juga suatu transformasi (lihat latihan).

Setelah Anda mempelajari Teorema 1.3 di atas, timbul pertanyaan lagi, apakah $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$? Artinya, apakah pada komposisi transformasi berlaku sifat komutatif? Untuk melihat keberlakuan sifat tersebut, pelajari contoh berikut ini.

Contoh 1.18 Ambil transformasi T_1 yang ditetapkan sebagai berikut (lihat contoh 1.16). Misalkan *V* bidang Euclides, sedangkan A suatu titik tertentu.
T_1 ditetapkan untuk setiap P $\in$ *V*,
1.1 jika P = A, $T_1(P) = A$
1.2 jika P $\neq$ A, $T_1(P) = P'$ dengan P′ titik tengah $\overline{AP}$.
Selanjutnya, kita ambil relasi T_2 yang ditetapkan sebagai berikut, misalnya *V* bidang Euclides dan g suatu garis tertentu. Untuk setiap P $\in$ *V*
2.1 jika P $\in$ g, $T_2(P) = P$
2.2 jika P $\notin$ g, $T_2(P) = P'$ dengan P′ titik tengah ruas garis tegak lurus dari P ke g.
Selidiki:
a) apakah T_2 suatu transformasi?
b) apakah $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?

Penyelesaian:
1. Ditunjukkan bahwa
   a. T_2 fungsi dari *V* ke *V*

b. T_2 fungsi bijektif:
   1) T_2 fungsi kepada
   2) T_2 fungsi satu-satu.

Coba Anda pelajari dan pahami uraian berikut.

a. T_2 fungsi dari *V* ke *V*

Berdasarkan 2.1, $\forall$ X $\in$ *V* dan X $\in$ g maka X tunggal dari X oleh T_2. Berdasarkan 2.2, $\forall$ X $\in$ *V* dan X $\notin$ g, ada tunggal garis tegak lurus kepada g melalui X. Hal ini mengakibatkan tunggalnya titik tengah ruas garis tegak lurus dari X ke g. Jadi, untuk X $\in$ *V* dan X $\notin$ g, ada tunggal peta anggota *V* yang memenuhi 2.2. Jadi, T_2 suatu fungsi dari *V* ke *V*.

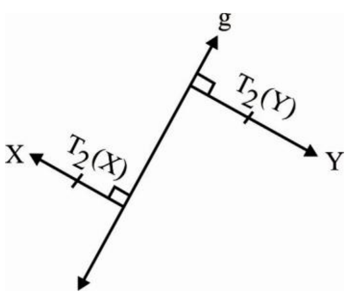
b. T_2 fungsi bijektif

1) T_2 fungsi kepada

Ambil sebarang Y $\in$ *V*. Apabila Y $\in$ g, ada prapeta Y oleh T_2. Apabila Y $\notin$ g, ada tunggal garis *l* yang tegak lurus g melalui Y. Misalnya, {N} = g $\cap$ *l*. Akibatnya, ada garis $\overleftrightarrow{NY}$. Hal ini mengakibatkan ada ruas garis $\overline{NX}$ sehingga Y $\in$ $\overline{NX}$ dan $\overline{YN} = \overline{XY}$. Dari uraian ini, ada X sehingga $\overleftrightarrow{YX} \perp$ g dan Y = T(X). Jadi, T_2 fungsi kepada.

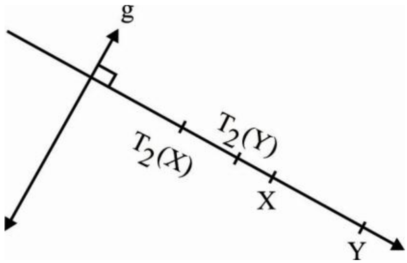
2) T_2 fungsi satu-satu

Ambil dua titik sebarang X, Y $\in$ *V* sehingga X $\neq$ Y. Untuk X, Y pada sisi yang berbeda oleh garis g, T_2 (X) $\neq$ T_2 (Y) sebab T_2 (X) dan T_2 (Y) terletak pada sisi yang berbeda oleh garis g. Lihat Gambar 1.5.



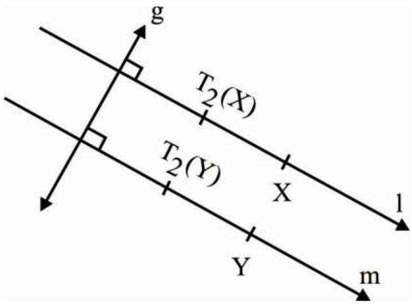
Gambar 1.5

Untuk X, Y pada sisi yang sama dengan g, dengan $\overleftrightarrow{XY} \perp$ g. Karena $\overleftrightarrow{XY} \perp$ g maka jarak dari X ke g dengan jarak dari Y ke g berbeda. Akibatnya, $T_2(X) \neq T_2(Y)$ sebab jarak dari $T_2(X)$ ke g separuh jarak dari X ke g. Sementara itu, jarak dari T_2 (Y) ke g separuh jarak dari Y ke g. Perhatikan Gambar 1.6.



Gambar 1.6

Untuk X, Y pada sisi yang sama oleh g, $\overleftrightarrow{XY}$ tidak tegak lurus g. Hal ini berakibat ada garis *l* melalui X tegak lurus g dan garis m melalui Y tegak lurus g, g // *l*. Karena $T_2(X) \in l$, $T_2(Y) \in$ m, dan *l* // m maka $T_2(X) \neq T_2(Y)$. Perhatikan Gambar 1.7. Jadi, T_2 fungsi satu-satu.



