MODUL 1

Vektor dan Penggunaan Vektor

A. Arkundato, S.Si., M.Si.

PENDAHULUAN

Dalam fisika sering fenomena atau gejala fisika akan mudah ditelaah dan diterangkan jika kita memandang beberapa besaran fisika yang terlibat (misalnya gaya, momentum) sebagai sebuah vektor. Dengan memandang besaran fisis sebagai vektor maka fenomena fisika yang terjadi (seperti gerak peluru) dapat dipahami dengan lebih baik. Namun demikian untuk menyelesaikan problem fisika yang melibatkan besaran-besaran vektor memerlukan kajian analisis vektor bahkan sampai pada tataran yang cukup rumit. Hukum Newton $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ dalam mekanika sering kita gunakan, besaran gaya $\boldsymbol{F}$ tersebut merupakan gaya resultan yang merupakan resultan semua gaya-gaya luar yang bekerja pada obyek. Oleh karena itu kita memerlukan pemahaman mengenai konsep dasar vektor dan operasi matematika vektor-vektor (analisis vektor) dan juga perbedaannya dengan besaran fisis skalar.

Tujuan dari mempelajari modul ini adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep vektor dalam permasalahan fisika. Secara khusus setelah mempelajari modul ini mahasiswa:

1. menjelaskan pengertian vektor;
2. menentukan penjumlahan dari operasi vektor;
3. menjumlahkan dua vektor atau lebih dengan metode jajaran genjang dan poligon;
4. menentukan resultan dari operasi vektor;
5. menjumlahkan dua vektor yang segaris atau membentuk sudut secara grafis dan menggunakan rumus cosinus;
6. menguraikan sebuah vektor dalam bidang datar menjadi dua vektor komponen yang saling tegak lurus;
7. menjumlahkan dua vektor atau lebih dengan cara analisis;
8. menghitung hasil perkalian dua buah vektor dengan cara perkalian titik;
9. menghitung hasil perkalian dua buah vektor dengan cara perkalian silang;

10. menentukan diferensiasi vektor;
11. menentukan integral vektor;
12. menerapkan perkalian titik dua buah vektor dalam menentukan usaha;
13. menentukan hubungan s - t, v - t, dan a-t melalui grafik;
14. menganalisis gerak tanpa percepatan dan gerak dengan percepatan tetap;
15. menentukan kecepatan gerak melingkar sebagai penerapan perkalian silang antar vektor posisi dengan kecepatan sudut;
16. menentukan momen gaya sebagai perkalian silang antar vektor posisi dengan gaya;
17. menentukan persamaan kecepatan dan percepatan sebagai diferensiasi vektor;
18. menentukan persamaan kedudukan sebagai integral vektor;
19. menerapkan hitungan vektor dalam gerak parabola/peluru;
20. menentukan persamaan fungsi sudut, kecepatan sudut dan percepatan sudut pada gerak melingkar.

Modul 1 ini terdiri dari dua kegiatan belajar (KB) yaitu KB1 mengenai Vektor dan KB2 mengenai Penggunaan Vektor dalam Gerak. Setiap KB dilengkapi contoh soal-penyelesaian, latihan, ringkasan, tes formatif, glosarium dan juga daftar pustaka yang dapat dijadikan acuan dalam belajar. Materi dalam modul ini dapat mencukupi dari segi kuantitas dan kualitas, sehingga mahasiswa dapat belajar dengan baik. Namun demikian sangat disarankan mahasiswa mencari bahan-bahan belajar tambahan seperti misalnya melalui internet. Anda dapat memperoleh tambahan yang sangat berguna dalam situs-situs akademik yang bisa diakses melalui internet.

Selamat Belajar!

KEGIATAN BELAJAR 1

Vektor

Pada Kegiatan Belajar ini Anda akan mempelajari pengertian dasar vektor dan skalar, operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian) vektor-skalar dan vektor-vektor; dan juga operasi kalkulus vektor (diferensial dan integral). Bagian ini sangat penting dipelajari untuk dapat menyelesaikan problem fisika yang melibatkan besaran vektor.

A. PENGERTIAN VEKTOR DAN SKALAR

Fenomena fisika suatu sistem fisis (sistem dengan obyek fisis) dapat dinyatakan dengan menampilkan dalam suatu besaran-besaran fisis (beserta satuan yang mengikuti tentunya). Besaran-besaran dapat diklasifikasikan ke dalam besaran *skalar* atau vektor. Sebuah besaran fisis disebut skalar jika cukup dicirikan hanya dengan sebuah angka atau nilai. Sebagai contoh skalar adalah besaran-besaran seperti *massa, temperatur, muatan listrik, rapat massa*, *energi dan tekanan* dan masih banyak yang lain. Jadi misalnya kita dapat menyatakan bahwa sebuah benda mempunyai massa 10 kg. Angka 10 adalah nilai besaran massa sedangkan kg adalah satuannya. Satuan sangat penting untuk disertakan setiap kali kita menyatakan sebuah besaran.

Sebaliknya sebuah vektor tidak cukup jika hanya dicirikan oleh nilainya saja tetapi juga harus diberikan juga arah ke mana besaran fisis tersebut menunjuk. Sebuah gerak suatu benda misalnya dapat diberikan baik secara skalar atau vektor. **Laju** adalah besaran skalar, misalnya “sebuah mobil bergerak dengan laju 100 km/jam”, yang menyatakan bahwa untuk satu jam mobil dapat menempuh jarak 100 km. Sebaliknya **kecepatan** adalah sebuah vektor, misalnya kita dapat menyatakan bahwa “sebuah mobil bergerak dengan kecepatan 100 km/jam ke timur”, yang juga memberi gambaran bahwa untuk satu jam mobil dapat menempuh jarak 100 km namun arahnya ditentukan ke timur. Karena memang sebenarnya gerak benda arahnya dapat berbeda-beda. Beberapa besaran vektor lain adalah gaya, pergeseran, kecepatan, percepatan, momentum. Oleh karena sebuah vektor harus dicirikan oleh besar dan arahnya, maka operasi matematika yang melibatkan vektor-vektor tentu saja lebih rumit dibanding operasi matematika pada skalar.

1. Notasi Vektor dan Skalar

Dalam fisika, biasanya untuk mempermudah kita menggunakan simbol (lambang) untuk mewakili besaran fisis. Simbol tersebut biasanya menggunakan aksara Yunani atau Romawi, seperti $m, T, q, \rho, E, P, \beta,$ masing-masing untuk menyatakan besaran fisis: massa, temperatur, muatan listrik, rapat massa, energi, tekanan, koefisien muai bidang dan masih banyak yang lain. Secara penulisan sebuah simbol besaran fisis dan juga persamaan fisika dituliskan miring. Besaran-besaran fisis tersebut termasuk besaran skalar karena kita cukup menyatakan nilainya saja (dan satuannya) setiap saat kita menyebutnya. Sebagai contoh kita dapat menyatakan muatan listrik dari elektron dengan q = -1,602x10^{-19} C.

Untuk skalar, maka operasi matematika skalar dengan skalar (tiga buah skalar S_1,S_2,S_3 misalnya), mengikuti aturan-aturan operasi aljabar sebagai berikut:

$S_1 + S_2 = S_2 + S_1$	sifat komutatif penjumlahan
$S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$	sifat komutatif perkalian
$(S_1 + S_2) + S_2 = S_1 + (S_2 + S_3)$	sifat asosiatif penjumlahan
$S_1 \times (S_2 \times S_3) = (S_1 \times S_2) \times S_3$	sifat asosiatif perkalian
$S_1 \times (S_2 + S_3) = S_1 \times S_2 + S_1 \times S_3$	sifat distributif

Di samping itu ada beberapa definisi dan konvensi penting untuk skalar:

$-S = -1 \times S$	arti dari – S
$S_1 - S_2 = S_1 + (-S_2)$	definisi pengurangan
$\lvert S \rvert = S \quad \text{jika} \geq S0$	modulus bilangan positif
$\lvert S \rvert = -S \quad \text{jika } S < 0$	modulus bilangan negatif

Operasi aljabar besaran-besaran skalar pada dasarnya mengikuti aturan-aturan tersebut, dan tidak ada kesulitan untuk mengerjakannya. Sebagai contoh volume sebuah kubus dengan lebar sisi ℓ = 3 cm adalah V = ℓ^3 = 27 cm^3.

Telah dinyatakan di atas, sebuah vektor harus dicirikan oleh arah dan besarnya, diikuti satuan yang sesuai. Dalam hal ini perlu dipahami bahwa besar/nilai dari vektor adalah sebuah skalar (yang positif). Arah vektor didefinisikan menurut kerangka acuan (sistem koordinat) yang dipakai. Jika sebuah vektor bernilai negatif maka nilai negatifnya sebenarnya menyatakan arah negatif sistem koordinat yang digunakan dan tidak menyatakan nilai vektor. Sebagai contoh, sebuah mobil bergerak dengan kecepatan $\vec{v} = -10\hat{i}$ m/s maksudnya adalah dalam 1 detik dapat menempuh 10 m ke arah sumbu x negatif. Benda jatuh bebas mempunyai/mengalami vektor percepatan gravitasi bumi $\vec{g}$ = 10 m/det^2 ke bawah. Untuk dapat menyatakan sebuah vektor kita juga memerlukan simbol-simbol aljabar yang agak berbeda dibanding skalar. Ada beberapa cara notasi untuk menyatakan sebuah vektor:

(i) Vektor dituliskan dengan huruf tebal. Misalnya, gaya dengan notasi $\boldsymbol{F}$.
(ii) Vektor dituliskan dengan huruf bertanda bar di bawahnya, seperti $\underline{F}$.
(iii) Vektor dinotasikan dengan huruf dengan tanda anak panah di atasnya $\vec{F}$.
(iv) Berkaitan dengan gerak benda dari suatu titik *A* ke titik yang lain *B*, yang menghasilkan vektor pergeseran maka dapat dituliskan dengan $\overrightarrow{AB}$.
(v) Vektor dapat juga dituliskan seperti $\tilde{F}$

Kelima cara menotasikan dan menuliskan sebuah vektor ini adalah cara yang sering digunakan dan semuanya dapat digunakan tergantung mana yang lebih memudahkan menulis serta konsisten. Besar (*magnitude*) suatu vektor kadang-kadang disebut *panjang vektor*, yang adalah bilangan non-negatif dan diperoleh dari harga mutlak vektor, yaitu:

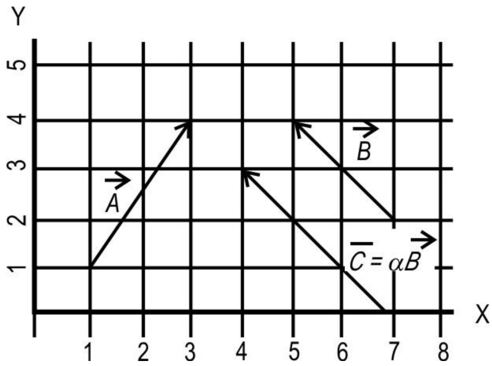
$$\left|\vec{F}\right| = \text{besar vektor } \vec{F}$$

Karena besar suatu vektor tidak lain adalah skalar, maka dapat dituliskan

$$F = \left|\vec{F}\right| = \text{besar vektor } \vec{F}$$

2. Wakilan Grafis (Geometris) Vektor

Sebuah vektor secara matematis dapat diwakili oleh sebuah notasi vektor. Untuk mempermudah pemahaman kita tentang vektor, sering juga sebuah vektor ditampilkan secara grafis yaitu <u>sebagai sebuah anak panah dengan notasi vektor di sampingnya</u>. Dalam hal ini panjang anak panah menggambarkan nilai/besar vektor sedang arah anak panah sekaligus menyatakan arah vektor (Gambar 1.1).

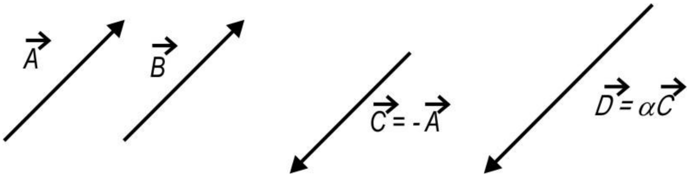


Gambar 1.1
Wakilan grafis vektor dan vektor-vektor kolinear

Pada gambar di atas, vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$ digambarkan dalam sebuah sistem koordinat kartesian dua dimensi. Besarnya vektor $\vec{A}$ dinyatakan dengan panjang anak panah (yang dapat dihitung dengan rumus Pythagoras) dan arahnya dapat dilihat membentuk sudut tertentu terhadap sumbu horizontal yang dapat dihitung dengan rumus trigonometri.

Apabila beberapa vektor dalam keadaan satu garis atau sejajar satu sama lain, maka vektor-vektor ini disebut *vektor-vektor* (yang) *kolinear*. Vektor-vektor kolinear dihubungkan satu dengan yang lain secara *scaling* artinya suatu vektor yang kolinear dapat dituliskan sebagai perkalian suatu skalar dengan vektor yang dijadikan acuan, misalnya $\vec{C} = \alpha\vec{B}$ dengan α adalah skalar/bilangan penyekala. Oleh karena itu hasil *scaling* atau perkalian vektor adalah sebuah vektor baru dengan besar yang berbeda tetapi arahnya bergantung tanda dari faktor skala. Berkaitan dengan faktor skala (α) maka vektor-vektor akan sejajar (kolinear) jika α positif dan anti-sejajar jika α negatif. Apabila vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ berada dalam satu bidang maka disebut vektor-vektor (yang) *koplanar* dan bila merupakan vektor yang segaris dan sekaligus sebidang maka disebut vektor-vektor *koplanar* dan *kolinear*.

Dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ disebut sama yaitu $\vec{A} = \vec{B}$ jika baik besar maupun arah dari kedua vektor adalah sama (yaitu sejajar atau berimpit), seperti Gambar 1.2.



Gambar 1.2
Beberapa wakilan grafis vektor kolinear dan anti sejajar

Vektor $\vec{A}$ dan $\vec{C}$ adalah vektor anti sejajar sedangkan vektor $\vec{C}$ dan $\vec{D}$ vektor kolinear satu sama lain. Hasil perkalian skalar α dengan $\vec{C}$ menghasilkan vektor baru $\vec{D}$ dengan panjang berbeda. Antara vektor dengan vektor ini dapat dijumlahkan. Wakilan geometris untuk vektor 3 dimensi akan kita berikan saat membahas vektor satuan.

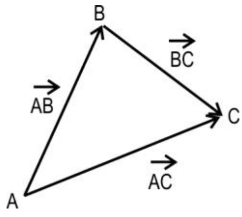
B. OPERASI ALJABAR VEKTOR

1. Penjumlahan Vektor

Operasi penjumlahan (sering digunakan untuk mencari resultan vektor) untuk vektor-vektor memiliki aturan-aturan penjumlahan agak berbeda. Dalam hal ini penjumlahan dua buah vektor sangat mudah digambarkan bila kita tinjau vektor pergeseran lebih dahulu. Untuk dua buah garis yang mendefinisikan vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ dan $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, maka pergeseran lurus dari titik *A* ke *C* melalui *B* menghasilkan:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \tag{1.1}$$

yaitu pergeseran total yang merupakan vektor resultan $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ yang secara geometri seperti pada Gambar 1.3.



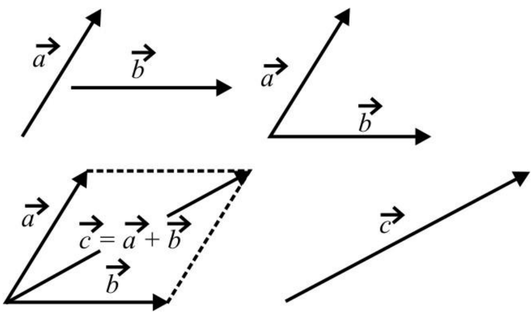
Gambar 1.3
Wakilan grafik penjumlahan dua vektor

Ilustrasi Gambar 1.3 disebut *aturan penjumlahan vektor* atau *aturan penjumlahan segitiga* dan hasil penjumlahan $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ yang merupakan vektor tunggal disebut *resultan* dari $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Aturan Penjumlahan Vektor (aturan segitiga)

Sebuah vektor dapat digambarkan sebagai anak panah dan bilamana dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dijumlahkan maka dapat dilukis dengan cara ujung vektor $\vec{a}$ berimpit dengan pangkal vektor $\vec{b}$ dan resultan vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ adalah anak panah (vektor) dari pangkal vektor $\vec{a}$ langsung ke ujung vektor $\vec{b}$.

Aturan penjumlahan vektor seperti di atas berlaku secara umum, dalam arti titik asal vektor tidak perlu berimpit dengan di titik asal *O* sistem koordinat. Apabila penjumlahan vektor dilakukan titik asal yang sama maka dapat digunakan *aturan penjumlahan jajaran-genjang* (*parallelogram*). Untuk itu vektor-vektor yang tidak berawal di titik asal untuk dapat dijumlahkan perlu diproyeksikan dulu, seperti pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4
Aturan penjumlahan jajaran genjang

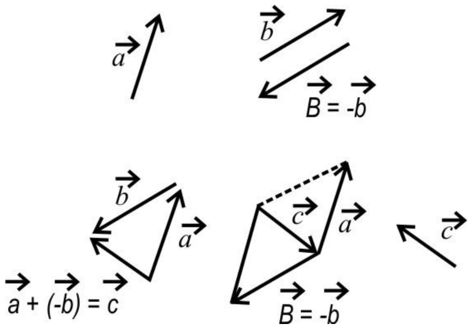
2. Pengurangan Vektor dan Hukum Aljabar Vektor

Dari definisi vektor anti sejajar sebelumnya, maka untuk **pengurangan/ selisih** vektor dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} \tag{1.2}$$

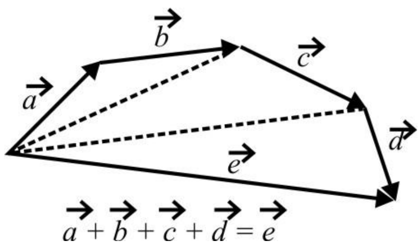
Dari definisi sebelumnya, suatu vektor besarnya selalu dinyatakan sebagai bilangan riil positif. Secara geometri jelas bahwa untuk vektor $\vec{B} = -\vec{b}$

adalah vektor yang besarnya sama $|\vec{B}|=|\vec{b}|$ namun arahnya berlawanan (anti sejajar). Gambar (1.5) wakilan geometris dari pengurangan vektor.



Gambar 1.5
Selisih vektor (aturan segi tiga dan aturan jajaran genjang)

Kemudian sejumlah vektor dapat juga dijumlahkan menurut *aturan penjumlahan poligon*. Aturan ini tidak lain aturan penjumlahan segi tiga yang diterapkan secara berturutan/serial. Aturan penjumlahan ini berlaku baik untuk vektor-vektor yang koplanar (sebidang) ataupun tidak, hanya untuk poligon tiga dimensi sulit untuk digambar jika vektor-vektor tidak koplanar. Gambar (1.6) adalah wakilan grafis penjumlahan vektor dengan aturan penjumlahan poligon untuk $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{e}$.

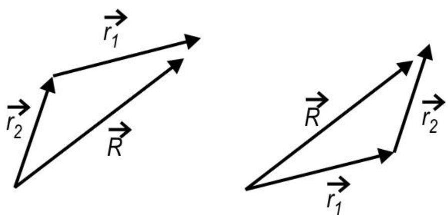


Gambar 1.6
Aturan Penjumlahan Poligon

Penjumlahan (pengurangan) vektor juga memenuhi aturan-aturan (hukum) aljabar sebagai berikut (untuk vektor sembarang $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$):

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$	aturan komutatif penjumlahan
$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$	aturan asosiatif penjumlahan
$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$	aturan distributif
$(\alpha+\beta)\,\vec{x}=\alpha\,\vec{x}+\beta\,\vec{x}$	aturan distributif

Secara grafis untuk operasi penjumlahan vektor yang memenuhi hukum komutatif seperti aturan di atas, maka dapat kita misalkan untuk penjumlahan vektor $\vec{r}_1+\vec{r}_2=\vec{R}=\vec{r}_2+\vec{r}_1$ seperti Gambar 1.7.



Gambar 1.7
Wakilan grafis komutatif penjumlahan vektor

Dengan aturan penjumlahan segitiga, maupun jajaran genjang ini arah dan besar vektor resultan dapat ditentukan dari teorema Pitagoras dan trigonometri. Dalam hal ini besar vektor resultan dapat kita buktikan bahwa $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\neq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

C. VEKTOR SATUAN, VEKTOR KARTESIAN DAN WAKILAN ANALITIS VEKTOR

Seperti dijelaskan di atas, besar suatu vektor $\vec{A}$ adalah $\left|\vec{A}\right|$ = A dan merupakan bilangan non-negatif. Kemudian setiap vektor tak-nol, yaitu vektor yang besarnya tidak nol, dapat dilakukan skala dengan faktor skala adalah kebalikan besarnya vektor, yang selanjutnya memberikan definisi vektor satuan,

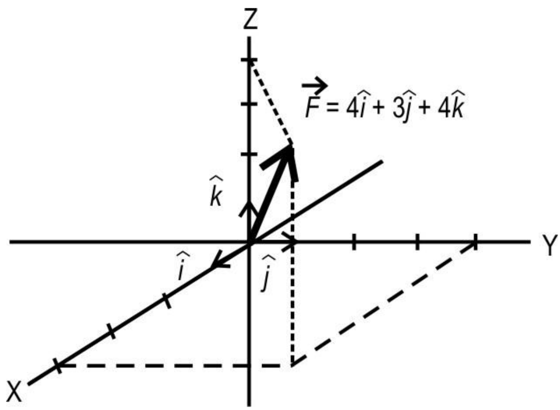
$$\hat{a}=\frac{1}{\left|\vec{A}\right|}\vec{A}=\frac{\vec{A}}{A} \qquad (\vec{A}=0) \qquad (1.3)$$

Vektor satuan $\hat{a}$ karena itu adalah vektor yang memiliki besar satu satuan dengan arah yang sama dengan vektor $\vec{A}$ asli. Dengan definisi ini maka sebuah vektor $\vec{A}$ sebaliknya dapat juga dinyatakan dalam suku-suku vektor satuan, misalnya

$$\vec{A} = |A|\,\hat{a} = A\hat{a} \tag{1.4}$$

Dengan kata lain sebarang vektor yang kolinear dengan vektor $\vec{A}$ akan dapat dinyatakan dalam suku-suku vektor satuan $\hat{a}$. Sebagai contoh sebuah vektor $\vec{B}$ yang mempunyai besar 10 satuan dengan arah yang sama dengan $\vec{A}$ dapat dituliskan sebagai $\vec{B} = 10\hat{a}$ satuan.

Penggambaran vektor dengan wakilan grafis berdasarkan anak panah meskipun secara visual mudah dicerna (untuk memberi gambaran penjumlahan dan perkalian vektor), namun untuk aplikasi (perhitungan-perhitungan praktis) dan terutama untuk penggambaran dalam ruang, wakilan grafis ini jarang digunakan karena tidak praktis. Untuk memudahkan kemudian di tempuh penggambaran vektor secara analitis, misalnya sebuah vektor $\vec{F} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ adalah mewakili vektor yang secara grafis (geometris) digambarkan seperti pada Gambar 1.8 dalam sistem koordinat kartesian 3 dimensi. Vektor satuan $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ digunakan untuk menggambarkan arah dari vektor-vektor kartesian (vektor dalam koordinat kartesian).

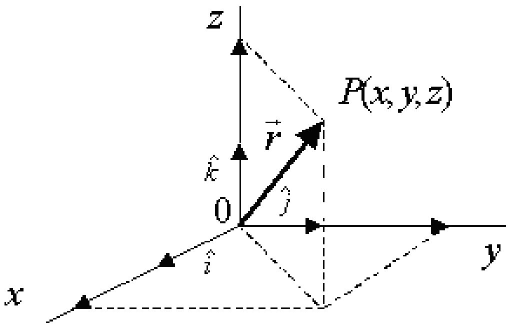


Gambar 1.8
Wakilan geometris vektor **F** dalam 3 dimensi (kartesian 3D)

Untuk dapat menyatakan sebuah vektor secara analitis, dalam sistem koordinat kartesian misalnya, didefinisikan dulu vektor satuan. Untuk koordinat kartesian maka $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ adalah vektor satuan yang ortonormal yaitu bernilai satu dan saling tegak lurus satu sama lain. Dalam wakilan kordinat kartesian ini maka sebuah vektor pergeseran $\vec{r}$ dapat dituliskan dengan

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.5}$$

Suku-suku $x\hat{i}, y\hat{j}, z\hat{k}$ masing-masing disebut *vektor-vektor komponen kartesian* dan vektor $\vec{r}$ diuraikan ke dalam komponen-komponennya. Jika sebuah vektor dinyatakan dalam vektor-vektor satuan kartesian maka vektor tersebut disebut *vektor kartesian*.



Gambar 1.9
Penguraian vektor dalam koordinat kartersian

Vektor $\vec{r} = \overline{OP}$ adalah vektor pergeseran dari titik asal koordinat *O* ke titik *P*(x,y,z), yang sering juga disebut dengan *vektor posisi* titik *P* atau vektor *jari-jari*. Dua buah titik dalam koordinat kartesian masing-masing dapat dinyatakan sebagai vektor posisi, misalnya titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan titik $O(x_2,y_2,z_2)$. Dapat dibentuk vektor $\overline{PQ}$ yang menghubungkan kedua titik dengan menggunakan *aturan penjumlahan* dua vektor, sehingga

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

Bila masing-masing vektor kita uraikan dalam komponen-komponennya yaitu

$\overline{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ dan $\overline{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ maka kita dapat menyatakan bahwa

$$\overline{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (1.6)$$

atau bila dituliskan singkat menjadi $\overline{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Secara umum untuk suatu vektor sembarang $\vec{A}$ maka dalam koordinat kartesian dapat kita tuliskan dengan:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (1.7)$$

atau dalam notasi singkat $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Bila $\vec{A} = \overline{PQ}$ maka $A_x = x_2 - x_1$, dst.

1. Besar dan Arah Vektor Kartesian

Besar vektor satuan dapat dihitung dari komponen-komponennya dengan menggunakan teorema Pitagoras. Dari Gambar (1.9) maka dapat kita hitung besarnya vektor pergeseran, yaitu:

$$\boxed{|\vec{r}| = |\overline{OP}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (1.8)$$

Sedangkan vektor relatif $\overrightarrow{PQ}$ mempunyai besar

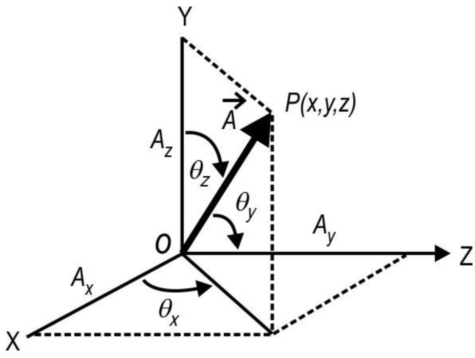
$$|\overline{PQ}| = |(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \qquad (1.9)$$

Untuk vektor sembarang $\vec{A}$ persamaan (1.7) mempunyai besar (*magnitude*):

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)} \qquad (1.10)$$

Untuk mengetahui arah vektor maka kita gunakan aturan trigonometri. Misalkan kita mempunyai vektor dalam koordinat kartesian yang sudut-sudutnya seperti pada Gambar 1.10. Dari trigonometri kita dapat menghitung sudut arah vektor sebagai berikut.

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos\theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos\theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \qquad (1.11)$$



Gambar 1.10
Sudut-sudut antara komponen-komponen vektor

dengan konvensi bahwa sudut-sudut θ tersebut bernilai dari 0 sampai 180°. Kosinus-kosinus dalam persamaan di atas kemudian disebut *kosinus-kosinus arah*. Dengan persamaan tersebut juga, maka dapat dihitung balik bahwa

$$A_x = |\vec{A}|\cos\theta_x = A\cos\theta_x \text{, dst.} \tag{1.12}$$

Kemudian jika kita lihat maka berlaku:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{1.13}$$

Penjumlahan dua vektor kartesian adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Catatan: Penguraian vektor dalam komponen-komponennya seperti pada persamaan (1.14) ini sangat membantu manakala Anda menyederhanakan persoalan yang melibatkan banyak vektor, seperti yang akan kita terapkan pada contoh-contoh problem fisika nantinya.

Contoh soal:

Sebuah titik dalam koordinat kartesian diberikan oleh koordinat (4,5,6). Carilah vektor posisi titik tersebut dan berapakah besar vektor posisi tersebut?

Penyelesaian:

Definisi: Vektor posisi adalah vektor jarak yang ditarik dari titik asal sistem koordinat ke titik yang ditinjau. Oleh karena itu vektor posisi titik (4,5,6) adalah $\vec{R} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ yang mempunyai besar $R = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$ satuan.

Contoh Soal:

Dua buah vektor $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ dan $\vec{B} = 3\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$. Carilah vektor jumlah (resultan) dari dua vektor tersebut dan berapakah besarnya?

Penyelesaian:

Apabila vektor hasil tersebut adalah $\vec{C}$ maka $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2+3)\hat{i} + (-3-7)\hat{j} + (4-4)\hat{k} = 5\hat{i} - 10\hat{j}$ dan $C = |\vec{C}|$ = $\sqrt{125}$ satuan. Arahnya dapat Anda tentukan dengan menghitung sudut.

D. EKSPERIMEN GAYA (VEKTOR)

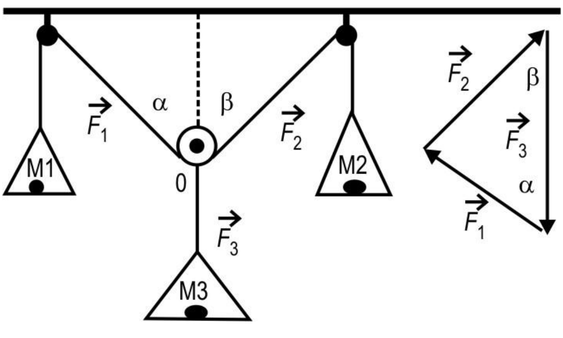
Sampai saat ini kita hanya membahas vektor secara umum, dan sifat-sifat vektor dievaluasi untuk vektor pergeseran. Di dalam sains dan teknik banyak sekali besaran-besaran fisika yang memenuhi sifat-sifat vektor seperti telah disampaikan di atas, misalnya gaya, kecepatan, percepatan dan lain-lain. Kita tinjau vektor gaya gravitasi ini (nanti akan kita bahas secara khusus mengenai vektor gaya). Semua vektor mematuhi hukum-hukum yang sama seperti telah kita tetapkan untuk vektor pergeseran sehingga:

> Sebuah vektor adalah sembarang besaran (variabel fisis) yang mempunyai besar (*magnitude*) dan arah di dalam ruang dan dapat dikombinasi dengan vektor yang lain menurut aturan perjumlahan segitiga dan juga aturan penjumlahan jajaran genjang.

Definisi ini sekaligus dapat digunakan untuk memastikan apakah suatu besaran merupakan vektor atau tidak (yaitu skalar). Kita tinjau sistem gaya yang bekerja dalam sistem kesetimbangan katrol (*pulleys*). Jelas gaya mempunyai besar yang dapat diukur (dalam newton *N*) dan arahnya dapat ditentukan menurut kerangka acuan. Kita lihat sistem katrol dalam Gambar

1.11 yang terdiri dari tiga buah gaya yang kita gambarkan secara diagramatik.

Untuk membuktikan bahwa gaya sebenarnya adalah sebuah vektor maka kita harus dapat membuktikan bahwa bila dua buah gaya dikenakan pada sebuah titik secara simultan maka harus ada gaya tunggal yang ekuivalen dengan resultan kedua gaya, menurut aturan penjumlahan segitiga. Akan lebih mudah jika kita tinjau tiga gaya tersebut dalam koordinat kartesian (tegak lurus) dua dimensi, di mana ketiga gaya bertemu di titik O (lihat Gambar 1.11) dan kita atur gaya (ambil $\vec{F}_3$) sampai terjadi kesetimbangan. Besar dan arah vektor lain $\vec{F}_1$ dan $\vec{F}_2$ dapat di atur dengan mengubah berat M_1 dan M_2 sekaligus menentukan α dan β. Besarnya $\vec{F}_3$ yang mempunyai arah tetap ke bawah diatur dengan mengubah berat F_3 sampai terjadi kesetimbangan. Ketiga vektor yang saling menyeimbangkan dikatakan berada dalam keadaan *setimbang* dan dipenuhi bahwa $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. Sifat vektor suatu gaya dibuktikan jika dengan semua cara penyusunan yang memberikan keadaan setimbang, maka anak panah-anak panah yang merepresentasikan ketiga vektor membentuk segitiga seperti pada Gambar 1.10 yang menyatakan persamaan vektor $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.



Gambar 1.11
Diagram gaya sistem katrol memenuhi aturan penjumlahan segitiga

Dalam menangani perhitungan yang melibatkan besaran vektor seperti dalam mekanika terutama untuk sistem di mana berlaku kondisi kesetimbangan gaya-gaya maka akan sangat mudah dan membantu jika kita dapat menggambarkan diagram gaya-gaya yang bekerja pada sistem. Demikian juga meskipun ada baiknya dalam setiap tahap perhitungan kita sertakan juga satuan untuk masing-masing besaran yang dihitung, namun juga dapat mengabaikan dulu satuan besaran tersebut sementara manipulasi aljabar sedang dilakukan. Demikian juga untuk memperjelas dan memudahkan perhitungan, sebaiknya dipilih juga sistem koordinat yang cocok untuk setiap masalah yang ingin dipecahkan.

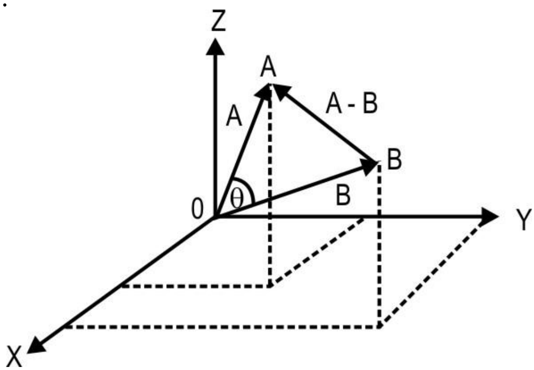
E. PERKALIAN VEKTOR

Kita telah membahas perkalian vektor dengan skalar (*scaling*) serta penjumlahan vektor dengan vektor. Sekarang Anda akan mempelajari perkalian vektor dengan vektor, yang merupakan operasi vektor yang sangat penting dan mempunyai aplikasi luas baik sains dan teknologi. Ada dua operasi penting perkalian vektor-vektor, yaitu:

1. **Perkalian Skalar** (*dot product/scalar product/inner product*). Perkalian ini disebut demikian karena hasil perkalian adalah suatu skalar/bilangan.
2. **Perkalian Vektor** (*cross product/vektor product/outer product*). Perkalian ini akan menghasilkan vektor lain.

1. Perkalian Skalar

Perkalian skalar mempunyai implikasi dan interpretasi penting secara geometris. Beberapa hukum fisika juga menerapkan perkalian skalar ini dalam rumusannya. Kita misalkan vektor **A** dan vektor **B** seperti pada Gambar 1.12.



Gambar 1.12
Produk skalar dua vektor

Pada gambar tersebut vektor **A** adalah panah 0A vektor **B** adalah panah 0B dengan sudut antara dua vektor adalah θ dengan $0 \le \theta \le \pi$. Vektor (**A – B**) adalah selisih dua vektor. Dengan menerapkan hukum kosinus dalam trigonometri (Anda sebaiknya masih ingat hukum ini) maka:

$$|BA|^2 = |0A|^2 + |0B|^2 - 2|0A||0B|\cos\theta \tag{1.15}$$

atau

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \tag{1.16}$$

Definisi:

Kemudian jika kita mempunyai dua vektor sembarang **P** dan **Q**, yang merupakan vektor kartesian, dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\vec{P} = p_1\hat{e}_1 + p_2\hat{e}_2 + p_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} p_i\hat{e}_i \tag{1.17}$$

$$\vec{Q} = q_1\hat{e}_1 + q_2\hat{e}_2 + q_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} q_i\hat{e}_i \tag{1.18}$$

dengan $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \equiv \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ adalah vektor satuan. Maka hasil kali skalar dua vektor **P** dan **Q** yaitu $\vec{P} \bullet \vec{Q}$ (baca pe dot qi) didefinisikan sebagai berikut:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \tag{1.19}$$

Dari definisi persamaan (1.19) ini maka kita dapat menyimpulkan juga beberapa hal:

(a) $\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$ (hukum komutatif)

(b) $\vec{P} \bullet \vec{P} = |\vec{P}|^2$

Dengan sifat-sifat ini maka untuk vektor **A** dan **B** dalam Gambar 1.12 kita dapat menyatakan persamaan (1.16):

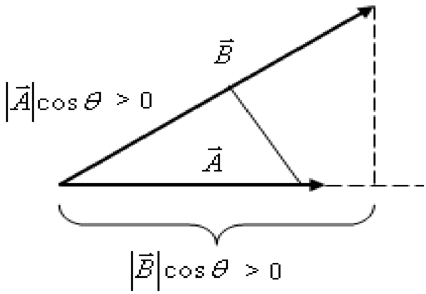
$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = (\vec{A} - \vec{B}) \bullet (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \bullet \vec{A} - \vec{A} \bullet \vec{B} - \vec{B} \bullet \vec{A} + \vec{B} \bullet \vec{B}$$

$$= |\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \bullet \vec{B} + |\vec{B}|^2 \tag{1.20}$$

Membandingkan persamaan (1.20) dan (1.16) maka kita dapatkan:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta \qquad (1.21)$$

Interpretasi geometris dari perkalian skalar ini (persamaan (1.21)) adalah seperti pada Gambar 1.13 berikut.