Gambar 1.7

Karena T_2 fungsi kepada dan satu-satu, T_2 pun suatu fungsi bijektif. Dengan demikian, T_2 merupakan fungsi dari *V* kepada *V* dan bijektif sehingga T_2 disebut sebagai suatu transformasi.

2. Ambil sumbu x sebagai garis g dan sumbu y sebagai garis yang melalui titik A tegak lurus garis g. Akibatnya, titik A dapat dimisalkan berkoordinat (0, b). Ambil sebarang titik P(x, y) $\in V$, didapat

$$T_1(P)=\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\ b+y\right) \text{ merupakan titik tengah AP, } \forall P\ (x, y)\in V.$$

$$T_2(P)=\left(x, \frac{1}{2}y\right), \forall P\ (x, y)\in V.$$

Pandang

$$T_1 \circ T_2\ \ P\ =\ T_1\ \left[T_2\ \ P\ \right]\ =\ T_1\ \left(x,\ \frac{1}{2}y\right)\ =\left(\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}\left(b\ +\ \frac{1}{2}y\right)\right)$$

$$\left(T_2 \circ T_1\right)(P)\ =\ T_2\left[T_1(P)\right]\ = T_2\left(\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}(b\ +\ y)\right)=\left(\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{4}(b+y)\right).$$

Jadi, $(T_1 \circ T_2)(P) \neq (T_2 \circ T_1)(P)$, $\forall$ $P(x, y) \in V$.
Maka itu, $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$. Akibat dari contoh ini, dapat ditarik kesimpulan bahwa pada komposisi transformasi tidak berlaku sifat komutatif.

Teorema 1.4 Komposisi transformasi bersifat asosiatif.

Bukti:
Ambil tiga transformasi sebarang T_1, T_2, dan T_3. Misalkan, A titik sebarang pada bidang Euclides.

$$\begin{aligned}[(T_1 \circ T_2) \circ T_3]\ (A) &= (T_1 \circ T_2)[T_3\ (A)]\\ &= T_1\ [T_2\ \{T_3(A)\}]\\ &= T_1\ [(T_2 \circ T_3)(A)]\\ &= [T_1 \circ (T_2 \circ T_3)(A)],\ \forall\ A \in V.\end{aligned}$$

Jadi, $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$.
Dengan kata lain, komposisi transformasi bersifat asosiatif.

C. TRANSFORMASI BALIKAN (INVERS)

Apabila Anda akan mempelajari transformasi balikan (*invers*), Anda harus mempelajari dahulu apa yang disebut dengan transformasi identitas yang dinotasikan oleh ε (dibaca “epsilon”) serta sifatnya.

Adapun ketentuan transformasi identitas dan sifatnya dituangkan pada definisi dan teorema berikut ini.

Definisi 1.13 Suatu transformasi ε disebut transformasi identitas jika dan hanya jika setiap $P \in V$ berlaku $\varepsilon(P) = P$.

Teorema 1.5 Jika T suatu transformasi dan ε suatu transformasi identitas, berlaku $T \circ \varepsilon = \varepsilon \circ T = T$.

Bukti: Ambillah sebarang titik $P \in V$. Karena

$(T \circ \varepsilon)(P) = T[\varepsilon(P)] = T(P)$

$(\varepsilon \circ T)(P) = \varepsilon \circ [T(P)] = T(P)$

maka $(T \circ \varepsilon)(P) = (\varepsilon \circ T)(P) = T(P)$, $\forall$ P ε V

Jadi, $T \circ \varepsilon = \varepsilon \circ T = T$.

Setelah Anda mengerti apa yang dimaksud dengan transformasi identitas dan bagaimana sifatnya, barulah Anda dapat mempelajari transformasi balikan yang ditetapkan seperti dalam definisi berikut ini.

Definisi 1.14 Suatu transformasi T_1 disebut transformasi balikan (*invers*) dari transformasi T jika dan hanya jika berlaku $T_1 \circ T = T \circ T_1 = \varepsilon$.

Kemudian, timbul pertanyaan, apabila T sebarang transformasi, apakah ada balikan dari transformasi T? Apabila ada, apakah ia suatu transformasi? Apabila suatu transformasi ada, berapa banyak balikan itu? Untuk menjawab pertanyaan yang beruntun itu, Anda pelajarilah teorema berikut.

Teorema 1.6 Setiap transformasi T mempunyai satu transformasi balikan (*invers*).

Bukti:
Makna dalam pernyataan di atas harus ditunjukkan berturut-turut:
1. adanya balikan dari T,
2. balikan dari T merupakan suatu transformasi,
3. balikan dari T tidak lebih dari satu buah.

Sekarang, marilah kita bahas satu per satu pernyataan-pernyataan di atas.