Gambar 1.13
Interpretasi geometris perkalian vektor

Jika kita lihat dari Gambar 1.13 maka $\left|\vec{B}\right| \cos\theta$ tidak lain adalah proyeksi ortogonal (tegak lurus) besar (*magnitude*) vektor **B** kepada vektor **A**. Kita menyatakan ini sebagai *komponen **B** pada **A***. Sebaliknya $\left|\vec{A}\right| \cos\theta$ adalah proyeksi vektor **A** pada **B** dan ini merupakan *komponen **A** pada **B***. Jadi perkalian skalar dua vektor dapat juga dinyatakan sebagai:

> Hasil kali skalar vektor A dan B adalah hasil kali   dan komponen B pada A, atau hasil kali dengan komponen A pada B.

Dari persamaan (1.21) kita juga mempunyai:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} \qquad (1.22)$$

2. Penggunaan Konsep Perkalian Skalar dalam Fisika

Perkalian skalar mendapat tempat yang cukup penting dalam usaha menuliskan rumus-rumus/hukum-hukum fisika. Pada kegiatan belajar yang lain kita dapat merumuskan usaha *W* yang dilakukan oleh gaya pada sebuah obyek sebagai perkalian skalar antara vektor gaya **F** dan vektor pergeseran **S**.

Di samping ini masih banyak hukum-hukum atau rumus-rumus fisika yang dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar.

Contoh Soal:

Dua buah vektor adalah $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. Tentukan komponen **A** pada **B** dan juga komponen **B** pada **A**?

Penyelesaian:

Dari definisi, maka komponen **A** pada **B** adalah $|\vec{A}|\cos\theta$, dengan persamaan (1.22) maka $|\vec{A}|\cos\theta =$ $\vec{A} \bullet \vec{B} / |\vec{B}|$. Dengan persamaan (1.19) dapat kita hitung dahulu: $\vec{A} \bullet \vec{B} = 2(1) + (-1)2 + 1(-2) = -2$, sedangkan $|\vec{B}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Itu berarti $|\vec{A}|\cos\theta$ =-2/3. Dengan cara yang sama dapat dihitung $|\vec{B}|\cos\theta = -\sqrt{6}/3$.

Contoh Soal:

Carilah sudut antara vektor $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$?

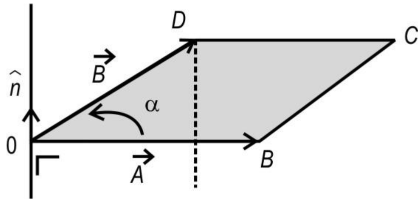
Penyelesaian:

Kita gunakan rumus gabungan dari persamaan (1.19) dan (1.21) yaitu $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$. Kita hitung bahwa $\vec{A} \bullet \vec{B} = 2(1) + (-1)2 + (-2)2 = -4$. Dengan persamaan (1.10) maka $|\vec{A}| = 3$ dan $|\vec{B}| = 3$. Dengan persamaan (1.22) maka $\cos\theta = -4/9$. Jadi sudut antara kedua vektor adalah:

$$\theta = \arccos(-4/9) = 116^\circ 23'$$

3. Perkalian Silang

Hasil kali vektor antara dua vektor (perkalian silang/*cross-product/outter-product/vector product*) memiliki aplikasi yang luas baik dalam fisika maupun teknik. Bagaimana operasi vektor ini muncul secara alamiah marilah kita tinjau lebih dulu bidang luasan jajaran genjang seperti pada Gambar 1.14 di bawah ini.



Gambar 1.14
Luasan jajaran genjang untuk definisi perkalian vektor

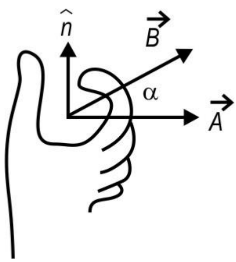
Dari Gambar (1.14) ini maka luas jajaran genjang adalah

$$L = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha \tag{1.23}$$

Kemudian dapat kita definisikan vektor luasan jajaran genjang tersebut $\vec{L}$ dengan luas L dan mempunyai arah tegak lurus bidang luasan tersebut, misal arahnya dinyatakan oleh vektor satuan $\hat{n}$ yaitu

$$\vec{L} = L\hat{n} = (AB\sin\alpha)\hat{n} \tag{1.24}$$

Kalau kita lihat, vektor luasan ini adalah hasil kali dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dan mempunyai arah tegak lurus $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yaitu $\hat{n}$. Akan tetapi ada dua pilihan arah bidang yang tegak lurus luasan L yaitu $\hat{n}$ dan $\hat{n}$'=- $\hat{n}$. Sehingga untuk perkalian vektor kita definisikan menurut *aturan tangan kanan* (*right-handed rule*), seperti pada Gambar 1.15 di bawah ini.



Gambar 1.15
Kaidah tangan kanan

Dengan aturan tangan kanan ini maka hasil kali vektor (*cross product*) dari dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\alpha)\hat{n}$ Untuk $(0 \leq \alpha \leq 180^{o})$ (1.25)

Perkalian ini juga sering disebut dengan *perkalian silang* dua vektor mengingat simbol silang di antara dua vektor selalu dimaknai sebagai persamaan (1.25). Besarnya vektor hasil kali silang di atas adalah suku dalam tanda kurung pada persamaan.

Kemudian berkaitan dengan pilihan arah menurut aturan tangan kanan dan sifat-sifat perkalian silang tersebut dapat kita ringkas di sini:

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (anti komutatif) (1.26)

$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C})$ (hukum distributif) (1.27)

$\vec{A} \times (\lambda\vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \times \vec{B} = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$ (1.28)

$\vec{A} \times \vec{A} = 0 \qquad \vec{B} \times \vec{B} = 0$ (1.29)

a. Bentuk Kartesian Hasil Kali Vektor

Penguraian vektor dalam basis kartesian akan sangat memudahkan kita dalam memecahkan persoalan vektor. Misalkan kita tinjau vektor basis dalam koordinat kartesian ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) yang menurut persamaan (1.19) dan persamaan (1.26) berlaku

$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$ (1.30)

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ (1.31)

Dalam basis ini maka dapat kita hitung

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

Dengan mengingat sifat-sifat perkalian dalam persamaan (1.30) dan (1.31) maka dengan hukum distributif dapat kita nyatakan:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

(1.32)

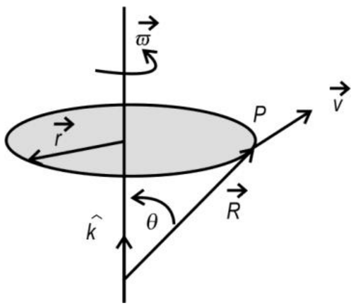
Atau untuk memudahkan mengingat dapat kita nyatakan dalam bentuk determinan matriks:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{1.33}$$

yang penjabarannya adalah persamaan (1.32).

b. Aplikasi Hasil Kali Vektor dalam Fisika

Penerapan konsep perkalian silang dalam fisika cukup banyak, di antaranya adalah untuk menggambarkan gerak rotasi dalam bidang lingkaran dengan sumbu rotasi pada sumbu z, seperti pada Gambar 1.16.



Gambar 1.16
Gerak orbit partikel dalam bidang lingkaran

$\vec{R}$ adalah vektor posisi partikel di titik *P*,
$\vec{\upsilon}$ adalah kecepatan linear partikel menyinggung lintasan orbit lingkaran,
$\vec{\omega}$ adalah kecepatan sudut partikel mengelilingi sumbu z (vektor satuan $\hat{k}$),
α adalah sudut antara vektor posisi $\vec{R}$ dengan vektor $\vec{\omega}$.

Pada kesempatan yang akan datang akan kita tinjau gerak ini secara rinci memanfaatkan konsep perkalian silang.

F. OPERASI KALKULUS VEKTOR

Anda telah mempelajari operasi aljabar dari sebuah vektor, yaitu mengenai penjumlahan vektor, pengurangan vektor, perkalian skalar sampai perkalian silang. Sekarang Anda akan mempelajari operasi kalkulus vektor yang melibatkan diferensial dan integral. Berkaitan dengan ini maka banyak konsep-konsep fisika yang memerlukan bantuan operasi kalkulus vektor. Kita mulai kuliah kalkulus vektor ini dengan melihat diferensial vektor.

1. Diferensial Vektor

Untuk tujuan di atas, maka sebelum kita pelajari lebih lanjut, kita definisikan dulu pengertian diferensial dari teorema limit fungsi berikut ini.

a. Diferensial Vektor terhadap Variabel Waktu

Diferensial vektor secara umum memenuhi aturan seperti diferensial fungsi biasa. Dari teorema limit fungsi maka untuk suatu vektor $\vec{a}(t)$, diferensial (turunan) pertamanya adalah

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \tag{1.34}$$

Oleh karena itu dapat kita ringkas beberapa aturan diferensial vektor sebagai berikut, khususnya diferensial vektor hasil operasi vektor dan skalar:

$$\frac{d(\vec{F}+\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt} + \frac{d\vec{G}}{dt} \tag{1.35}$$

$$\frac{d(\vec{F}\bullet\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt}\bullet\vec{G} + \vec{F}\bullet\frac{d\vec{G}}{dt} \tag{1.36}$$

$$\frac{d(\vec{F}\times\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G} + \vec{F}\times\frac{d\vec{G}}{dt} \tag{1.37}$$

$$\frac{d(f\vec{G})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{G} + f\,\frac{d\vec{G}}{dt} \tag{1.38}$$

Jika $\vec{G}$ adalah vektor konstan, maka diferensialnya adalah

$$\frac{d(f\vec{G})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{G} \tag{1.39}$$

Jika vektor diuraikan dalam basis kartesian maka diferensial terhadap waktu adalah sebagai berikut.

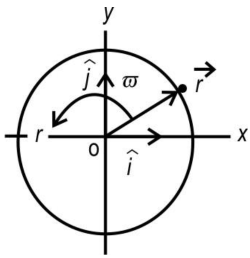
$$\frac{d(\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})}{dt} = \frac{dF_x}{dt}\hat{i} + \frac{dF_y}{dt}\hat{j} + \frac{dF_z}{dt}\hat{k} \tag{1.40}$$

Contoh Soal:

Kita tinjau partikel yang bergerak melingkar beraturan dalam bidang *x-y* (kartesian dua dimensi). Lintasan gerak partikel membentuk lingkaran dengan jari-jari *r* dan partikel bergerak dengan laju konstan *v* (lihat gambar). Carilah kecepatan dan percepatan partikel tersebut?

Penyelesaian:

Untuk memudahkan perhitungan dan pemahaman kita lihat Gambar 1.17 berikut ini.



Gambar 1.17
Gerak melingkar beraturan partikel *m*

Vektor posisi dari partikel *m* dapat kita tuliskan (seperti yang telah kita pelajari sebelumnya)

$$\vec{r}(t) = r(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t) \qquad \text{(i)}$$

Kecepatan gerak partikel *m* dapat kita hitung dari diferensial terhadap waktu, yaitu

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{i}\cos\omega t)}{dt} + \frac{d(r\hat{j}\sin\omega t)}{dt} \qquad \text{(ii)}$$

atau

$$\vec{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t)\hat{i} + (r\omega\cos\omega t)\hat{j} = -r\omega(\hat{i}\sin\omega t - \hat{j}\cos\omega t) \qquad \text{(iii)}$$

Percepatan partikel dapat kita hitung dari diferensial kecepatan:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega(-r\omega)(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}(t) \qquad \text{(iv)}$$

Tanda negatif pada persamaan (iv) bermakna bahwa percepatan ($\vec{a}$) adalah vektor radial ke pusat lingkaran, sehingga sering disebut *percepatan sentripetal*.

Persamaan-persamaan yang telah diturunkan ini dengan konsep diferensial hanya berlaku untuk vektor yang dinyatakan dalam vektor basis ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) yang konstan yaitu tidak bergantung waktu. Jika ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) merupakan fungsi waktu, khususnya ini terjadi bila gerak partikel digambarkan dalam koordinat kurva linear (seperti koordinat bola, silinder dan kutub) maka kita perlu mendiferensialkan juga vektor-vektor satuan ini.

Contoh Soal:

Tinjaulah gerak partikel dalam koordinat kurva linear kutub, di mana setiap titik dalam koordinat dinyatakan dengan koordinat (r, θ).

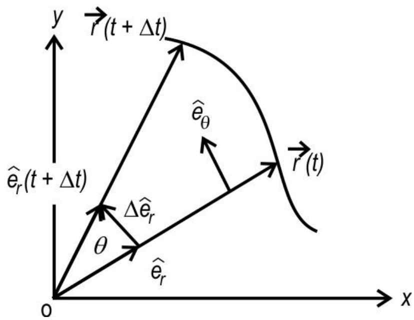
Penyelesaian:

Vektor posisi dengan koordinat polar dengan vektor satuan ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$) seperti pada Gambar 1.18 , yaitu

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{1.41}$$

Kita lihat bahwa $\hat{e}_r$ vektor satuan dalam arah $\vec{r}$ selalu berubah terhadap waktu. Diferensial terhadap waktu persamaan (1.41) menghasilkan kecepatan:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \tag{1.42}$$



Gambar 1.18
Gerak partikel dalam koordinat kutub

Dari gambar ini maka $\Delta\hat{e}_r$ adalah dalam arah $\hat{e}_\theta$ yang tegak lurus $\hat{e}_r$ dan dalam arah mana θ bertambah . Jadi dapat kita ambil pendekatan bahwa

$$\Delta\hat{e}_r \approx \left\|\Delta\hat{e}_r\right\|\hat{e}_\theta \approx \left\|\hat{e}_r\right\|\Delta\theta\hat{e}_\theta$$

(1.43)

dengan $\left\|\Delta\hat{e}_r\right\|$ adalah panjang busur lingkaran dengan radius $\left\|\hat{e}_r\right\|$ dan sudut θ. Akan tetapi karena $\hat{e}_r$ adalah fungsi waktu maka $\Delta\hat{e}_r \approx \Delta\theta\hat{e}_\theta$ dan $\frac{\Delta\hat{e}_r}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{e}_\theta$. Jika $\Delta t \to 0$ maka

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta \equiv \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (1.44)$$

Dengan ini maka persamaan (1.42) dapat kita tuliskan menjadi

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (1.45)$$

Selanjutnya kita dapat melihat dari gambar bahwa $\hat{e}_\theta \bullet \hat{e}_r = 0$ karena kedua vektor satuan saling tegak lurus. Oleh karena itu berlaku

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\hat{e}_r \bullet \hat{e}_\theta\right) = \frac{d\hat{e}_r}{dt} \bullet \hat{e}_\theta + \hat{e}_r \bullet \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \qquad (1.46)$$

yang dengan persamaan (1.43) menjadi:

$$0 = \dot{\theta} + \hat{e}_r \bullet \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \to \hat{e}_r \bullet \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \qquad (1.47)$$

Sebaliknya $\hat{e}_\theta \bullet \hat{e}_\theta = 1$ sehingga diferensial terhadap waktu menghasilkan

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{e}_\theta \bullet \hat{e}_\theta\right) = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \bullet \hat{e}_\theta + \hat{e}_\theta \bullet \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = 0 \to \hat{e}_\theta \bullet \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = 0 \qquad (1.48)$$

Akan tetapi $\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$ adalah vektor dalam bidang tersebut sehingga dapat kita tuliskan bahwa

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \alpha\hat{e}_r + \beta\hat{e}_\theta \qquad (1.49)$$

Dengan persamaan (1.49), (1.45),(1.46) maka dapat kita simpulkan bahwa

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{e}_r \qquad (1.50)$$

Dengan persamaan (1.50) dan (1.44) maka percepatan partikel dalam koordinat kutub adalah

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{a}}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\dot{\hat{e}}_\theta}{dt} \qquad (1.51)$$

$$=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad (1.52)$$

Contoh Soal:

Sebuah partikel mempunyai lintasan gerak yang dinyatakan dengan fungsi jarak sebagai berikut: $\vec{r}(t)=(t^3+2t)\hat{i}-3e^{-2t}\hat{j}+2\sin(5t)\hat{k}$. Carilah kecepatan partikel pada saat t = 0?

Penyelesaian:

Dengan aturan diferensial seperti yang telah kita pelajari maka kecepatan partikel adalah:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=(3t^2+2)\hat{i}+6e^{-2t}\hat{j}+10\cos(5t)\hat{k}$$

Untuk $\vec{v}(t=0)$ maka dapat dihitung:

$$\vec{v}(t=0)=\ 2\hat{i}+6\hat{j}+10\hat{k}$$

b. Gradien, Divergensi, dan Curl

Jika diferensial vektor di atas menggunakan aturan diferensial biasa, maka sekarang kita pelajari beberapa definisi mengenai operasi diferensial vektor yang sangat penting dan sering muncul dalam fisika. Itu adalah konsep gradien, divergensi, dan curl.

Konsep *medan* (*fields*) memerankan aturan kunci dalam banyak bidang fisika dan teknik, seperti dinamika fluida, transport panas, elektromagnetik, gravitasi. Pada kajian-kajian bidang tersebut, sering melibatkan besaran-besaran fisis yang baik nilai maupun arahnya berubah dari satu titik ke titik (dari satu waktu ke waktu) sehingga merupakan fungsi koordinat ruang (dan waktu) yaitu menggambarkan suatu distribusi nilai (dan arah) suatu besaran. Konsep distribusi ini melandasi konsep *medan* dalam fisika. Besaran fisis tersebut dapat berupa skalar sehingga disebut medan skalar atau dapat berupa vektor sehingga disebut medan vektor. Contoh dari medan skalar adalah *temperatur atmosfer* yang nilainya hanya bergantung pada koordinat ruang (fungsi ruang, $f(x,y,z)$) misalnya dalam sumbu koordinat ekuator dan kutub, dan (atau) juga merupakan fungsi waktu misalnya saat musim dingin dan musim panas. Oleh karena itu secara umum medan skalar memenuhi bentuk fungsi $f(r,t)$. Contoh medan vektor adalah *kecepatan angin*, karena

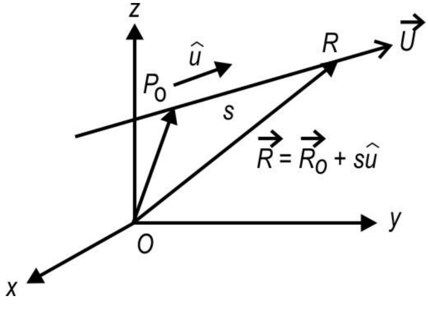
(i) kecepatan adalah vektor;
(ii) memiliki besar dan arah yang merupakan fungsi koordinat ruang-waktu.