1. Adanya Balikan dari T

Tetapkan T_1 sebagai fungsi berikut. Andaikan $X \in V$ dengan V bidang Euclides. Karena T suatu transformasi maka ada prapeta $Y \in V$ sehingga $T(Y) = X$. Ambil $T_1(X) = Y$. Artinya, $T_1(X)$ prapeta dari X oleh T. Jadi, dari $T(Y) = X$ maka $T[T_1(X)] = X$. Karena $T[T_1(X)] = (T \circ T_1)(X) = X = \varepsilon(X)$, $\forall X \in V$, jadi $T \circ T_1 = \varepsilon$. Selanjutnya, $(T_1 \circ T)(X) = T_1 \circ [T(X)]$. Misalkan $T(X) = B$ maka $T_1(B) = X$. Jadi, $(T_1 \circ T)(X) = X = \varepsilon(X)$, $\forall X \in V$. Maka itu, $T_1 \circ T = \varepsilon$.

Jadi, ada balikan dari T, yaitu T_1.

2. Balikan dari T, yaitu T_1 suatu transformasi

Berdasarkan uraian penetapan T_1 di atas, jelas bahwa T_1 suatu fungsi kepada dari V ke V. Jadi, cukup menunjukkan T_1 suatu fungsi satu-satu saja. Untuk itu, ambil sebarang unsur X_1 dan X_2 pada V sehingga $T_1(X_1) = T_1(X_2)$. Kemudian, misalkan $A = T_1(X_1) = T_1(X_2)$. Karena $T(A) = T[T_1(X_1)] = X_1$ dan $T(A) = T[T_1(X_2)] = X_2$ maka $X_1 = X_2$. Jadi, T_1 suatu fungsi satu-satu. Karena T_1 fungsi dari V kepada V dan satu-satu maka T_1 fungsi bijektif. Akibatnya, T_1 suatu transformasi.

3. Transformasi balikan dari T tidak lebih dari satu

Andaikan ada dua transformasi balikan dari T, selain T_1, yaitu T_2, $T_2 \circ T = T \circ T_2 = \varepsilon$.

Ambil $T_1 \circ T = \varepsilon \Rightarrow (T_1 \circ T) \circ T_2 = \varepsilon \circ T_2$

$\Rightarrow T_1 \circ (T \circ T_2) = T_2$

$\Rightarrow T_1 \circ \varepsilon = T_2$, T_2 transformasi balikan dari T

$\Rightarrow T_1 = T_2$

Jadi, hanya satu transformasi balikan dari T, yaitu T_1.

Berdasarkan Teorema 1.6, ditetapkan penulisan transformasi balikan dari T dengan notasi T^{-1}. Selanjutnya, timbul pertanyaan bagaimana sifat transformasi balikan ini? Untuk menjawab pertanyaan ini, silakan Anda pelajari teorema berikut ini.

Teorema 1.7 Misalkan diberikan dua buah transformasi T_1 dan T_2, maka $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$.

Bukti:

$$\begin{aligned} T_2^{-1} \circ T_1^{-1} \quad T_1 \circ T_2 &= T_2^{-1} \circ \; T_1^{-1} \circ T_1 \; \circ T_2 \\ &= T_2^{-1} \circ \varepsilon \circ T_2 \\ &= T_2^{-1} \circ \; \varepsilon \circ T_2 \\ &= T_2^{-1} \circ T_2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2 \quad T_2^{-1} \circ T_1^{-1} &= T_1 \circ \; T_2 \circ T_2^{-1} \; \circ T_1^{-1} \\ &= T_1 \circ \varepsilon \circ T_1^{-1} \\ &= T_1 \circ \; \varepsilon \circ T_1^{-1} \\ &= T_1 \circ T_1^{-1} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $T_2^{-1} \circ T_1^{-1} \; = \; T_1 \circ T_2 \; = \; T_1 \circ T_2 \; = \; T_2^{-1} \circ T_1^{-1} \; = \varepsilon$. Maka, $T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$ merupakan balikan dari transformasi $T_1 \circ T_2$. Tentunya, Anda telah mengetahui bahwa transformasi balikan $T_1 \circ T_2$ ditulis oleh notasi $T_1 \circ T_2 \;^{-1}$ dan tunggal. Akibatnya, $T_1 \circ T_2 \;^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diberikan garis g pada bidang Euclides *V*. Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap titik P $\in$ *V*:
   a) T(P) = P jika P $\in$ g
   b) T(P) = Q jika g sumbu dari $\overline{PQ}$.

   Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

2) Diberikan suatu titik A pada bidang Euclides V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:
   a) T(P) = A jika P = A
   b) T(P) = P′ sehingga P titik tengah $\overline{AP'}$ jika $P \neq A$.

   Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

3) Diberikan suatu garis g pada bidang Euclides V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:
   a) T(P) = P jika $P \in g$
   b) T(P) = Q sehingga P titik tengah ruas garis tegak lurus dari Q ke garis g, jika $P \notin g$.

   Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

4) Diberikan suatu titik A pada bidang Euclides V. Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap $P \in V$:
   a) T(P) = A jika P = A
   b) T(P) = Q sehingga A titik tengah $\overline{PQ}$, jika $P \neq A$.

   Apakah T suatu transformasi?

5) Pada bidang Euclides V diberikan sebuah lingkaran L dengan jari-jari r dan pusat di titik A. Ditetapkan relasi T sebagai berikut. Untuk setiap titik $P \in V$:
   a) T(P) = A, jika P = A
   b) T(P) = P, jika $P \in L$
   c) T(P) = Q sehingga AP . $\overline{AQ} = r^2$ jika $P \neq A$, $P \notin L$.

   Apakah T suatu transformasi?

6) Diberikan relasi T: $V \to V$ yang ditetapkan sebagai berikut.
   Apabila $P(x, y) \in V$ maka:
   a) T(P) = (x + 1, y) untuk $x \geq 0$
   b) T(P) = (x – 1, y) untuk $x < 0$

   Apakah T suatu transformasi?

7) Diberikan relasi T: $V \to V$ yang ditetapkan sebagai berikut. Untuk setiap $P(x, y) \in V$, T(P) = (x + a, y + b)
   Apakah T suatu transformasi?

8) Diberikan relasi T: $V \to V$ yang ditetapkan sebagai berikut.
Untuk setiap P(x, y) $\in V$, T(P) = (ax, y) dengan a $\neq$ 0.
Apakah T suatu transformasi?

9) Apabila T_1, T_2, dan T_3 masing-masing transformasi, buktikan bahwa

$$(T_1 \circ T_2 \circ T_3)^{-1} = T_3^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

10) Apabila T_1 , T_2, ... T_n masing-masing transformasi, buktikan bahwa

$$(T_1 \circ T_2 \ldots \circ T_n)^{-1} = T_n^{-1} \circ T_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Untuk sebarang P $\in V$ dapat ditinjau kasus P $\in$ g atau P $\notin$ g.
Untuk P $\in$ g, berdasarkan
   a) T(P) ada tunggal, yaitu P sendiri. Akibatnya, T(P) $\in V$. Untuk P $\notin$ g, ada tunggal garis l melalui P $\perp$ g. Akibatnya, ada tunggal Q $\in l$ sehingga g sumbu $\overline{PQ}$.
   b) T(P) = Q. Karena $l \subset V$, Q $\in l$ maka Q $\in V$.

   Jadi, untuk setiap P $\in V$, T(P) ada dan tunggal serta T(P) $\in V$. Jadi, relasi T suatu fungsi dari V ke V.

   Ambil sebarang unsur Q $\in V$. Dalam hal ini, ada dua kasus: Q $\in$ g dan Q $\notin$ g.
   Untuk Q $\in$ g, berdasarkan a), ada prapeta dari Q, yaitu Q sendiri.
   Untuk Q $\notin$ g, ada garis m melalui Q sehingga m $\perp$ g. Akibatnya, ada titik P $\in$ m sehingga g sumbu dari $\overline{PQ}$. Artinya, T(P) = Q atau P prapeta dari Q. Jadi, fungsi T merupakan fungsi kepada.
   Ambil dua unsur sebarang A dan B pada V sehingga T(A) = T(B). Misalkan X = T(A) = T(B) maka g sumbu dari $\overline{AX}$ dan $\overline{BX}$. Akibatnya, B = A. Jadi, fungsi T merupakan fungsi satu-satu.
   Kesimpulan: dari uraian di atas, dapat dikatakan bahwa T merupakan suatu transformasi.

2) Untuk sebarang P $\in V$, dapat ditinjau kasus P = A atau P $\neq$ A.
Untuk P = A, berdasarkan a), ada tunggal T(P) = A $\in V$.

Untuk P $\neq$ A, ada tunggal $\overline{AP}$ dan ada tunggal $\overleftrightarrow{AP}$. Akibatnya, ada tunggal P′ $\in$ $\overleftrightarrow{AP}$ sehingga P titik tengah $\overline{AP'}$. Karena P′ $\in$ $\overleftrightarrow{AP}$ $\subset V$ maka P′ $\in V$.
Jadi, untuk setiap P $\in V$, ada tunggal T(P) $\in V$ sehingga memenuhi ketentuan relasi T. Maka itu, relasi T merupakan fungsi dari *V* ke *V*.
Ambil sebarang unsur Q $\in V$. Dalam hal ini, ada dua kasus: Q = A atau Q $\neq$ A.
Untuk Q = A, berdasarkan a), ada prapeta Q, yaitu A.
Untuk Q $\neq$ A, ada $\overline{QA}$ $\subset V$ yang mengakibatkan $\overleftrightarrow{QA}$ $\subset V$. Dengan sendirinya, ada P′ $\in$ $\overleftrightarrow{QA}$ sehingga P′ titik tengah $\overline{QA}$. Artinya, ada prapeta dari Q oleh T, yaitu P′. Karena P′ $\in$ $\overleftrightarrow{QA}$ $\subset V$ maka P′ $\in V$. Jadi, fungsi T merupakan fungsi kepada.
Ambil dua titik sebarang X, Y $\in V$ sehingga T(X) = T(Y).
Misalkan Z = T(X) = T(Y), artinya X titik tengah dari $\overline{AZ}$ dan Y titik tengah dari $\overline{AZ}$. Jadi, X = Y. Maka dari itu, fungsi T merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapat dikatakan bahwa T suatu transformasi.