Secara umum medan vektor dinyatakan dengan bentuk fungsi $\vec{f}(\vec{r},t)$.

1) Gradien Medan Skalar

Sementara itu dalam banyak fenomena fisika, laju perubahan fungsi skalar terhadap jarak merupakan kasus yang sering muncul. Sebagai contoh laju perubahan potensial elektrostatis terhadap jarak menghasilkan medan elektrostatik. Kita akan membahas gradien medan skalar yang dikaitkan dengan laju perubahan fungsi (medan) skalar tersebut. Untuk itu kita perlu mendefinisikan apa yang disebut turunan arah (*directional derivative*) suatu medan skalar.

Jika f adalah medan skalar yang dapat dideferensialkan dalam domain D. Turunan pertama fungsi ini (yaitu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$) menggambarkan *laju perubahan nilai fungsi f dalam arah sumbu koordinat x,y,z masing-masing*. Dalam hal ini dalam banyak aplikasi fisika kita memerlukan untuk mengetahui *laju perubahan fungsi f dalam arah sembarang*. Untuk menentukan ini maka kita memerlukan konsep turunan arah tersebut di atas. Lihat Gambar 1.19 berikut.



Gambar 1.19
Definisi turunan arah fungsi

Gambar menyatakan sebuah vektor posisi $\vec{R}_0$ untuk titik P_0 dan vektor sembarang $\vec{U} = s\hat{u}$ dengan $\hat{u}$ adalah vektor satuan dan *s* adalah pengali biasa dan tidak lain adalah jarak dari titik P_0 ke titik sembarang R. Dari definisi vektor satuan dan perkalian skalar, maka kita boleh menyatakan vektor satuan $\hat{u}$ ini dengan:

$$\hat{u} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

(1.53)

Vektor satuan $\hat{u}$ ini memberikan definisi arah pada vektor $\vec{U}$ pada titik P_0. Titik-titik pada segmen garis s dalam arah $\hat{u}$ diberikan oleh:

$$x = x_0 + s\cos\alpha\,;\;\; y = y_0 + s\cos\beta\,;\;\; z = z_0 + s\cos\gamma \qquad (1.54)$$

Definisi turunan arah sangat mirip dengan definisi turunan biasa dalam kalkulus, yaitu turunan *f* di titik P_0 dalam arah $\hat{u}$ adalah sebuah limit,

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds}(P_0) &= \lim_{s\to 0}\frac{f(P) - f(P_0)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}\end{aligned} \qquad (1.55)$$

Jika kita tetapkan bahwa,

$$g(s) = f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) \qquad (1.56)$$

maka persamaan (1.55) menjadi:

$$g'(0) = \lim_{s\to 0}\frac{g(s) - g(0)}{s} \qquad (1.57)$$

Sekarang jika kita diferensialkan persamaan (1.56) terhadap s lalu mengambil s = 0 maka:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\frac{dz}{ds} \qquad (1.58)$$

Sementara itu dari persamaan (1.54) kita mempunyai:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha\,,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta\,,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma \qquad (1.59)$$

Jadi turunan arah di titik P_0 dalam arah vektor satuan $\hat{u}$ adalah

$$\frac{df}{ds}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cos\gamma \qquad (1.60)$$

Contoh Soal:

Tentukan turunan arah dari $f = 2x^2 + xy + yz^2$ pada titik (1,-1,2) dalam arah vektor $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$?

Penyelesaian:

Turunan parsial→ $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z^2$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy$

Sehingga pada titik (1,-1,2) nilai perubahan fungsi adalah

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y = 3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z^2 = 5$ dan $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy = -4$

Kita perlu menentukan vektor satuan **A** yaitu $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{3}\vec{A}$. Oleh karena itu turunan arah pada titik (1,-1,2) pada arah **A** adalah:

$$\frac{df}{ds}(1,-1,2) = 3(1/3) + 5(-2/3) - 4(2/3) = -5$$

Setelah kita mendefinisikan turunan arah maka kita sekarang siap mendefinisikan apa yang disebut gradien medan skalar. Jika *f* adalah medan skalar dalam domain D dan terdeferensial di D. Turunan arah *f* di titik P dalam arah vektor satuan $\hat{u} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ adalah

$$\frac{df}{ds}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\cos\gamma \qquad (1.61)$$

Kita <u>definisikan</u> sebuah vektor berbentuk:

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\hat{k}$$ (baca grad f atau del f atau nabla f) (1.62)

Dengan persamaan (1.61) dan definisi perkalian skalar maka kita mempunyai:

$$\frac{df}{ds}(P) = \nabla f(P) \bullet \hat{u} \qquad (1.63)$$

Persamaan (1.62) kita lihat adalah medan vektor (berbentuk vektor) dan kita sebut gradien medan skalar. Besaran ini merupakan satu dari konsep penting dalam analisis vektor dan mempunyai aplikasi yang sangat penting dalam fisika.

Dalam hal ini kita telah menyatakan dalam persamaan di atas bahwa operator *del* (∇) yang dituliskan sebagai berikut.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \tag{1.64}$$

Jadi kita tuliskan lagi bahwa **gradien** dari medan skalar sebarang ϕ adalah:

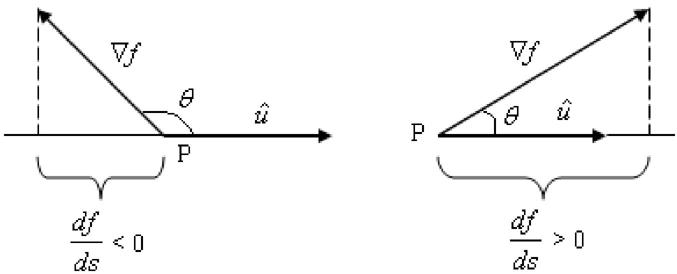
$$\vec{\nabla}\phi = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \tag{1.65}$$

2) Interpretasi Geometris Grad f

Sekarang kita tinjau beberapa aspek geometris dari gradien medan skalar. Misalkan $\vec{\nabla} f(P) \neq 0$ dan θ adalah sudut antara $\vec{\nabla} f(P)$ dan $\hat{u}$. Kemudian dari sifat geometris perkalian skalar kita mempunyai relasi:

$$\frac{df}{ds}(P) = \nabla f(P) \bullet \hat{u} = |\nabla f(P)||\hat{u}|\cos\theta = |\nabla f(P)|\cos\theta \tag{1.66}$$

Ini menunjukkan bahwa turunan arah medan skalar *f* pada titik P dalam arah vektor satuan $\hat{u}$ adalah komponen vektor gradien $\vec{\nabla} f(P)$ pada arah $\hat{u}$ (lihat Gambar 1.20).



Gambar 1.20
Vektor gradien $\vec{\nabla} f(P)$

Kita lihat dari gambar tersebut maka turunan arah akan maksimum jika $\cos\theta = 1$ yaitu ketika $\hat{u}$ adalah sama arahnya dengan $\vec{\nabla} f(P)$. Nilai maksimumnya adalah $\left|\vec{\nabla} f(P)\right|$. Karena $\left|\vec{\nabla} f(P)\right|$ > 0 jika tidak *f* adalah nol, maka berarti *f* bertambah dalam arah vektor $\vec{\nabla} f(P)$. Dengan kata lain pada titik P, medan skalar *f* mengalami laju pertambahan maksimum dalam arah vektor gradien $\vec{\nabla} f(P)$.

Contoh Soal:

Diberikan f(x,y,z) = $x^2y + y^2z+1$. Carilah arah di mana turunan arah *f* pada titik (2,1,3) adalah maksimum dan berapakah nilai maksimumnya?

Penyelesaian:

Nilai maksimum turunan arah *f* pada titik (2,1,3) terjadi dalam arah vektor gradien $\nabla f(2,1,3)$. Jika $\nabla f = 2xy\hat{i} + (x^2 + 2yz)\hat{j} + y^2\hat{k}$ maka $\nabla f(2,1,3)$ = $4\hat{i} + 10\hat{j} + \hat{k}$. Jadi nilai maksimum turunan arah adalah $\left|\vec{\nabla} f(2,1,3)\right| = \sqrt{117}$.

Contoh Soal:

Andaikan distribusi temperatur dalam sebuah bola logam diberikan oleh T(x,y,z) = $a(x^2+y^2+z^2)$ dengan *a* adalah konstanta positif. Tunjukkan arah di mana terjadi pendinginan maksimum (*maximum cooling*)?

Penyelesaian:

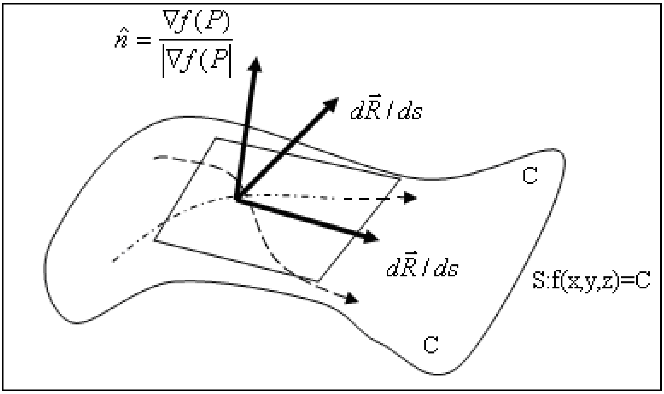
Laju maksimum pertambahan temperatur terjadi dalam arah vektor,

Grad T = $2a(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = 2a\vec{R}$

dengan **R** adalah vektor posisi titik (x,y,z). Jadi pendinginan maksimum terjadi dalam arah berlawanan dengan vektor grad T yaitu arah – **R**, yaitu ke arah titik asal.

Selain makna geometris di atas maka dari gradien medan $\vec{\nabla} f(P)$ kita dapat mencari arah vektor satuan tegak lurus bidang/luasan f(x,y,z)=c (Gambar 1.21). Tanpa penjelasan lebih lanjut maka vektor satuan ini (vektor normal) $\hat{n}$ dapat dihitung dengan:

$$\hat{n} = \frac{\nabla f(P)}{\left|\nabla f(P\right|} \qquad (1.67)$$



Gambar 1.22
Vektor normal terhadap luasan S

3) Divergensi Medan Vektor

Ada dua konsep dasar berkenaan dengan laju perubahan spasial medan vektor, **F** misalnya, yaitu div **F** dan curl **F**. Kita lihat kembali operator del atau nabla yang berbentuk

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Misalkan kita mempunyai medan vektor **F** berbentuk umum dalam domain D,

$$\vec{F}(x,y,z) = A(x,y,z)\hat{i} + B(x,y,z)\hat{j} + C(x,y,z)\hat{k}$$

(1.68)

dengan A,B,C mempunyai diferensial orde pertama yang kontinu. Divergensi **F** kemudian di<u>definisikan</u> dengan,

div **F** = $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$ (baca: divergensi F) (1.69)

Jika kita gunakan operator del pada **F,** yaitu

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \bullet (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k})$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \qquad (1.70)$$

Jadi dapat dituliskan

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \bullet \vec{F} \tag{1.71}$$

Dalam hal ini $\vec{\nabla}$ bukanlah vektor yang sesungguhnya, namun lebih sebagai operator diferensial, sehingga $\vec{\nabla} \bullet \vec{F} \neq \vec{F} \bullet \vec{\nabla}$ yaitu tidak komutatif.

Dari definisi divergensi ini kemudian dapat dilihat mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

(i) div (**F** + **G**) = div **F** + div **G**

(ii) div (div **F**)= $\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}$ **F** = $\vec{\nabla}^2$**F**= $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ (1.72)

Persamaan (ii) ini dikenal dengan Laplacian **F** yaitu $\vec{\nabla}^2$**F.** Aplikasi fisis untuk divergensi dalam fisika cukup penting, seperti pada studi dinamika fluida.

Contoh Soal:

Tentukan divergensi dari medan vektor $\vec{F} = x^2 y\hat{i} + e^y z\hat{j} + x\sin z\hat{k}$

Penyelesaian:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} + \frac{\partial(e^y z)}{\partial y} + \frac{\partial(x\sin z)}{\partial z} = 2xy + ze^y + x\cos z$$

4) Curl F

Jika kita mempunyai medan vektor dalam domain D berbentuk $\vec{F}(x,y,z) = A(x,y,z)\hat{i} + B(x,y,z)\,\hat{j} + C(x,y,z)\hat{k}$, maka didefinisikan bahwa curl **F** adalah

$$\text{curl } \vec{F} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\hat{k} \tag{1.73}$$

Bentuk ini mudah diingat jika kita nyatakan dalam bentuk determinan

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix} \tag{1.74}$$

Jika kita ingat operator del , $\vec{\nabla}$, maka kita dapat menyatakan juga bahwa curl **F** adalah perkalian silang $\vec{\nabla}$ dan **F** yaitu div **F** = $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (1.75)

Beberapa identitas untuk curl ini adalah sebagai berikut:

(i) curl (**F + G**) = curl **F** + curl **G**

(ii) curl (f**G) =** f curl **G** + grad f x **G**

Contoh Soal:

Sebuah medan vektor $\vec{A}=\hat{j}(xz^2-x^2y-z^2+3yz)+\hat{k}(2xyz)$. Hitunglah curl **A**?

Penyelesaian:

$$\text{curl } \vec{A}=(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z})\hat{i}+(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x})\hat{j}+(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y})\hat{k}$$

$$\text{curl } \vec{A} = \vec{F}=\hat{i}(2z-3y)-\hat{j}(2yz)+\hat{k}(z^2-2xy)$$

Banyak konsep-konsep fisika yang penting menggunakan definisi curl seperti pada listrik-magnet. Baik div **A** maupun curl **A** berkaitan dengan laju perubahan medan vektor **A** terhadap ruang. Konsep divergensi dan curl dalam fisika adalah fundamental untuk studi dinamika fluida. Dalam studi fluida maka hasil curl dapat diinterpretasikan sebagai kecenderungan medan kecepatan menyebabkan rotasi pada suatu titik.

G. INTEGRAL VEKTOR

Selain konsep diferensial medan dipelajari dalam analisis vektor, konsep integral medan juga tak kalah pentingnya untuk dikaji. Konsep integral medan banyak digunakan juga baik dalam fisika maupun teknik, khususnya dalam teori dan teknik elektromagnet.

Pada sub modul ini Anda akan mempelajari konsep integral garis dan integral permukaan dari medan vektor. Integral-integral ini sesungguhnya adalah generalisasi dari integral tunggal dan integral lipat biasa dari fungsi biasa , yaitu

$\int_a^b f(x)dx$ f terdefinisi dalam selang [a,b] dalam sumbu x

dan

$\iint_D f(x,y)dxdy$ f terdefinisi dalam bidang x-y

Sebaliknya dalam integral garis untuk medan (fungsi) vektor maka fungsi vektor ini didefinisikan pada kurva ruang dan integrasi dilakukan terhadap panjang busur kurva. Demikian juga untuk integral permukaan maka fungsi tersebut didefinisikan pada luasan (permukaan) dan integrasi dilakukan terhadap luas permukaan.

1. Integral Garis

Misalkan $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ adalah vektor posisi bergantung waktu yang menggambarkan sebuah kurva C yang menghubungkan dua titik P_1 dan P_2 pada waktu t = t_1 dan t = t_2. Jika ada vektor $\vec{A} = A(x,y,z) = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ yang merupakan medan vektor. maka *integral garis* didefinisikan sebagai integral komponen tangensial vektor **A** sepanjang kurva C dari P_1 ke P_2 yaitu:

$$\int_{P1}^{P2} \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \tag{1.76}$$

Jika C adalah lintasan tertutup (asumsi bagian kurva tidak bertemu di mana-mana selain di kedua ujung kurva) maka integral lintasan (garis) tertutup adalah:

$$\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \oint_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \tag{1.77}$$

Secara umum integral garis ini nilainya bergantung pada lintasan yang dipilih. Integral pada persamaan (1.76) akan bebas lintasan jika dipenuhi $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

2. Integral Garis Vektor

Integral garis menghasilkan skalar sehingga kita menyebutnya sebagai <u>integral garis skalar.</u> Ada juga integral garis yang menghasilkan vektor. <u>Integral garis vektor</u> ini banyak juga aplikasinya khususnya dalam teori elektromagnetik. Misalkan sebuah kawat mengalir arus listrik *I* di dalamnya dalam arah positif menurut aturan tangan kanan. Kawat membentuk kurva *C*, dan ditempatkan dalam medan magnet $\vec{B}(\vec{r})$. Gaya magnet yang bekerja dalam kawat didefinisikan dengan

$$\vec{F} = \int_C I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) = -I \int_C \vec{B}(\vec{r}) \times d\vec{r} \qquad (1.78)$$

Contoh Soal:

Sebuah medan vektor $\vec{A} = (3x^2 - 6yz)\hat{i} + (2y + 3xz)\hat{j} + (1 - 4xyz^2)\hat{k}$. Hitunglah integral garis di antara titik (0,0,0) dan (1,1,1) dan melalui lintasan (kurva) C yang dinyatakan dengan x = t, y = t^2, z = t^3?

Penyelesaian:

Dari soal maka $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$. Kita hitung lebih dulu $d\vec{r}/dt = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt$. Kita terapkan ke konsep integral garis maka:

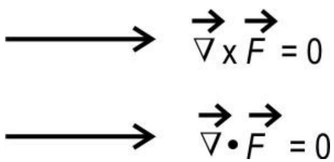
$$\int_{P1}^{P2} \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3t^2 - 6t^5)dt + (4t^3 + 6t^5)dt + (3t^2 - 12t^{11})dt = ...$$

$$= 2$$

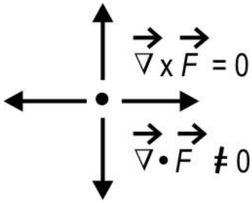
H. KLASIFIKASI MEDAN VEKTOR

Berdasarkan sifat-sifat operasi curl dan divergensi medan vektor kita dapat mengklasifikasikan tipe-tipe medan vektor. Jika curl $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ = 0 maka $\vec{F}$ = grad ϕ atau $\vec{F}$ adalah *medan Lamellar* atau *medan Curl nol*. Juga jika div $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \bullet \vec{F}$ = 0 maka $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ atau $\vec{F}$ adalah *medan Solenoidal*. Dalam hal ini biasanya medan vektor dapat diklasifikasi ke dalam empat bentuk berikut:

(i) Bila curl $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ = 0 dan div $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \bullet \vec{F}$ = 0, maka medan tersebut disebut *medan lameller atau irotasional*, seperti gambar (1.23) berikut ini.

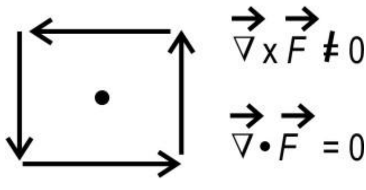


(ii) Jika curl $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ = 0 tapi div $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \bullet \vec{F} \neq 0$ maka curl $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ = 0 memberikan bahwa $\vec{F}$ = grad ϕ dan maka $\vec{\nabla} grad \phi \neq 0$ yaitu $\nabla^2 \phi \neq 0$. Medan seperti ini dikategorikan sebagai medan dari *gerak irotasional dari fluida kompresibel* (lihat Gambar 1.23).



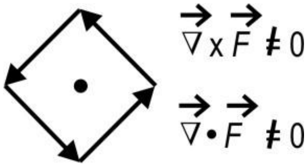
Gambar 1.23
Medan irotasional-kompresibel

(iii) Bila $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ tapi div $\vec{F}$ = 0. Maka div $\vec{F}$ = 0 memberikan $\vec{F}$ = $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ yang mana dari sudut pandang kondisi yang pertama menghasilkan curl $\vec{\nabla} \times \vec{f} \neq 0$ atau $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} \neq 0$ yaitu grad div $\vec{f}$ - $\nabla^2 \vec{f} \neq 0$. Ini menunjukkan bahwa jika $\vec{f}$ solenoidal kita harus mempunyai div $\vec{f}$ = 0 sehingga grad div $\vec{f}$ = 0 dan sedemikian hingga $\nabla^2 \vec{f} \neq 0$. Medan seperti ini dikategorikan sebagai medan dari *gerak rotasional dari fluida inkompresibel* (Gambar 1.24).



Gambar 1.24
Medan rotasional-inkompresibel

(iv) Bila curl $\vec{f}$ $\neq 0$ dan juga div $\vec{F} = \vec{\nabla} \bullet \vec{F} \neq 0$. Ini adalah tipe medan yang paling umum dan dikategorikan sebagai medan dari *gerak rotasional dari fluida kompresibel* (lihat Gambar 1.25).



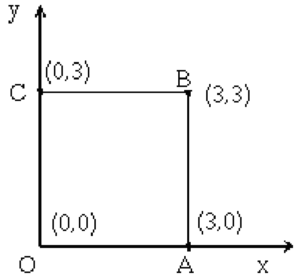
Gambar 1.25
Medan rotasional-kompresibel

Sebenarnya medan ini dibuat/disusun dari (i) medan vektor lamellar (yang tidak mempunyai curl tapi mungkin hanya div) dan (ii) medan vektor solenoidal (yang tidak mempunyai div tapi mungkin mempunyai curl saja). Ini dapat kita buktikan secara matematika bahwa:
$\vec{F} = grad\phi + curl\vec{f}$ sehingga div $\vec{F}$ = div($grad\phi + curl\vec{f}$) = div grad $\phi = \nabla^2\phi$
Tapi div $\vec{F}$ $\neq 0$ sehingga $\nabla^2\phi \neq 0$ yang menentukan ϕ . Sekali lagi curl $\vec{F}$ = curl ($grad\phi + curl\vec{f}$) = curl curl $\vec{f}$ = $-\nabla^2 \vec{f}$. Tapi curl $\vec{F}$ $\neq 0$ maka $\nabla^2 \vec{f} \neq 0$ yang menentukan $\vec{f}$. Dekomposisi medan vektor seperti ini yang menyatukan medan Lamellar dan Solenoidal dikenal dengan *teorema Helmholtz.*

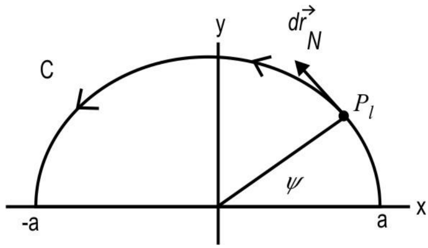
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan bahwa $\vec{\nabla} \bullet \vec{V} \neq \vec{V} \bullet \vec{\nabla}$ untuk $\vec{V}$ sebuah fungsi skalar sembarang!
2) Medan vektor $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\hat{i} + 2yz\hat{j} - 2z^2\hat{k}$. Carilah divergensi dari vektor ini!
3) Sebuah medan vektor $\vec{F}(x, y) = x^2 y\hat{i} + y^2 x\hat{j}$. Carilah integral garis skalar dalam lintasan bujursangkar seperti pada gambar untuk masing-masing sisinya!



4) Sebuah medan vektor $\vec{F} = \hat{i}x^2 + \hat{j}y^2$. Carilah integral garis skalar pada lintasan berbentuk setengah lingkaran seperti pada gambar berikut!



5) Partikel mempunyai vektor posisi $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Tunjukkan bahwa $\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\vec{r}$!

6) Buktikan bahwa medan listrik elektrostatik dari muatan q terisolasi yang dinyatakan dengan $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ adalah medan solenoidal, dengan potensial listrik $\phi = k\frac{q}{r}$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $\vec{\nabla} \bullet \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ → merupakan besaran skalar

$\vec{V} \bullet \vec{\nabla} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$ → merupakan operator skalar

Jadi $\vec{\nabla} \bullet \vec{V} \neq \vec{V} \bullet \vec{\nabla}$.

2) Turunan parsial vektor $\frac{\partial F_x}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2z$, $\frac{\partial F_x}{\partial x} = -4z$. Jadi divergensi medan vektor adalah $\text{div}\vec{F}(x,y,z) = 2y\text{-}2z$

3) $F_x = x^2 y$ dan $F_y = y^2 x$; $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C x^2 y dx + \int_C y^2 x dy$

Sisi OA→ y = 0 sehingga → $\int_{OA} \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$;

Sisi AB → dx =0, x =3 sehingga → $\int_{AB0} \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0 + \int_0^3 y^2 3dy = 27$

Sisi BC → dy = 0, y = 3 sehingga → $\int_{BC} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_3^0 x^2 3dx = -27$

Sisi CO → dx = 0, x = 0 sehingga → $\int_{CO} \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$

4) Dari gambar maka $x = a\cos\varphi$ dan $y = a\sin\varphi$. Medan gaya dapat kita tuliskan menjadi $\vec{F} = \hat{i}a^2 \cos^2\varphi + \hat{j}a^2 \sin^2\varphi$. Pergeseran masing-masing sumbu adalah
$dx = d(a\cos\varphi) = -a\sin\varphi d\varphi$ dan $dy = d(a\sin\varphi) = a\cos\varphi d\varphi$
Integral garis untuk soal di atas adalah

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_0^{\pi} (\hat{e}_x a^2 \cos^2\varphi + \hat{e}_y a^2 \sin^2\varphi) \bullet (-\hat{e}_x a\sin\varphi d\varphi + \hat{e}_y a\cos\varphi d\varphi)$$

Integral ini kalau kita selesaikan akan menghasilkan $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\frac{2}{3}a^3$

5) $$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \ldots = x/r\,;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \ldots = y/r$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \ldots = z/r$$

Jadi $\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \hat{i}\,\frac{d\phi}{dx}\frac{x}{r} + \hat{j}\,\frac{d\phi}{dy}\frac{y}{r} + \hat{k}\,\frac{d\phi}{dz}\frac{z}{r} = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dx}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) =$

$$\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dx}\vec{r}$$

6) Dapat dihitung $\vec{E} = -\vec{\nabla}(q(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2})$. Komponen medan arah x adalah:

$$E_x = -q\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} = qx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} = \frac{qx}{r^3}$$

Seluruhnya dapat kita tuliskan: $\vec{E} = \frac{q}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{q}{r^2}\hat{r}$.

Kemudian untuk mengetahui apakah medan bersifat solenoidal atau tidak dapat kita lakukan uji berikut:

$$div\vec{E} = q\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3})\right]$$

Namun, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = \frac{1}{r^3} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{-3/2}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$.

Sehingga dapat kita hitung divergensi medan:

$$div\vec{E} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0\,.$$

Karena divergensi medan adalah nol maka medan merupakan medan solenoida. Secara fisis dapat diinterpretasikan bahwa garis-garis medan vektor membentuk kurva tertutup.

RANGKUMAN

Dalam fisika, besaran fisis untuk menggambarkan fenomena fisis dapat dibedakan sebagai besaran fisis skalar atau besaran fisis vektor. Besaran fisis yang skalar cukup dinyatakan nilainya saja sedangkan besaran fisis vektor harus dinyatakan secara lengkap baik nilainya maupun arahnya. Untuk menyatakan besaran fisis juga perlu diberikan satuan yang sesuai. Misalnya temperatur ruangan sebuah tempat adalah 27^{o} C. Sebuah besaran fisis juga sering diberikan simbol yang sesuai untuk mewakilinya, dan untuk sebuah vektor cara menuliskan dapat mengikuti beberapa cara berikut:

(i) Vektor dituliskan dengan huruf tebal. Misalnya, gaya dengan notasi $\boldsymbol{F}$.

(ii) Vektor dituliskan dengan huruf bertanda bar di bawahnya, seperti $\underline{F}$.

(iii) Vektor dinotasikan dengan huruf dengan tanda anak panah di atasnya $\vec{F}$.

(iv) Berkaitan dengan gerak benda dari suatu titik *A* ke titik yang lain *B*, yang menghasilkan vektor pergeseran maka dapat dituliskan dengan $\overrightarrow{AB}$.

(v) Vektor dapat juga dituliskan seperti $\tilde{F}$

Operasi matematika vektor-vektor lebih kompleks daripada skalar. Untuk perkalian vektor-vektor dapat mengikuti dua mode: **hasil kali Skalar atau hasil kali vektor.** Hasil kali skalar didefinisikan dengan $\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$, sedangkan hasil kali vektor didefinisikan dengan $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = (\mathrm{ABsin}\alpha)\hat{\mathrm{n}}$ Untuk $(0 \le \alpha \le 180^{o})$.

Dalam fisika banyak sekali hubungan antar besaran-besaran fisis dengan mengikuti aturan aljabar perkalian vektor ini. Fenomena fisis yang lain memerlukan analisis kalkulus vektor yang lebih kompleks seperti integral vektor dan diferensial vektor. Beberapa definisi kalkulus vektor dalam fisika sangat umum digunakan seperti gradient medan skalar, divergensi, teorema stokes.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $\nabla^2 \phi = 0$ adalah persamaan Laplace. Jika $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, maka medan skalar yang memenuhi persamaan laplace adalah ....
   A. $\phi = \dfrac{1}{r}$
   B. $\phi = \dfrac{1}{r^2}$
   C. $\phi = \dfrac{r}{2}$
   D. $\phi = \dfrac{r^2}{2}$

2) Dua buah vektor $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. Kosinus arah dari ($\vec{A} + \vec{B}$) adalah ....
   A. $\cos\alpha = 1/3;\ \cos\beta = 2/9;\ \cos\gamma = 7/9$
   B. $\cos\alpha = 1/3;\ \cos\beta = 5/9;\ \cos\gamma = 5/9$
   C. $\cos\alpha = 1/3;\ \cos\beta = 5/9;\ \cos\gamma = 7/9$
   D. $\cos\alpha = 1/3;\ \cos\beta = 5/9;\ \cos\gamma = 5/9$

3) Jika $\vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin\alpha)\hat{n}$, maka ungkapan perkalian silang dalam bentuk perkalian titik adalah ....
   A. $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2 - (\vec{A} \bullet \vec{B})^2$
   B. $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2 - (\vec{A} \bullet \vec{B})$
   C. $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2 + (\vec{A} \bullet \vec{B})^2$
   D. $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = (\vec{A} \bullet \vec{B})^2 - A^2B^2$

4) Vektor satuan yang tegak lurus vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah ....

A. $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{\left|\vec{A}\right|}$

B. $\hat{n} = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|}$

C. $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|^2}$

D. $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|}$

5) Sebuah partikel bermassa m mempunyai kecepatan $\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ dengan vektor posisi $\vec{r} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. Carilah momentum sudut partikel terhadap titik asal koordinat jika $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$?

A. $m(-11\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k})$

B. $m(-11\hat{i} - 10\hat{j} + 2\hat{k})$

C. $m(-10\hat{i} - 10\hat{j} + 9\hat{k})$

D. $m(-11\hat{i} - 10\hat{j} + 9\hat{k})$

6) Dua buah vektor $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ dan $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$. Carilah kombinasi linear $\dfrac{1}{3}\vec{A} - 3\vec{B}$?

A. $-\dfrac{1}{3}\hat{i}(17) - 10\hat{j} + \dfrac{49}{3}\hat{k}$

B. $-\dfrac{1}{3}\hat{i}(17) - 4\hat{j} + \dfrac{49}{3}\hat{k}$

C. $\dfrac{1}{3}\hat{i}(17) - 10\hat{j} + \dfrac{4}{3}\hat{k}$

D. $-\dfrac{1}{3}\hat{i}(17) - 10\hat{j} + \hat{k}$

7) Tiga buah vektor $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{C} = -2\hat{i} - 3\hat{j}$. Bilangan *m* dan *n* yang sesuai untuk membentuk $\vec{C} = m\vec{A} - n\vec{B}$ adalah ....
   A. *m* = 5 dan *n* =*6*
   B. *m* = 3 dan *n* =*6*
   C. *m* = - 5 dan *n* =*6*
   D. *m* = *4* dan *n* =*6*

8) Sebuah vektor gaya $\vec{F} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ (N) bekerja pada benda di titik *Q*(-2,2,5) (m) dari titik asal. Carilah vektor torka $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$ terhadap titik asal akibat gaya tersebut ....
   A. $\hat{i} + 25\hat{j} + 2\hat{k}$
   B. $30\hat{i} - 25\hat{j} + 2\hat{k}$
   C. $3\hat{i} - 25\hat{j} + 2\hat{k}$
   D. $30\hat{i} + 25\hat{j} + 2\hat{k}$

9) Sebuah medan vektor $\vec{A} = (3x^2 - 6yz)\hat{i} + (2y + 3xz)\hat{j} + (1 - 4xyz^2)\hat{k}$. Hitunglah integral garis dari (0,0,0) ke (1,1,1) sepanjang lintasan C berbentuk garis lurus yang menghubungkan titik-titik (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1) dan (1,1,1)?
   A. -1
   B. -2
   C. -3
   D. -4

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Penggunaan Vektor dalam Gerak

Anda telah mempelajari aljabar vektor dan kalkulus vektor pada kuliah sebelumnya. Pada Kegiatan Belajar 2 ini Anda akan menerapkannya untuk masalah-masalah fisika mekanika, yaitu penerapan vektor untuk gerak benda. Mekanika dapat dikatakan sebagai cabang fisika yang paling tua. Hukum-hukum mekanika diterapkan baik untuk benda-benda mikroskopik seperti atom sampai benda makroskopis yang dapat dilihat langsung dengan mata seperti planet. Studi mekanika biasanya dibagi menjadi dua topik, yaitu:

1. Kinematika: mempelajari gerak benda (obyek) tanpa mempersoalkan sesuatu yang menyebabkan benda tersebut bergerak. Beberapa definisi/ konsep mendasar berkaitan dengan gerak seperti vektor pergeseran $\vec{r}$, laju, kecepatan $\vec{v}$, percepatan $\vec{a}$ dan lain-lain, sudah dibahas di sini. Jadi kita ingin melihat dan menjawab *bagaimana* (*how*) benda tersebut bergerak? Yaitu bagaimana lintasannya, lajunya v, kecepatannya $\vec{v}$, percepatannya $\vec{a}$. Pada konteks ini kita belum memerlukan hukum-hukum Newton tentang gerak, untuk memecahkan problem.
2. Dinamika: mempelajari gerak benda (obyek) dengan memperhitungkan sesuatu yang menyebabkan benda tersebut bergerak, yaitu (vektor) gaya. Di sini selain kita ingin melihat bagaimana benda bergerak juga ingin menjawab *mengapa* (*why*) benda tersebut bergerak? Yaitu kita mesti meninjau gaya-gaya yang menyebabkan gerak tersebut? Di sini hukum-hukum Newton mesti diterapkan untuk dapat memecahkan problem.

Dalam kegiatan belajar ini, kita mulai dengan topik kinematika yang memberikan konsep-konsep dasar penting dalam mekanika. Namun sebelum kita mempelajari kinematika ini, perlu kiranya Anda mengingat kembali mengenai konsep sistem koordinat seperti telah disinggung pada submodul sebelumnya.

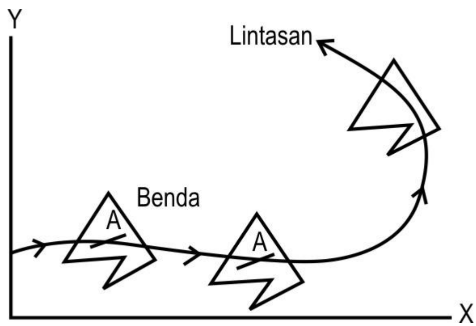
A. SISTEM KOORDINAT

Jika kita ingin meninjau mengenai gerak benda maka (ada baiknya) kita perlu memilih sistem koordinat yang paling tepat yang akan kita gunakan untuk memecahkan problem mekanika kita. Pada dasarnya kita boleh menggunakan sistem koordinat yang ada (kartesian, kutub, silinder, bola) yang sudah kita kenal. Namun demikian tidak setiap problem mudah diselesaikan dengan satu sistem koordinat. Seperti misalnya gerak elektron dalam atom mudah dipelajari dalam sistem koordinat bola. Untuk gerak bola yang ditendang ke depan oleh seorang pemain bola dapat dipelajari dengan baik menggunakan koordinat kartesian. Jadi usahakan dalam mengerjakan soal-soal mekanika nantinya dipertimbangkan dulu dalam sistem koordinat apa Anda ingin mengerjakan. Pada kuliah awal kita ini kita banyak meninjau gerak benda dalam sistem koordinat kartesian, yaitu sistem koordinat yang sumbu-sumbu koordinatnya saling tegak lurus.

B. TIPE-TIPE GERAK BENDA

Gerak benda secara umum dapat memilih salah satu atau kombinasi dari tipe-tipe gerak berikut, yaitu:

1. Gerak Translasi merupakan gerak dalam garis lurus, misalnya mobil yang bergerak lurus atau gerak benda jatuh ke permukaan bumi. Sebuah benda dikatakan bergerak translasi jika sembarang garis yang digambar pada bagian benda tetap sejajar dengan dirinya sendiri sepanjang waktu benda bergerak meskipun lintasan yang ditempuh berbentuk kurva (Gambar 1.26).



Gambar 1.26
Garis A dalam benda tetap sejajar di sepanjang lintasan

2. Gerak Rotasi. Gerak rotasi ini mempunyai lintasan yang memutari sesuatu. Lintasan dapat berbentuk lingkaran, elips atau yang lain.

Contohnya adalah gerak planet memutari matahari. Gerak roda sepeda dan lain-lain.

Gambar 1.27
Gerak Rotasi roda memutari sumbu (poros roda)

Perlu dibedakan di sini antara be-rotasi dengan tipe gerak rotasi. Be-rotasi adalah bergerak memutar pada porosnya, sedang tipe gerak rotasi adalah gerak yang memutari sesuatu.