3) Ambil titik sebarang P $\in V$. Ada dua kasus: P $\in$ g atau P $\notin$ g.
Untuk P $\in$ g, berdasarkan a), ada tunggal peta dari P, yaitu P sendiri.
Untuk P $\notin$ g, ada tunggal garis *l* tegak lurus g melalui P terhadap g.
Misalkan {N} = g $\cap$ *l*. Akibatnya, ada tunggal $\overline{PN} \subset l$. Dengan sendirinya, ada tunggal Q $\in l$ sehingga P titik tengah $\overline{NQ}$, berarti T(P) = Q $\in V$.
Karena setiap P $\in V$ ada tunggal T(P) $\in V$ maka relasi T merupakan fungsi dari *V* ke *V*.
Ambil sebarang titik Q $\in V$, dalam hal ini ada dua kasus: Q $\in$ g atau Q $\notin$ g.
Untuk Q $\in$ g, berdasarkan a), ada prapeta dari Q, yaitu Q sendiri.
Untuk Q $\notin$ g, ada garis m melalui Q tegak lurus g. Misalkan {M} = g $\cap$ m. Akibatnya, ada $\overline{QM}$ $\subset$ m. Hal ini berakibat ada P $\in$ m sehingga P titik tengah $\overline{QM}$ $\subset$ m. Hal ini berakibat ada P $\in$ m yang menyebabkan P titik tengah $\overline{QM}$ sehingga P prapeta dari Q oleh T. Jadi, fungsi T merupakan fungsi kepada.

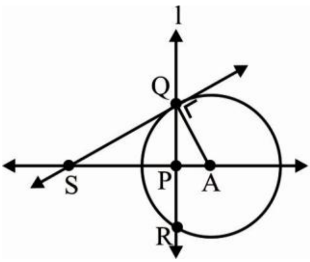
Ambil dua titik sebarang A, B $\in V$ sehingga T(A) = T(B). Misalkan X = T(A) = T(B). Artinya, A dan B masing-masing merupakan titik tengah ruas garis yang tegak lurus dari X ke garis g. Akibatnya, A = B. Jadi, fungsi T merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa T merupakan suatu transformasi.

4) Ambil sebarang titik $P \in V$. Ada dua kasus: P = A atau $P \neq A$.
Untuk P = A, berdasarkan a), ada tunggal peta dari P, yaitu A.
Untuk $P \neq A$, ada $\overline{PA} \subset V$. Akibatnya, ada tunggal $\overleftrightarrow{PA}$. Hal ini berakibat bahwa ada tunggal $Q \in \overleftrightarrow{PA}$ sehingga A titik tengah $\overline{PQ}$. Karena $Q \in \overleftrightarrow{PA} \subset V$ maka $Q \in V$. Jadi, untuk $P \neq A$ ada $Q \in V$ sehingga T(P) = Q. Maka itu, relasi T merupakan suatu fungsi dari V ke V.
Ambil unsur sebarang $Q \in V$. Dalam hal ini, ada dua kasus: Q = A atau $Q \neq A$. Untuk Q = A, berdasarkan a), ada prapeta dari Q oleh T, yaitu A.
Untuk $Q \neq A$, ada $\overline{AQ}$ yang mengakibatkan ada $\overleftrightarrow{AQ}$. Hal ini mengakibatkan pula ada $P \in \overleftrightarrow{AQ}$ sehingga A titik tengah $\overline{PQ}$. Jadi, ada prapeta dari Q, yaitu $P \in V$, sebab $P \in \overleftrightarrow{AQ} \subset V$. Jadi, fungsi T merupakan fungsi kepada.
Ambil dua titik sebarang X, Y $\in V$ sehingga T(X) = T(Y). Misalkan Z = T(X) = T(Y). Akibatnya, A titik tengah dari $\overline{XZ}$ dan $\overline{YZ}$ sehingga X = Y. Jadi, fungsi T merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa T merupakan suatu transformasi.

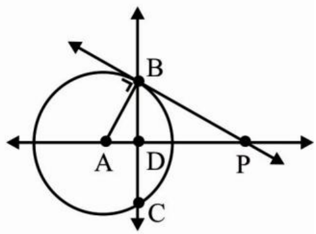
5) Ambil sebarang titik $P \in V$. Terdapat tiga kasus, yaitu P = A, $P \in L$, atau $P \neq A$ dan $P \notin L$.
   a) Untuk P = A, berdasarkan a), ada tunggal peta dari P, yaitu A.
   b) Untuk $P \in L$, berdasarkan b), ada tunggal peta dari P, yaitu P.
   c) Untuk $P \neq A$, $P \notin L$ terdapat dua kasus, yaitu P di dalam daerah L atau P di luar daerah L.

Untuk P di dalam daerah L, ada tunggal $\overleftrightarrow{AP}$ yang mengakibatkan ada tunggal garis l melalui P tegak lurus $\overleftrightarrow{AP}$. Misalkan $l \cap L = \{Q, R\}$. Berdasarkan Geometri Euclides, kedua garis singgung di R dan Q

berpotongan di satu titik dengan $\overleftrightarrow{AP}$, namakan titik S. Berdasarkan Geometri Euclides pula, didapat hubungan AP . AS = r^2. Jadi, S peta dari P. Jelas dari uraian di atas P $\in$ *V* dan tunggal (Gambar 1.8).
Untuk P di luar lingkaran, ada dua garis singgung melalui P terhadap lingkaran L. Misalkan titik singgung ini B dan C. Akibatnya, ada tunggal $\overleftrightarrow{BC}$. Misalkan $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AP} = \{D\}$. Jelas, D $\in$ *V* ada dan tunggal. Berdasarkan Geometri Euclides, dapat ditunjukkan bahwa AP . AD = r^2. Jadi, D peta dari P (Gambar 1.9) sehingga dapat disimpulkan bahwa $\forall$ P $\in$ *V* ada tunggal peta dari P juga di *V*. Artinya, relasi T ini merupakan fungsi dari *V* ke *V*.



Gambar 1.8.



Gambar 1.9.