3. Gerak Vibrasi. Gerak vibrasi ini memiliki karakteristik bergerak bolak-balik terhadap suatu titik kesetimbangan. Contohnya adalah gerak ayunan (bandul), pegas.

Jadi di alam, gerak suatu obyek dapat dimodelkan dengan tipe-tipe gerak di atas. Sebagai contoh meskipun kita tidak mengetahui mode gerak molekul-molekul sebuah zat yang sebenarnya (benda mikroskopis) namun secara teoretis dapat didekati sebagai gerak vibrasi.

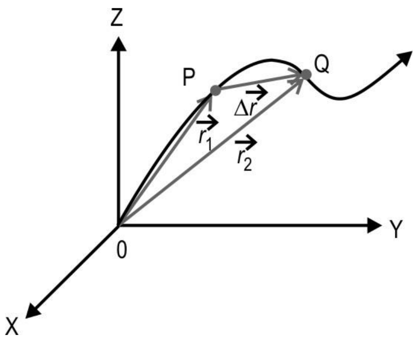
Selain tipe gerak, kita dapat menyederhanakan analisis gerak benda dengan memandang sebuah benda sebagai benda *titik*. Jadi meskipun sebuah benda tentu mempunyai ukuran baik besarnya maupun beratnya namun pada kondisi tertentu untuk perhitungan matematis, dapat kita telaah sebagai benda titik jika ukuran benda jauh lebih kecil dibanding ukuran lintasan yaitu jarak yang ditempuh. Benda titik ini dianggap mempunyai ukuran nol dan sering dalam mekanika benda titik ini disebut juga *partikel.* Contohnya adalah bumi mengitari matahari dapat dianggap sebagai benda titik sehingga analisis matematis yang diperlukan menjadi sederhana. Contohnya lagi, gerak bola yang ditendang di udara dapat dianggap sebagai benda titik. Obyek yang tidak bergerak rotasi sering juga dapat dianggap sebagai benda titik.

C. KINEMATIKA

1. Hubungan s-t, v –t dan a –t dalam Grafik

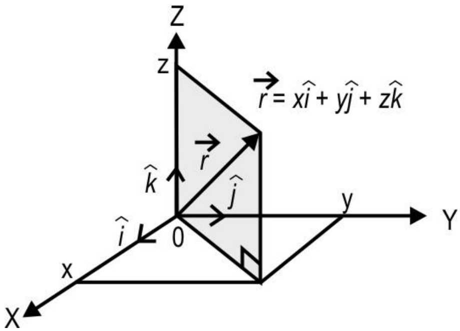
Jika sebuah benda bergerak maka tentu akan memberikan informasi: berapa jauh benda bergerak dan ke arah mana benda tersebut bergerak. Jadi informasi yang kita peroleh pertama kali untuk gerak benda adalah perubahan posisi benda. Posisi benda dalam sistem koordinat dapat digambarkan sebagai *vektor posisi* $\vec{r}$. Benda bergerak selanjutnya menimbulkan pergeseran posisi, dan ini diwakili oleh *vektor pergeseran.* Vektor pergeseran ini menghubungkan dua titik/posisi secara langsung. Untuk menjawab berapa jauh benda bergerak tentu saja kita perlu mengetahui kedudukan/ posisi (titik) awal benda dan kedudukan/posisi (titik) berikutnya. Kemudian himpunan titik-titik kedudukan ini yang kita gambarkan dalam sistem koordinat akan membentuk sebuah *lintasan* gerak. Lintasan yang terjadi mungkin berbentuk garis lurus atau kurva. Informasi berikutnya adalah dikaitkan dengan *waktu tempuh t* yaitu berapa lama waktu yang diperlukan benda tersebut bergerak dari titik ke titik sepanjang lintasan tersebut. Dari konsep ini maka kita dapat merumuskan besaran fisis penting dan dasar berkaitan dengan gerak yaitu *laju, kecepatan* dan, *percepatan/perlambatan.*

Kita tinjau benda bergerak translasi dalam lintasan berbentuk kurva sembarang seperti Gambar 1.28 berikut.



Gambar 1.28
Pergeseran partikel dari titik P ke Q

Vektor jarak digambarkan terhadap titik asal koordinat (0) dan sering juga disebut *vektor posisi* karena memberi gambaran posisi sebuah benda terhadap acuan yang disepakati bersama yaitu titik 0. Misalkan obyek mencapai titik P pada waktu t_1 dan pada titik Q pada waktu t_2. Pada Gambar 1.28, sebuah partikel di titik P digambarkan dalam sistem koordinat kartesian, terhadap titik asal koordinat 0, dicirikan oleh vektor posisi $\vec{r}_1$. Pada titik Q partikel dicirikan oleh vektor posisi $\vec{r}_2$. Titik Q dan P dikaitkan dengan vektor pergeseran $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vektor pergeseran $\Delta\vec{r}$ yang menunjuk titik Q merupakan *vektor relatif* karena relatif terhadap titik tertentu (dalam hal ini P) yang bukan titik acuan bersama (0). Sembarang vektor (misal $\vec{r}$) selanjutnya dapat kita uraikan dalam komponen-komponen x, y dan z seperti Gambar 1.29 berikut ini.

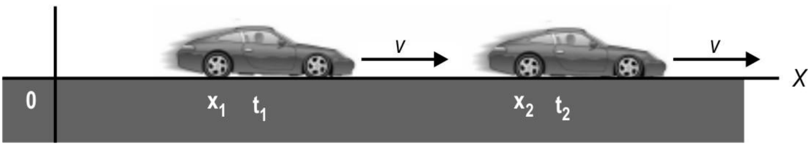


Gambar 1.29
Vektor pergeseran (posisi) dalam komponen x, y dan z

Untuk tujuan memudahkan pemahaman konsep, maka kita mulai studi gerak kita untuk gerak translasi 1 dimensi dalam arah X.

a. Laju dan Kecepatan Linear

Misalkan sebuah mobil bergerak translasi (linear) seperti Gambar 1.30 berikut.



Gambar 1.30
Mobil bergerak linear dalam sumbu X

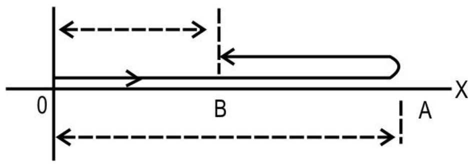
Kita melihat bagaimana perubahan posisi mobil dari x_1 pada waktu t_1 ke x_2 pada waktu t_2 maka kita dapat mendefinisikan besaran fisis yang kita sebut *kecepatan* (*velocity*) rata-rata $\vec{v}$:

$$\vec{v}\text{ (rata-rata)} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{i}}{t_2 - t_1} \qquad \text{(meter/detik)}$$

(1.78)

Kecepatan (vektor) adalah rasio vektor pergeseran terhadap perubahan waktu. Arah kecepatan sama dengan arah vektor pergeseran. Jadi gambaran fisis dari kecepatan adalah menyatakan benda bergerak dengan besarnya kecepatan dinyatakan oleh persamaan (1.78).

Besarnya vektor pergeseran, $|\Delta\vec{x}| = \Delta x$, mungkin berbeda dengan jarak tempuh yang sesungguhnya, yaitu jarak total yang ditempuh benda Δs. Sebagai ilustrasi adalah Gambar 1.31 berikut ini.



Gambar 1.31
Obyek bergerak dari titik 0 ke titik A lalu berbalik ke titik B

Dari Gambar 1.31, vektor pergeseran adalah $\Delta\vec{x} = \overrightarrow{0A} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B}$, sehingga besarnya vektor pergeseran total dari benda adalah $|\Delta\vec{x}| = 0B$. Sedangkan jarak total yang ditempuh adalah $\Delta s = 0A + AB$. Berkaitan dengan ini maka dapat didefinisikan *laju* (*speed*) *rata-rata v*, yaitu perbandingan antara total jarak yang ditempuh dengan interval waktu. Secara matematika ditulis dengan

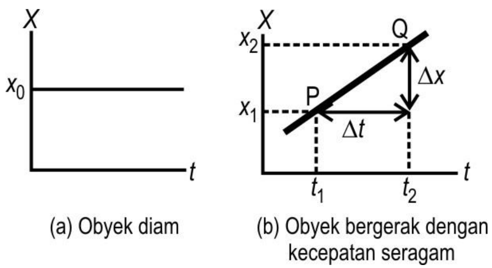
$$v\text{ (rata-rata)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{(meter/detik)} \qquad (1.79)$$

Jadi laju rata-rata adalah besaran skalar, sedangkan kecepatan adalah vektor. Sebagai contoh, Anda mengendarai sepeda motor dan melihat spedometer. Yang terbaca adalah laju rata-rata dan bukan kecepatan karena ke manapun arah Anda pergi asal putaran mesin dipertahankan sama maka jarum spedometer tetap sama. Selanjutnya jika benda mempunyai pergeseran yang sama untuk interval waktu yang sama maka benda disebut mempunyai *kecepatan seragam*.

Sekarang jika interval waktu kita ambil kecil, maka kita dapat mendefinisikan dan menentukan apa yang disebut *kecepatan sesaat* (*instantaneous velocity*) $\vec{v}$ yang merupakan kecepatan di suatu titik dalam lintasan. Kecepatan sesaat didefinisikan dengan:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad \text{(meter/detik)} \qquad (1.80)$$

Kemudian besarnya kecepatan sesaat di suatu titik tidak lain adalah laju (*speed*) gerak benda tersebut. Sebagai contoh pada suatu saat, sebuah pesawat terbang bergerak ke utara pada 500 km/jam, dan pesawat yang lain bergerak ke selatan pada 500 km/jam. Keduanya mempunyai laju sama 500 km/jam namun kecepatannya berbeda. Perlu diingat juga, jika benda bergerak seragam maka kecepatan rata-rata akan sama dengan kecepatan sesaat. Gambaran ini akan lebih jelas jika kita lukiskan dalam bentuk grafik pergeseran terhadap waktu, seperti Gambar 1.32. Kemudian jika kita hanya melihat besarnya saja (*magnitude*) kita boleh menyatakan kecepatan rata-rata dengan $\bar{v} = \Delta x / \Delta t$ (dengan tanda strip di atas huruf).



Gambar 1.32
Wakilan grafis (a) obyek diam (b) Bergerak seragam

Pada Gambar 1.32a, grafik menggambarkan obyek diam yaitu tidak bergerak karena tidak ada perubahan jarak/pergeseran meskipun waktu terus berjalan. Jadi obyek diam diwakili oleh garis horizontal. Gambar 1.32b menggambarkan obyek yang bergerak dengan <u>kecepatan seragam</u> sehingga grafik X-t berbentuk garis lurus. Kecepatan rata-rata dapat dihitung dengan menghitung kemiringan (gradien) dari garis lurus PQ gambar 1.32b tersebut yaitu:

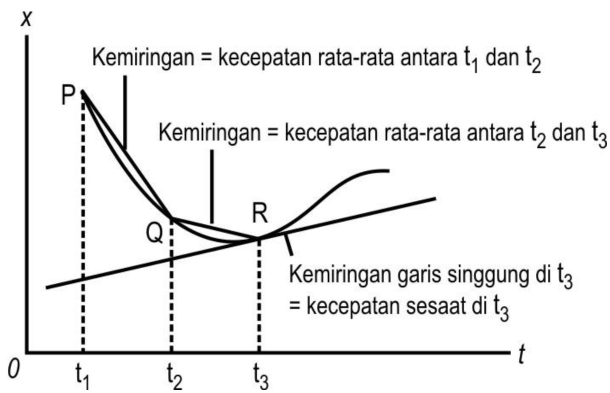
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1.81}$$

Kemiringan garis lurus ini yang mempunyai kecepatan seragam tidak bergantung pada dua titik yang diambil pada garis. Karena kecepatan rata-rata sama di sepanjang lintasan maka kecepatan sesaat di suatu titik akan sama dengan kecepatan rata-rata. Untuk benda bergerak dengan kecepatan seragam maka kecepatan rata-rata sama dengan kecepatan sesaat di suatu titik. Plot v-t untuk gerak ini adalah berupa garis lurus (Gambar 1.32b).

b. Gerak dengan Kecepatan Tak-Seragam (Non-uniform)

Sekarang kita tinjau untuk kasus gerak dengan kecepatan tidak seragam. Dalam hal ini plot X terhadap t akan berupa kurva nonlinear, seperti Gambar 1.33. Pada gambar tersebut kecepatan rata-rata untuk masing-masing interval waktu tidak mesti sama. Misalnya untuk interval [P,Q] dihitung dengan:

$$\bar{v}_{t1\to t2} = \frac{\Delta x_{P\to Q}}{\Delta t} = \frac{x_P - x_Q}{t_2 - t_1} \tag{1.82}$$



Gambar 1.33
Kurva X-t untuk gerak tak seragam

Kecepatan sesaat pada titik sembarang, misal di titik R, dihitung dengan rumus persamaan (1.80).

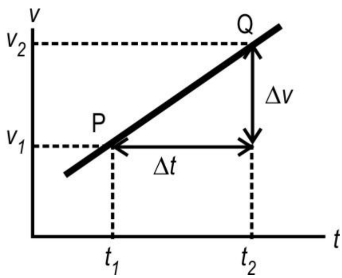
c. *Gerak yang Mengalami Percepatan*

Besaran fisis yang lain berkaitan dengan gerak adalah *percepatan* (*acceleration*) $\vec{a}$. Jika Anda menaiki kendaraan yang makin lama makin cepat maka artinya Anda mendapatkan percepatan. Dan sebaliknya jika makin lama makin lambat, maka dikatakan benda mendapatkan percepatan negatif atau sering disebut perlambatan. Dalam hal ini percepatan seperti halnya kecepatan dapat bersifat konstan (seragam) dan juga tidak. Jika kecepatan menyatakan laju perubahan kedudukan terhadap waktu, maka percepatan menyatakan laju perubahan kecepatan terhadap waktu. Oleh karena itu juga ada *percepatan rata-rata* dan *percepatan sesaat.* Percepatan rata-rata didefinisikan dengan:

$$\vec{a}\text{ (rata-rata)} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{1.83}$$

Dengan arah $\vec{a}$ (rata-rata) sama dengan arah $\Delta\vec{v}$. *Percepatan sesaat* $\vec{a}$ di suatu titik didefinisikan dengan:

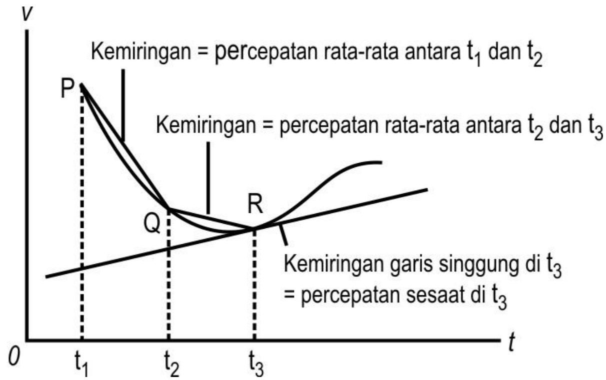
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.84}$$



Gambar 1.34
Plot v-t untuk gerak beraturan

Jadi syarat terjadinya mendapatkan percepatan jika ada perubahan kecepatan terhadap waktu. Benda yang bergerak dengan kecepatan konstan berarti percepatannya nol.

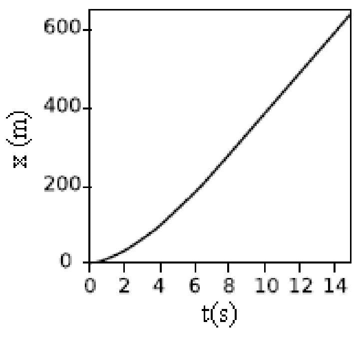
Sedangkan untuk gerak dengan percepatan tak seragam dapat dilukiskan seperti Gambar 1.35 berikut ini.

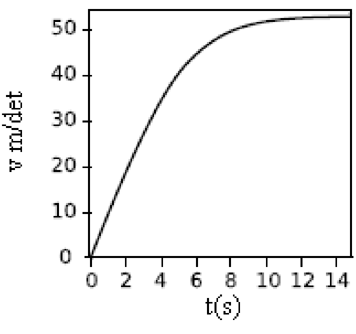


Gambar 1.35
Gerak dengan percepatan tak seragam

Contoh Soal:

Gambar berikut melukiskan gerak *skydiver* dalam pengaruh gesekan udara. Sumbu x positif menggambarkan arah gerak jatuh *skydiver*, sehingga makin mendekati permukaan bumi maka x bertambah. Tentukan percepatan *skydiver* pada (a) t = 3 detik dan pada (b) t = 7 detik!

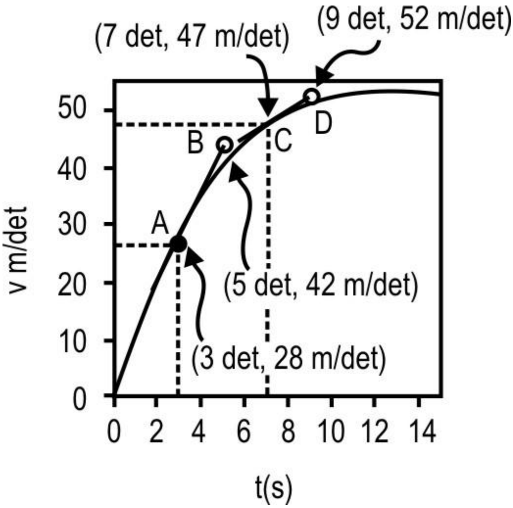




Gambar 1.36

Penyelesaian:

Dari soal kita tidak mengetahui bentuk fungsi v = v(t), jadi kita hitung saja percepatan rata-rata. Yang ditanyakan adalah percepatan rata-rata di t = 3 detik dan t = 7 detik, sehingga ini seolah-olah seperti menanyakan percepatan sesaat di t = 3 detik dan 7 detik. Sesuai dengan konsep percepatan adalah kemiringan garis lurus yang melewati kurva v - t di titik yang relevan, maka kita gambarkan garis lurus tersebut seperti Gambar 1.37 berikut ini.



Gambar 1.37
Garis singgung diambil menghubungkan dua titik A dan B, C dan D

Kita tentukan garis lurus menyinggung kurva di t = 3 detik dan t = 7 detik. Kemiringan garis dapat dihitung dengan mengambil titik yang lain di garis lurus, misal di t = 5 detik (sembarang) dan t = 9 detik. Jadi dapat kita hitung:

a) Kemiringan di t = 3 detik adalah (42 – 28)/(5 – 3) = 7 m/det.
b) Kemiringan di t = 7 detik adalah (52 – 47)/(9 – 7) = 2,5 m/det.