Dari uraian di atas, dapat disimak bahwa apabila T(P) = D, berarti AP . AD = r^2 atau B titik kutub dari garis melalui D yang tegak lurus $\overleftrightarrow{AP}$, D $\in$ $\overleftrightarrow{AP}$, bahkan {D} adalah irisan dari $\overleftrightarrow{AP}$ dengan garis kutub dari P terhadap L. Diambil dua titik sebarang B dan C unsur dari *V* sehingga T(B) = T(C) dan misalkan X = T(B) = T(C). Karena garis *l* melalui X yang tegak lurus $\overleftrightarrow{AX}$ hanya ada satu, titik kutub dari *l* ini juga hanya ada satu. Akibatnya, B = C. Jadi, fungsi T merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa relasi T merupakan suatu transformasi.

6) Bukti bahwa relasi T adalah fungsi dari *V* ke *V* sebagai berikut.
Ambil sebarang titik P(x, y) $\in$ *V*, lalu ada dua kasus seperti di bawah ini.

Untuk $x \geq 0$, $x + 1 \in R$ dan tunggal, akibatnya $(x + 1, y) \in V$ dan tunggal.
Untuk $x < 0$, $x - 1 \in R$ dan tunggal, akibatnya $(x - 1, y) \in V$ dan tunggal.
Jadi, $P \in V$ selalu mempunyai peta di V dan tunggal.
Maka itu, relasi T merupakan fungsi dari V ke V.
Ambil $(0, 0) \in V$ sehingga berdasarkan a), $(0, 0) = T(P) = (x + 1, y)$, jika $x \geq 0$, didapat $x = -1$ dan $y = 0$. Dalam hal ini, terjadi kontradiksi dengan persyaratan $x \geq 0$. Akibatnya, $(-1,0)$ bukan prapeta dari $(0,0)$. Berdasarkan b), $(0, 0) = T(P) = (x - 1, y)$, jika $x < 0$, didapat $x = 1$ dan $y = 0$. Ini pun terjadi kontradiksi dengan persyaratan $x < 0$. Akibatnya, $(1,0)$ bukan prapeta dari $(0,0)$. Maka itu, $(0,0)$ tidak mempunyai prapeta oleh T. Jadi, fungsi T bukan fungsi kepada. Oleh karena itu, relasi T bukan suatu transformasi.

7) Ambil sebarang $P(x, y) \in V$. Berdasarkan ketentuan T, selalu ada peta $Q (x + a, y + b)$ yang tunggal dan $Q \in V$. Sebab, $(x + a, y + b)$ untuk setiap $x, y, a, b \in R$ (R = himpunan semua bilangan real) nilainya masing-masing tunggal dan $(x + a, y + b \in R)$. Jadi, relasi T ini fungsi dari V ke V.
Ambil sebarang titik $Q (x_0, y_0)$ sehingga $Q = T(P)$ maka $(x_0, y_0) = (x + a, y + b)$ atau $x = x_0 - a$, $y = y_0 - b$. Karena setiap x_0 , y_0 , $a, b \in R$ maka $P(x, y) \in R$. Jadi, fungsi T ini merupakan fungsi kepada.
Ambil dua titik sebarang $Q (x_0, y_0)$ dan $S (x_1, y_1)$ pada V sehingga $T(Q) = T(S)$. Karena $T(Q) = (x_0 + a, y_0 + b)$, $T(S) = (x_1 + a, y_1 + b)$ maka $(x_0 + a, y_0 + b) = (x_1 + a, y_1 + b)$ atau $x_0 + a = x_1 + a$, $y_0 + b = y_1 + b$ atau $x_0 = x_1$ dan $y_0 = y_1$.
Jadi, Q = S. Akibatnya, fungsi T ini merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa relasi T ini merupakan suatu transformasi.

8) Ambil titik sebarang $P(x, y) \in V$. Karena $ax \in R$ tunggal maka prapeta dari P selalu ada dan tunggal oleh T. Karena $(ax, y) \in R$, setiap $x, y \in R$, jadi $(ax, y) \in V$.
Maka itu, relasi T ini merupakan fungsi dari V ke V.
Ambil sebarang titik $Q(x_0, y_0) \in V$, misalkan $(x_0, y_0) = (ax, y)$. Akibatnya, $x = \frac{x_0}{a}$ dan $y = y_0$. Karena setiap $(x_0, y_0) \in R$, $\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$,

ada dan anggota R maka setiap $Q(x_0, y_0) \in V$ ada prapeta $P\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$ oleh T. Jadi, fungsi T ini merupakan fungsi kepada.

Ambil dua titik sebarang $Q(x_0, y_0)$ dan $S(x_1, y_1)$ dengan $T(Q) = T(S)$. Maka, $(ax_0, y_0) = (ax_1, y_1)$ atau $ax_0 = ax_1$ dan $y_0 = y_1$ atau $x_0 = x_1$ dan $y_0 = y_1$ sebab $a \neq 0$.
Jadi, Q = S. Akibatnya, fungsi T ini merupakan fungsi satu-satu.
Kesimpulan: dari uraian di atas, dapatlah dikatakan bahwa relasi T ini suatu transformasi.

9) $T_1 \circ T_2 \circ T_3\ ^{-1} = \left[\ T_1 \circ T_2 \ \ \circ T_3\right]^{-1}$ asosiatif

$= T_3^{-1} \circ \ T_1 \circ T_2\ ^{-1}$ Teorema 1.7

$= T_3^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$ Teorema 1.7

10) Untuk membuktikan $\left(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n\right)^{-1} = T_n^{-1} \circ T_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$, sebaiknya gunakan prinsip induksi matematika, yaitu pandang pernyataan $P_n = \left(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n\right)^{-1} = T_n^{-1} \circ T_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$, untuk $n \in A$ (A = himpunan semua bilangan asli).
Perhatikan untuk n = 2 maka $P_2 = \left(T_1 \circ T_2\right)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$ bernilai benar (Teorema 1.7).
Andaikan n = k maka $P_k = (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k)^{-1} = (T_k^{-1} \circ T_{k-1}^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1})$ bernilai benar.
Perhatikan untuk n = k + 1,
$P_{k+1} = (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k \circ T_{k-1})^{-1}$
$= [(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k) \circ T_{k+1}]^{-1}$, asosiatif
$= T_{k+1}^{-1} \circ (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k)^{-1}$, Teorema 1.7
$= T_{k+1}^{-1} \circ (T_k^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1})$, hipotesis
$= T_{k+1}^{-1} \circ T_k^{-1} \circ T_{k-1}^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$, asosiatif yang juga benilai benar.
Maka, menurut prinsip induksi matematika, disimpulkan bahwa pernyataan $P_n = (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n)^{-1} = T_n^{-1} \circ T_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$ bernilai benar untuk setiap $n \in A$.

Mudah-mudahan pekerjaan Anda tidak terlalu berbeda dengan petunjuk di atas.

RANGKUMAN

1. Himpunan semua transformasi terhadap operasi komposisi "$_o$" membentuk grup yang disebut grup transformasi.
2. Langkah pengkajian untuk menyatakan suatu relasi T merupakan suatu transformasi adalah analisis sebagai berikut.
   a) T fungsi dari *V* ke *V*
   b) T fungsi bijektif
      1) T fungsi kepada
      2) T fungsi satu-satu.
3. Jika T_1 dan T_2 transformasi, $T_1 \, _o \, T_2$ juga merupakan transformasi.
4. Untuk setiap transformasi T_1, T_2, dan T_3, berlaku $(T_1 \, _o \, T_2) \, _o \, T_3 = T_1 \, _o \, (T_2 \, _o \, T_3)$.
5. Jika T_1 dan T_2 suatu transformasi, $(T_2 \, _o \, T_1)^{-1} = T_1^{-1} \, _o \, T_2^{-1}$.
6. Jika T_1 dan T_2 transformasi, maka komposisi transformasi dari T_1 dan T_2 ditetapkan sebagai: $(T_1 \circ T_2)(P) = T_1[T_2(P)], \forall P \in V$.
7. T_1 disebut transformasi balikan (invers) dari transformasi T jika dan hanya jika $T_1 \circ T = T \circ T_1 = \varepsilon$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari r dan pusatnya di titik A. Ditetapkan relasi T sebagai berikut untuk setiap titik P $\in$ *V*.
   i) T(P) = A, jika P = A.
   ii) T(P) = Q sehingga AP . AQ = r^2, jika P $\neq$ A.
   Pernyataan yang benar berikut ini adalah ….
   A. T bukan fungsi dari *V* ke *V*
   B. T fungsi dari *V* ke *V*
   C. T suatu transformasi
   D. T mempunyai balikan
2) Diberikan T_1 dan T_2 merupakan suatu transformasi. Pernyataan yang benar adalah ….
   A. $(T_1^{-1})^{-1} = T_1$

B. $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$
C. T_1^{-1} dan T_2^{-1} belum tentu transformasi
D. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

3) Diberikan T suatu transformasi. Pernyataan yang benar adalah ….
A. semua titik pada bidang *V* berpindah tempat oleh T
B. ada titik pada bidang *V* yang tidak berpindah tempat oleh T
C. semua titik pada *V* mempunyai peta oleh T
D. tidak semua titik pada *V* mempunyai prapeta oleh T

Untuk soal nomor 4) sampai 9) pilihlah
A. jika 1 dan 2 benar
B. jika 1 dan 3 benar
C. jika 2 dan 3 benar
D. jika 1, 2, dan 3 semuanya benar

4) Diberikan garis g dan titik A pada bidang Euclides *V*. Ditetapkan relasi T sebagai berikut.
Untuk setiap $P \in V$
i) T(P) = A jika $P \in g$
ii) T(P) = Q sehingga P titik tengah ruas garis tegak lurus dari Q ke garis g jika $P \notin g$.
Pernyataan yang benar adalah ….
1. T fungsi dari *V* ke *V*
2. T fungsi kepada
3. T suatu transformasi

5) Diberikan relasi T: $V \to V$, *V* bidang Euclides yang ditetapkan sebagai berikut. Setiap P (x, y) $\in V$,
a) T(P) = (x, y + 2) untuk $y \geq -1$
b) T(P) = (x, y – 1) untuk $y < -1$.
Pernyataan yang benar adalah ….
1. T fungsi dari *V* ke *V*
2. T fungsi kepada
3. T fungsi satu-satu

6) Diberikan titik A dan relasi T yang ditetapkan sebagai berikut. Setiap $P \in V$,
a) T(P) = A, jika P = A
b) T(P) = Q sehingga $\overline{AQ} = 3\overline{AP}$, $Q \in \overleftrightarrow{PA}$, jika $P \neq A$.