Jadi pada t = 3 detik, *skydiver* belum jatuh sangat kencang jadi gesekan udara tidak dirasakan kuat. Jadi dia merasakan gravitasi hampir sebesar g =10 m/det^2. Pada t = 7 detik dia bergerak hampir dua kali cepatnya sehingga gaya gesekan sangat kuat. Dari grafik x-t juga terlihat pada awal jatuh kurva sangat melengkung sedangkan pada bagian akhir hampir lurus sama sekali. Jika kurva x-t lurus berarti kecepatan pada saat itu hampir konstan dan percepatan yang terjadi adalah cukup kecil.

d. Persamaan Gerak Rectilinear

Setelah kita mendefinisikan besaran-besaran dasar mekanika seperti x, v, a, dan t maka sekarang kita dapat merumuskan kaitan-kaitan antara besaran-besaran tersebut untuk gerak benda dalam lintasan lurus. Untuk sementara kita asumsikan <u>percepatan benda adalah konstan</u> yaitu seragam sepanjang gerak,sehingga percepatan rata-rata sama dengan percepatan sesaat di semua titik dalam lintasan yaitu $v = \bar{v}$. Kita nyatakan kembali definisi kecepatan rata-rata dengan:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Jika kita ambil $x_1 = 0$ (yaitu di titik asal) dan $t_1 = 0$ yaitu benda mulai bergerak maka kita boleh menuliskan saat $t_2 = t$ maka benda berada di $x_2 = x$, sehingga dari persamaan tersebut berlaku:

$$x = \bar{v}t \tag{1.85}$$

Ini adalah rumus yang amat kita kenal dulu, yaitu jarak sama dengan kecepatan kali waktu tempuh.

Sekarang jika saat $t_1 = 0$ benda sudah bergerak dengan kecepatan (awal) v_0 dan kemudian bergerak dengan <u>percepatan konstan *a*</u> dan kecepatan *v* saat $t_2 = t$. Maka kita mempunyai relasi seperti sebelumnya:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_0}{t}$$

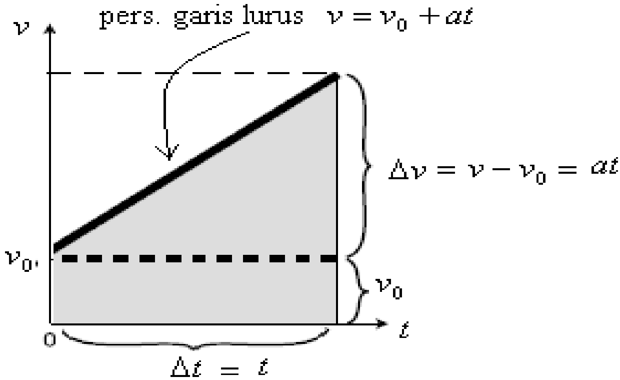
Atau dapat kita tuliskan dengan:

$$v = v_0 + at \tag{1.86a}$$

Atau secara vektorial dinyatakan dengan:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{1.86b}$$

Bentuk ini tidak lain adalah bentuk persamaan garis lurus yang sudah kita kenal yaitu persamaan y = mx + c. Oleh karena itu gerak dengan percepatan konstan dapat dilukiskan seperti pada gambar 1.38.



Gambar 1.38
Plot v-t untuk gerak dengan percepatan konstan

Sisi miring segitiga dapat diwakili persamaan garis lurus $v = v_0 + at$, yang memotong sumbu v di titik v_0 dengan kemiringan adalah percepatan $a = \Delta v / \Delta t$. Kita lihat luas daerah di bawah kurva adalah luas setengah segitiga ditambah luas bujur sangkar yaitu:

$$\text{Luas} = \tfrac{1}{2}\, t.at + v_0t = \tfrac{1}{2}\, at^2 + v_0t$$

Kalau kita lihat satuannya maka luas daerah di bawah kurva adalah: ½ $at^2 + v_0t$ = (m/det^2).(det)^2 + (m/det) det = m = meter. Jadi luas di bawah kurva menyatakan panjang. Dapat kita turunkan nanti bahwa luas di bawah kurva menyatakan besarnya pergeseran *x* yang terjadi.

Jika percepatan adalah konstan untuk sembarang interval waktu, maka secara matematis dapat kita ambil rata-rata:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{1.89}$$

Pergeseran *x* menurut persamaan (1.85) adalah:

$$x = \bar{v}t = \frac{v_0 + v}{2}t \tag{1.90}$$

Dengan *v* adalah persamaan (1.86a) maka diperoleh:

$$x = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}t \tag{1.91}$$

Atau pergeseran untuk gerak dengan percepatan konstan adalah:

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.92}$$

Rumus ini persis sama dengan luas di bawah kurva v-t. Jadi pergeseran untuk gerak percepatan konstan sama saja menghitung luas daerah di bawah kurva v-t.

Kita dapat menurunkan relasi lain jika t = (v – v_0)/a disubstitusikan ke persamaan (1.90):

$$x = \bar{v}t = \frac{v_0 + v}{2}t = \{\frac{v_0 + v}{2}\}\{\frac{v - v_0}{a}\} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Atau kecepatan adalah

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (1.93)$$

Jadi untuk telaah **gerak lurus dengan percepatan konstan** dapat diberikan oleh rumus-rumus:

(i) $v = v_0 + at$

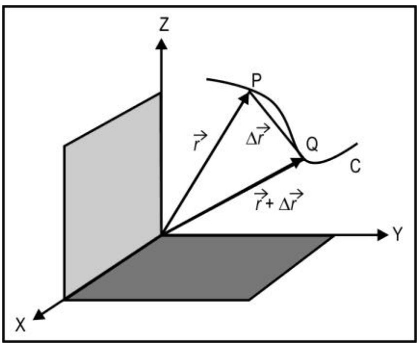
(ii) $x = \bar{v}t = \dfrac{v_0 + v}{2}t$

(iii) $x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

(iv) $v^2 = v_0^2 + 2ax$ (1.94)

2. Persamaan Kecepatan dan Percepatan sebagai Diferensiasi Vektor

Pada perumusan besaran-besaran kinematika di atas kita telah mendefinisikan kecepatan dan percepatan sesaat berdasarkan konsep limit. Jika perubahan waktu Δt diambil kecil sekali maka kita dapat menggunakan konsep diferensial dan integral. Kita tinjau gambar berikut ini, yang mirip dengan Gambar 1.28.



Gambar 1.39
Kurva lintasan gerak partikel

Dari gambar maka perubahan vektor pergeseran dari titik P ke C adalah $\Delta\vec{r}$. Mengingat kembali persamaan (1.80) maka kecepatan sesaat dapat kita nyatakan lagi dengan:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\vec{r} / \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.95)$$

Yang merupakan vektor yang menyinggung kurva C di P. Jika interval waktu kita ambil cukup kecil yaitu $\Delta t \to 0$ maka persamaan kecepatan ini dapat dituliskan dalam bentuk diferensial:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.96)$$

Jika kita nyatakan bahwa vektor posisi $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, maka kecepatan sesaat dapat kita tuliskan dengan:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (1.97)$$

Demikian juga untuk vektor percepatan sesaat dapat dinyatakan dengan:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \quad (1.98)$$

3. Persamaan Kedudukan sebagai Integral Vektor

Sebaliknya kita dapat juga membalik proses. Jika kecepatan sesaat adalah $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ seperti persamaan (1.96) maka kita dapat menggunakan kalkulus integral untuk mendapatkan vektor posisi:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \Rightarrow \vec{r} = \int \vec{v}dt \quad (1.99)$$

Kita tinjau gerak linear dengan percepatan konstan maka $v = v_0 + at$ sehingga:

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (1.100)$$

Seperti telah kita turunkan sebelumnya.

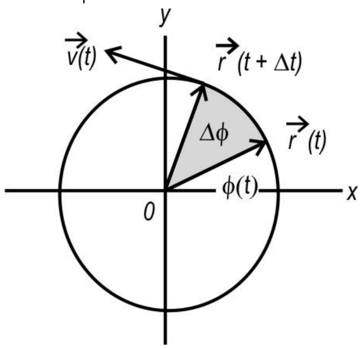
Demikian juga untuk $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ maka dapat kita hitung besarnya kecepatan sesaat:

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt \tag{1.101}$$

4. Penerapan Perkalian Silang Antar Vektor Posisi dengan Kecepatan Sudut

Sekarang kita menerapkan konsep perkalian vektor untuk kinematika gerak rotasi (melingkar) yang mempunyai kecepatan sudut ω. Kita pelajari lebih mendalam konsep asal kecepatan sudut ini. Aplikasi dari konsep kecepatan sudut dalam fisika dan teknik dalam hal ini cukup luas. Untuk itu kita tinjau partikel yang bergerak dengan laju *v* pada lintasan lingkaran yang berjari-jari *r* dalam bidang x-y (lihat gambar 1.40). Sudut $\phi(t)$ adalah sudut antara sumbu-x dan vektor posisi partikel, dan kita sebut sudut perpindahan. Laju gerak mengelilingi titik O rata-rata dalam interval $t \rightarrow t + \Delta t$ adalah

$$\left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}\right| \tag{1.102}$$



Gambar 1.40
Gerak rotasi/melingkar

Laju sudut sesaat ω , analogi dengan kinematika gerak linear yang baru kita pelajari, pada saat *t* didefinisikan dengan mengambil limit persamaan (1.95) untuk $\Delta t \rightarrow 0$, yaitu

$$\omega = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \tag{1.103}$$

Apabila gerak partikel dalam laju konstan, laju sudut sesaat partikel adalah konstan juga dan sama dengan laju sudut rata-rata sepanjang waktu. Satu putaran penuh mengelilingi lintasan lingkaran adalah pergeseran sudut 2π radian dan memakan waktu T yang disebut *perioda*. Perioda dan laju sudut dihubungkan dalam persamaan

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.104}$$

Kemudian jika partikel menempuh jarak 2πr selama waktu T maka laju partikel adalah

$$v = 2\pi r / T \tag{1.105}$$

Menggunakan persamaan-persamaan di atasnya maka hubungan antara laju sudut dan laju linier partikel adalah

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{1.106}$$

Hubungan ini juga dapat diturunkan dengan cara lain. Jika jarak partikel ke pusat lingkaran adalah r dan telah menyapu sudut ϕ selama bergerak dan membentuk busur lingkaran sepanjang s maka dapat kita nyatakan:

$$\phi = \frac{s}{r} \tag{1.107}$$

Kita lihat s dan r adalah jarak sehingga ϕ tak berdimensi. Untuk itu kita tetapkan satuan "radian" untuk ϕ sebagai pengukuran *pseudo-distance*. Radian dengan sudut diberikan hubungan ini:

$$1\ radian = \frac{2\pi}{360°} = 57{,}3°$$

Kita kembali ke gerak linear bahwa $v = ds/dt$, sehingga:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{d(r\phi)}{v} = \frac{rd\phi}{v} \tag{1.108}$$

Substitusi persamaan ini ke persamaan (1.96) maka:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{vd\phi}{rd\phi} = \frac{v}{r} \tag{1.109}$$

Laju sudut adalah besaran skalar positif. Kita mendefinisikan kecepatan sudut $\vec{\omega}$ berdasarkan kaidah tangan kanan, yaitu

$$\omega = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \hat{n} \tag{1.110}$$

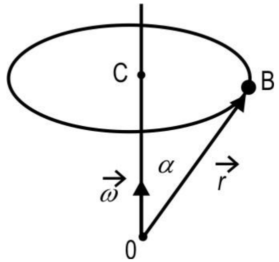
Arah $\vec{v}$ adalah tegak lurus vektor posisi $\vec{r}$ dan juga tegak lurus sumbu rotasi, oleh karena itu tegak lurus terhadap $\vec{r}$ dan $\vec{\omega}$ karena $\vec{\omega}$ terletak pada sumbu rotasi.

Secara umum, untuk titik partikel yang bergerak berputar mengelilingi sumbu rotasi terkait dengan $\vec{v}$, $\vec{r}$ dan $\vec{\omega}$ memiliki rumusan

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (r \text{ konstan}) \qquad (1.111)$$

Persamaan ini juga berlaku untuk benda tegar yang berotasi.

Sekarang kita tinjau secara umum untuk partikel yang bergerak dengan laju v tapi asal vektor posisi tidak berimpit dengan titik pusat lingkaran C tapi di titik O seperti pada Gambar 1.41 di bawah ini.



Gambar 1.41
Vektor $\vec{r}$ mengelilingi sumbu z dengan besar tetap

Percepatan partikel dapat kita cari dari diferensial kecepatan terhadap waktu yaitu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{\omega} \times (\frac{d\vec{v}}{dt}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

(1.112)

untuk partikel dengan laju konstan. Dengan aturan *triple product* maka kita peroleh

$$\vec{a} = \vec{\omega}(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \bullet \vec{\omega}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} \qquad (1.113)$$

Hal yang menarik di sini adalah jika $\vec{\omega}$ dan $\vec{r}$ saling tegak lurus, yaitu $\vec{r}$ terletak dalam bidang lingkaran maka kita akan memperoleh rumusan terkenal yaitu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 \vec{r} \qquad (1.114)$$

Secara umum untuk vektor sembarang bervariasi waktu $\vec{b}$ dengan besar konstan b yang bergerak berputar dengan kecepatan sudut rotasi $\vec{\omega}$ menurut gambar (1.41) maka akan memenuhi persamaan berikut

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b} \qquad \text{(dengan } b \text{ konstan)} \qquad (1.115)$$

Contoh:
Radius bumi kita sekitar 6400 km, memerlukan 24 jam untuk berotasi pada sumbunya. Tentukan kecepatan sudut bumi!

Penyelesaian:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\tau};$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi r}{\tau r} = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{(24 \text{ hr})\left(3600 \ \frac{\text{s}}{\text{hr}}\right)} = 7{,}3 \text{ x } 10^{-5} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Sekarang kita cari hubungan antar besaran-besaran seperti kasus kinematika gerak linear. Mengingat untuk gerak linear bahwa $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ maka kita dapat juga menyatakan bahwa untuk gerak rotasi berlaku (dengan substitusi):

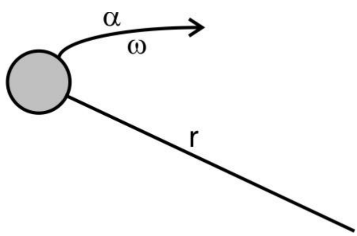
$$r\phi(t) = r\phi_0 + r\omega_0 t + \tfrac{1}{2} r\alpha t^2$$

Atau

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1.116)$$

Contoh Soal:

Sebuah bola terikat kawat berayun sedemikian rupa sehingga mengalami percepatan sudut 0,05 rad/det^2. Jika sebelumnya telah mempunyai kecepatan sudut 1,2 rad/det saat awal gerak, berapa derajatkah ayunan tersebut setelah 30 detik?



Gambar 1.42

Penyelesaian:

$$\theta = \left(0\text{ rad}\right) + \left(1{,}2\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(30\text{ s}\right) + \tfrac{1}{2}\left(0{,}05\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(30\text{ s}\right)^2$$
$$= 59\text{ rad}$$
$$=3380°$$

Untuk relasi-relasi yang lain dapat diturunkan lagi seperti di atas, misalnya dari $v(t) = v_0 + at$ maka diperoleh:

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow r\omega(t) = r\omega_0 + r\alpha t$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \qquad (1.117)$$

Dan

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(s - s_0\right) \Rightarrow r^2\omega^2 = r^2\omega_0^2 + 2r\alpha\left(r\phi - r\phi_0\right)$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\phi - \phi_0\right) \qquad (1.118)$$

Jadi untuk gerak rotasi dengan kecepatan konstan kita mempunyai hubungan:

(i) $v = \omega r$

(ii) $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$

(iii) $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

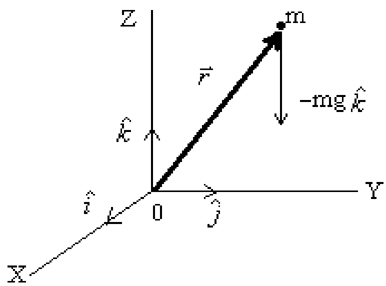
(iv) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\phi - \phi_0\right)$ (1.119)

5. Menerapkan Hitungan Vektor dalam Gerak Parabola/Peluru

Sekarang kita tinjau kasus gerak partikel dalam medan gravitasi bumi. Dari eksperimen diketahui bahwa benda di atas permukaan bumi jika tidak ada yang menopangnya, akan jatuh vertikal ke tanah dengan percepatan konstan (gesekan dengan udara diabaikan). Jatuhnya benda ini akibat tarikan gravitasi, atau yang lebih kita kenal akibat adanya gaya gravitasi bumi. (Mengenai gaya ini akan kita bahas pada bab berikut). Ini menjelaskan buah apel Newton yang jatuh ke tanah. Secara umum untuk obyek yang bergerak di atas permukaan tanah akan cenderung ditarik ke arah bumi akibat gravitasi ini. Percepatan jatuh untuk benda bebas di atas permukaan bumi disebut *percepatan gravitasi bumi* $\vec{g}$. Nilai $\vec{g}$ ini secara umum bergantung posisi di mana dilakukan pengukuran, namun untuk perhitungan biasa atau dalam soal-soal mekanika sering diambil g = 10 m/det^2. Ada banyak cara untuk menghitung nilai percepatan gravitasi bumi di suatu tempat, misalnya dengan: metode bandul matematis, pendulum fisis, metode kapasitasi, metode pegas. Sekali lagi untuk benda bermassa yang berada di atas permukaan bumi akan menderita gaya gravitasi bumi. Besarnya gaya gravitasi bumi ini adalah:

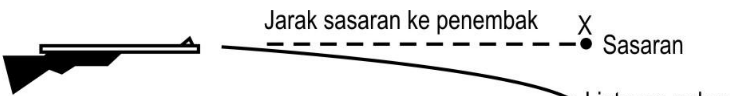
$$\vec{W} = m\vec{g} = -mg\hat{k} \tag{1.120}$$

Tanda negatif karena berlawanan dengan arah positif sumbu Y yaitu percepatan gravitasi bumi arahnya ke pusat bumi (lihat gambar 1.44).

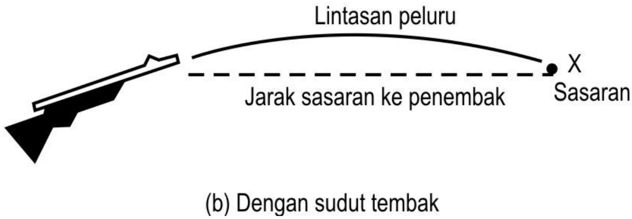


Gambar 1.44
Obyek bermassa m dengan vektor posisi **r** dalam medan gravitasi

Sekarang kita tinjau gerak peluru yaitu gerak yang mempunyai lintasan parabolik akibat pengaruh gravitasi bumi untuk sebuah benda yang ditembakkan ke atas membentuk sudut tertentu terhadap permukaan bumi. Lintasan gerak peluru disebut *trayektori*. Kita boleh mengandaikan bentuk lintasan parabolik tersebut seperti Gambar 1.45. Jika peluru ditembakkan ke sasaran dengan jarak yang relatif jauh maka lintasan peluru yang sesungguhnya adalah parabolik (melengkung). Jadi agar peluru mengenai sasaran dengan tepat perlu diperhitungkan sudut tembak dan kecepatan tembak. Gerak yang mempunyai karakteristik gerak peluru misalnya adalah gerak lemparan *shooting* dalam bola basket, gerak semburan air dari selang, gerak air terjun, gerak roket dan sebagainya.