Pernyataan yang benar adalah ….
1. T fungsi dari *V* ke *V*
2. T fungsi kepada
3. T fungsi satu-satu

7) Diberikan γ himpunan semua transformasi dan "$_o$" operasi komposisi. Pernyataan yang benar adalah ….
   1. jika $T \in \gamma$ maka $T^{-1} \in \gamma$
   2. operasi "$_o$" bersifat asosiatif pada g
   3. operasi "$_o$" bersifat komutatif pada g

8) Diberikan γ himpunan semua transformasi dan "$_o$" operasi komposisi. Pernyataan yang benar adalah ….
   1. relasi identitas ε yang ditetapkan ε (P) = P, $\forall$ P ε *V* maka $\varepsilon \in$ g
   2. "$_o$" tertutup pada γ
   3. jika T_1 dan $T_2 \in \gamma$ maka $T_1 \, _o \, T_2 \notin \gamma$

9) Jika *V* bidang Euclides, relasi-relasi dari *V* ke *V* berikut ini yang merupakan transformasi adalah ….
   1. $T_1 (P) = (x + 1, 2y), \forall P (x, y) \in V$
   2. $T_2 (P) = (x, y - 1), \forall P (x, y) \in V$
   3. $T_3 (P) = (\frac{1}{2} x, y - 2), \forall P (x, y) \in V$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C. A, B, dan D bukan relasi dari himpunan A ke himpunan B.
2) B. A dan C bukan domain dari relasi R. D juga bukan domain dari relasi R sebab x = 6 mengakibatkan y = –2 $\notin$ A.
3) D. Perhatikan Definisi 1.2.
4) A. Perhatikan Definisi 1.3.
5) A. Perhatikan Definisi 1.4.
6) C. A tidak refleksi, B tidak simetri, dan D tidak transitif. Sementara itu, C refleksi, simetri, dan transitif.
7) D. A : x = 2 maka f(2) tak terdefinisi.
   B : x = 0 maka f(y) = 1 dan f(y) = –1.
   C : x = 0 maka f(0) tak terdefinisi.
   D : $\forall$ x $\in$ R, f(x) terdefinisi dan juga unsur dari R.
8) B. A : f(x) = 0 maka x = $\frac{1}{3} \notin$ B.
   C : f(x) = 1 maka $x^2 + x = 1$ sehingga nilai x = $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ dan x = $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Kedua x ini bukan bilangan bulat.
   D : f(x) = –1 maka $x^2 = -1$. Akibatnya, tidak ada x bilangan bulat yang memenuhi $x^2 = -1$.
   B : Ambil y $\in$ B maka y = f(x) = x + 4. Berakibat x = 4 – y karena y $\in$ B maka x $\in$ B dan tunggal. Jadi, f(x) = x + 4 fungsi dari B kepada B.
9) C. A : Ambil x = 1 dan x = –1 maka f(l) = f(–1) = –1.
   B : Ambil x = l dan x = –l maka f(l) = f(–1) = 2.
   D : Ambil x =1 dan x = –1 maka f(l) = f (–1) = 1.
   C : Ambil x_l, $x_2 \in$ R sehingga $f(x_1) = f(x_2)$ maka $4x_1 - 2 = 4x_2 - 2$. Hal ini mengakibatkan $x_l = x_2$. Jadi, f(x) = 4x – 2 fungsi satu-satu dari R ke R.
10) D. A, C fungsi tak satu-satu dan tak kepada.
   B fungsi tidak satu-satu.
   D fungsi satu-satu dan kepada.

Tes Formatif 2

1) A. Untuk suatu titik P pada lingkaran dengan pusat A jari-jari r, T(P) merupakan seluruh titik pada lingkaran tersebut. Akibatnya, T bukan fungsi dari *V* ke *V*.
2) A. A. $(T_1^{-1})^{-1}$ benar.
   B. $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ salah seharusnya $T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$.
   C. Salah seharusnya T_1^{-1} dan T_2^{-1} suatu transformasi.
   D. Salah seharusnya $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$.
3) C. A dan B keduanya bernilai salah, sebab ada transformasi yang tidak memiliki titik dan tidak berpindah tempat, tetapi ada juga transformasi yang semua titiknya berpindah tempat. Perhatikan contoh-contoh dan soal-soal latihan. Sementara itu, C benar dan D salah.
4) A. T fungsi dari *V* ke *V*, T fungsi kepada, tetapi T tidak fungsi satu-satu.
5) B. T fungsi dari *V* ke *V*, T bukan fungsi kepada, dan T fungsi satu-satu.
6) D. T suatu transformasi maka jelas 1, 2, dan 3 masing-masing benar.
7) A. Lihat Teorema 1.6 beserta buktinya dan Teorema 1.4 serta akhir uraian contoh 1.18.
8) A. 1. Bernilai benar dan jelas.
   2. Bernilai benar, jelas, tetapi 3 bernilai salah.
9) D. Jelas bahwa T_1, T_2, dan T_3 suatu transformasi.

Daftar Pustaka

Eecles, Frank M. (1971). *An Introduction to Transformational Geometry.* Phillips Academy, Andorn, Massachusetts: Addison-Wesley, Publishing Company.

Martin, George E. (1982). *Transformation Geometry*: *An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. R. (1990). *Geometri Transformasi*: Bandung: FMIPA-ITB.