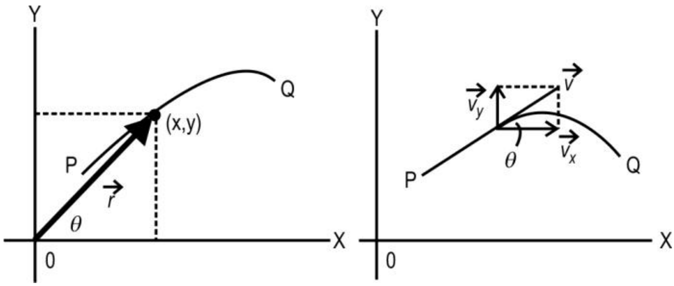


(a) Tanpa sudut tembak



Gambar 1.45
Lintasan parabolik untuk gerak peluru

Untuk menganalisis gerak peluru (proyektil) kita boleh menggambarkan secara sederhana seperti Gambar 1.46 berikut.



Gambar 1.46
Salah satu titik (x,y) pada lintasan gerak peluru

Gerak peluru di atas adalah gerak dalam bidang X-Y, sehingga dapat kita pisahkan untuk komponen X dan Y. Misal kita ambil titik sembarang (x,y) dengan vektor posisi $\vec{r}$ yang membentuk sudut θ terhadap sumbu horisontal. Secara trigonometri dapat kita nyatakan bahwa:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}\ ;\ x = r\cos\theta;\qquad y = r\sin\theta;\qquad \text{dan}\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(1.121)

Sudut θ dapat dicari dengan menghitung,

$$\tan\theta = y/x \tag{1.122}$$

Sekarang jika vektor kecepatan juga dapat diuraikan menjadi komponen-komponennya maka:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \tag{1.123}$$

Dengan

$$v_x = v\cos\theta \text{ dan } \qquad v_y = v\sin\theta \tag{1.124}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{1.125}$$

Dengan cara yang sama untuk percepatan maka,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{1.126}$$

Jika kita telah menguraikan menjadi komponen-komponennya maka kita dapat menuliskan untuk masing-masing gerak arah sumbu X dan Y, menggunakan rumus-rumus gerak dengan percepatan konstan yang telah kita pelajari, relasi-relasi berikut:

Sumbu X:

(i) $v_x = v_{0x} + a_x t$

(ii) $x = \bar{v}_x t = \dfrac{v_{0x} + v_x}{2} t$

(iii) $x = v_{0x} t + \dfrac{1}{2} a_x t^2$

(iv) $v_x{}^2 = v_{0x}^2 + 2a_x x$ (1.127)

Sumbu Y:

(i) $v_y = v_{0y} + a_y t$

(ii) $y = \bar{v}_y t = \dfrac{v_{0y} + v_y}{2} t$

(iii) $y = v_{0y} t + \dfrac{1}{2} a_y t^2$

(iv) $v_y{}^2 = v_{0y}^2 + 2a_y y$ (1.128)

Sekarang untuk gerak proyektil yang ditembakkan dengan kecepatan awal $\mathbf{v}_0$ pada sudut theta, maka percepatan ke arah sumbu X adalah nol, yaitu $a_x = 0$, sedangkan percepatan ke arah sumbu Y adalah percepatan gravitasi bumi yaitu $a_y = -g$. Oleh karena itu berlaku:

(a) $v_x = v_{0x}$

(b) $x = v_{0x} t$ (1.129)

Dan

(i) $v_y = v_{0y} - gt$

(ii) $y = \bar{v}_y t = \dfrac{v_{0y} + v_y}{2} t$

(iii) $y = v_{0y} t - \dfrac{1}{2} g t^2$

(iv) $v_y{}^2 = v_{0y}^2 - 2gy$ (1.130)

Kecepatan awal $\mathbf{v}_0$ dapat dipecahkan menjadi dua komponen $v_{0x} = v_0\cos\theta$ dan $v_{0y} = v_0\sin\theta$. Untuk setiap waktu *t* maka kecepatan proyektil adalah $\vec{v}$ yang menurut persamaan (1.123), (1.129) dan (1.130) adalah:

(a) $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

(b) $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta$

(c) $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt$ (1.131)

Untuk kasus gerak peluru kita ini kita ambil arah ke atas adalah positif (arah pertambahan ketinggian) sedang arah ke bawah adalah negatif. **Jadi untuk gerak proyektil adalah gabungan dua buah gerak, yaitu arah sumbu X yang merupakan gerak dengan kecepatan tetap dan arah Y yang merupakan gerak dengan percepatan tetap.**

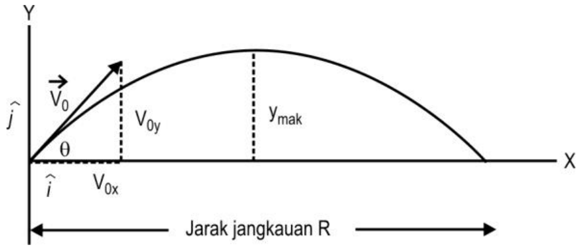
Sekarang untuk setiap waktu *t* maka koordinat partikel (peluru) dapat diberikan oleh:

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\theta) t$$

(1.132)

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.133)$$

Jika kita menggunakan dua persamaan untuk nilai *t* yang berbeda-beda maka lintasan seluruhnya dapat kita berikan sebagai berikut:



Gambar 1.47
Trayektori parabolik gerak peluru

Jangkauan X peluru sampai di tanah, dapat dirumuskan dari persamaan (1.133) dengan mengambil Y = 0 (sampai tiba di tanah), sehingga:

$$0 = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 2v_0 \sin\theta / g \qquad (1.134)$$

Substitusi nilai t ini ke persamaan (1.131) dan menuliskan X = R maka:

$$R = v_0 \cos\theta t = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

(1.135)

Kita lihat ternyata jangkauan R bergantung pada sudut dan kecepatan awal. Jika kecepatan awal dibuat tetap maka agar diperoleh jangkauan maksimum maka bagian sudut dalam persamaan harus berharga satu yaitu:

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (1.136)$$

Dengan syarat:

$$\sin(2\theta) = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ \qquad (1.137)$$

Tinggi maksimum peluru (Y = Y_{mak}= H) juga dapat dihitung dengan memandang bahwa pada titik tertinggi komponen vertikal kecepatan adalah nol yaitu:

$$v_y{}^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

$$v_y{}^2 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gy \Rightarrow 0 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gH$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad (1.138)$$

Contoh Soal:

Sebuah bola dilempar dengan laju 12 m/det membuat sudut 30^o terhadap horizontal. (a) Hitunglah waktu sebelum menyentuh tanah? (b) Berapa jauh bola melayang?

Penyelesaian:

(a) Kita boleh menggunakan rumus-rumus di atas. $y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$.

Untuk menghitung waktu tersebut sebelum menyentuh tanah dapat diambil y ≈ 0 sehingga 0 = (12 sin 30).t – ½ .10.t^2 → 6t = 5t^2 → 5t^2 – 6t = 0. Ini adalah persamaan kuadrat dengan solusi: t = 0 atau t = 6/5 = 1,2 det. Kita pilih t = 1,2 det sebagai waktu bola hampir menyentuh tanah.

(b) R = $v_0$cos 30 t= 12 m/det.0,87.1,2 det = 12,7 m.

6. Perkalian Silang Antar Vektor Posisi dengan Gaya

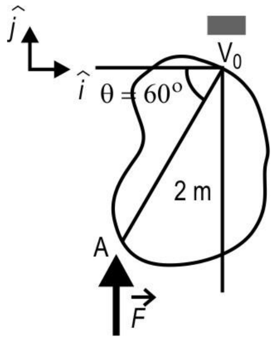
Kajian mekanika sangat erat kaitannya dengan konsep gaya, yang merupakan sumber penyebab gerak. Khusus mengenai gaya ini akan kita pelajari lebih mendalam nanti. Pada kuliah dinamika maka untuk sebuah gerak linear terkait dengan sebuah gaya. Kinematika gerak translasi seperti telah kita pelajari berusaha mencari hubungan-hubungan antara variabel posisi, kecepatan dan percepatan serta waktu. Untuk gerak rotasi kita juga telah mencari ekuivalensinya dengan gerak translasi yaitu seperti persamaan (1.119). Lalu apakah ada ekuivalensi gaya untuk gerak rotasi? Jawabannya ada, yaitu apa yang kita sebut *torka* (*torque*). Kita bayangkan sebuah batang kayu panjang *L* diikat ke suatu pivot pada salah satu ujungnya. Jika kita menekan batang ke bawah maka akan menyebabkan pivot berotasi pada sumbunya. Jika kita dekatkan tangan kita ke arah pivot dan menekan ke bawah batang tersebut sekali lagi maka ternyata kita memerlukan lebih banyak gaya agar be-rotasi lebih cepat. Dari berbagai eksperimen lalu kita dapat menyatakan hubungan berikut:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.139)$$

Dengan *r* adalah jarak dari titik rotasi ke di mana gaya dikenakan. Torka ini juga sering disebut dengan *momen gaya* (*moment of force*).

Contoh Soal:

Tentukan momen gaya $\vec{F} = (1\hat{i} + 20\hat{j})$ N seperti gambar berikut ini?



Penyelesaian:

Gaya bekerja melalui titik A pada benda tersebut. Oleh sebab itu dapat kita hitung momennya terhadap titik O sebagai berikut.

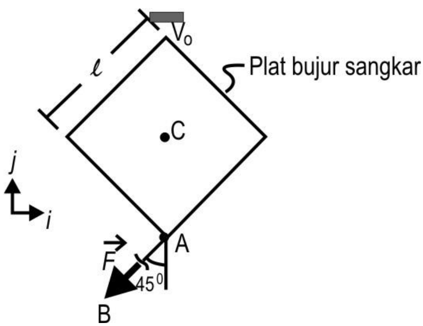
$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \{2\text{ m.cos } 60^o(-\hat{i}) + 2\text{m.sin } 60^o(-\hat{j})\} \text{ x } (1\hat{i} + 20\hat{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1m & -\sqrt{3}m & 0 \\ 1N & 20N & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(-1m.20N - (-\sqrt{3}m.1N)) =$$

$$= -20Nm\hat{k} + 1,732Nm\hat{k} = -18,268\hat{k}$$

Contoh Soal:

Sebuah plat bujursangkar digantung pada salah satu sudutnya seperti pada gambar. Pada diagonal yang berlawanan sebuah gaya 50 N diberikan dengan menarik melalui sebuah kawat AB. Tentukan momen gaya pada pusat C plat tersebut?



Penyelesaian:

Momen gaya pada terhadap titik C adalah: $\vec{\tau}_C = \vec{r}_{A/C} \times \vec{F}$. Jadi untuk menghitung $\vec{\tau}_C$ kita perlu dan $\vec{F}$. $\vec{r} = -CA\hat{j} = -\dfrac{\ell}{\sqrt{2}}\hat{j}$ (karena OA = 2CA = $\sqrt{2}\ell$)

$\vec{F} = F(-\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}) = -F(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$. Jadi momen gaya adalah

$$\vec{\tau}_C = -\frac{\ell}{\sqrt{2}}\hat{j}[-F(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})]$$

$$= \frac{\ell}{\sqrt{2}}F(\cos\theta\hat{j}\times\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\times\hat{i})$$

$$= -\frac{\ell}{\sqrt{2}}F\cos\theta\hat{k} = -\frac{2m}{\sqrt{2}}.50N.\cos 45^\circ\hat{k} = -50N.m\hat{k}$$

D. DINAMIKA GERAK

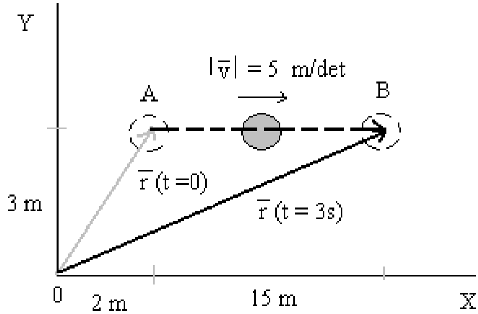
Anda telah mempelajari penggunaan vektor dalam memecahkan masalah-masalah mekanika (kinematika). Penggunaan vektor dalam dinamika yaitu pembahasan gerak benda dengan meninjau penyebab gerak, yaitu gaya yang memerlukan penguasaan lebih baik mengenai operasi-operasi vektor. Pembahasan dinamika akan kita berikan pada Modul 2 selanjutnya, yaitu saat kita membahas hubungan antara impuls, momentum dan gaya.

LATIHAN

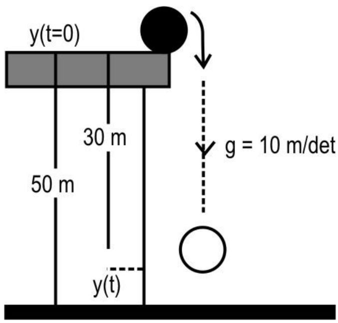
Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebuah partikel bergerak dalam bidang XY sedemikian hingga setiap titik kedudukan partikel dapat dinyatakan dengan x(t) = at dan y(t) = bt^2, dengan a = 2 m/det dan b = 0,5 m/det^2. Tentukan kecepatan dan percepatan partikel!

2) Sebuah partikel mempunyai persamaan kecepatan $\vec{v} = v_0\hat{i} - gt\hat{j}$. Tentukan posisi partikel pada waktu *t* jika koordinat awal saat t = 0 adalah (x_0, y_0)!
3) Lihatlah gambar berikut ini. Pada gambar, partikel bergerak dalam sumbu X dari titik A ke B. Tentukan posisi partikel saat t = 3 detik yaitu di titik B!



4) Sebuah bola massa 200 gr jatuh bebas dalam pengaruh gravitasi bumi dari ketinggian 50 m. Tentukan waktu jatuh bola setelah 30 m jika percepatan gravitasi bumi adalah g = 10 m/det^2!



5) Benda bermassa 0,5 kg bergerak horizontal arah sumbu x dari keadaan diam dan setelah 4 detik mempunyai kecepatan 20 m/det. Jika gerak benda adalah gerak dengan percepatan konstan, carilah percepatan tersebut!
6) Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi diberikan oleh:

$$\vec{r}(t) = \{A + Bt + Ct^2)\hat{i} + Dt\hat{j}$$

Dengan A = 1 m, B = 3 m/det, C = 1 m/det^2 dan D = 2 m/det. Tentukanlah perubahan posisi partikel (vektor pergeseran) antara waktu t = 2 det dan t = 3 det!

7) Sebuah partikel bergerak dengan posisi diberikan oleh:

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\hat{i} + B\sin(\omega t)\hat{j} + Ct\hat{k}$$

Dengan A,B,C adalah tetapan. Tentukan kecepatan partikel tersebut?

8) Sebuah bola di jatuhkan dari ketinggian H. Berapakah kecepatan bola saat menyentuh tanah?

9) Sebuah peluru meriam ditembakkan dari sebuah bidang miring. Tentukan besaran-besaran fisis yang perlu dicari?

10) Sebuah bola dilempar lurus ke atas dengan kecepatan 29,4 m/det dari puncak sebuah menara yang tingginya 98 m. (a) Hitunglah waktu bola sampai mencapai titik tertinggi; (b) Tinggi maksimum yang dicapai; (c) total jarak yang telah ditempuh setelah 2 detik; (d) Waktu bola sampai di tanah?

11) Dua buah partikel dengan vektor posisi masing-masing $\vec{r}_1 = (2t, -t^2, 3t^2 - 4t)$ dan $\vec{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4, t^3, -3t)$. Tentukan vektor kecepatan relatif partikel kedua terhadap partikel pertama pada suatu saat di mana t = 2?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $\vec{r}(t) = at\hat{i} + bt^2\hat{j}$;

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = a\hat{i} + 2bt\hat{j} = (2\hat{i} + 3\hat{j})\text{ m/det}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2b\hat{j} = 1\hat{j}\text{ m/det}^2$$

2) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ dengan $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$. $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = v_0\hat{i} - gt\hat{j}$.

Dari hubungan ini maka: $dx\hat{i} + dy\hat{j} = (v_0 i - gt\hat{j})dt$. Sehingga:

$$dx\hat{i} = v_0 dt\hat{i} \Rightarrow \hat{i} \cdot (dx\hat{i} = v_0 dt\hat{i}) \Rightarrow dx = v_0 dt \Rightarrow \int_{x0}^{x} dx = v_0 \int_0^t dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Dengan cara yang sama maka untuk komponen y: $y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$

Jadi posisi partikel saat t adalah $\vec{r}(t) = \{\vec{x}_0 + \vec{v}_0 t\}\hat{i} + \{\vec{y}_0 - \frac{1}{2} g t^2\}\hat{j}$

3) Partikel tersebut bergerak dengan kecepatan konstan $\vec{v} = 5\,(\text{m/det})\,\hat{i}$ yang juga merupakan kecepatan awal $\vec{v}_0$. Dari gambar posisi awal partikel adalah $\vec{r}_0 = (2\hat{i} + 3\hat{j})$ m. Kita gunakan rumus derivatif untuk kecepatan sehingga kita mempunyai:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt = \int_0^t \vec{v}_0 \hat{i} dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = v_0 \hat{i} t \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + v_0 \hat{i} t$$

$$\vec{r}(t = 3) = (2\hat{i} + 3\hat{j})\text{m} + (5\text{m/det}).(3\text{det})\hat{i} = 17\hat{i}\,\text{m} + 3\hat{\text{j}}\text{m} = (17\hat{i} + 3\hat{\text{j}})\text{m}$$

4) Persamaan gerak jatuh bebas mirip dengan persamaan gerak lurus dengan percepatan konstan $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Hanya untuk gerak jatuh bebas lintasannya dalam sumbu Y (vertikal) dan percepatan jatuh adalah percepatan gravitasi bumi g = 10 m/det^2. Jika kita pilih posisi awal adalah di atas tanah maka kita dapat menggunakan rumus ini:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Pada soal maka kecepatan awal adalah v = 0 m/det, dan posisi awal di y_0 = 0 m sehingga dari rumus:

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow (30\hat{j})\text{m} = \frac{1}{2}(10\text{m/det}^2\,\hat{j})t^2$$

Atau waktu untuk jatuh sejauh 30 m adalah: $t = \sqrt{6}$ det = 2,45 det.

Catatan: perhatikan bahwa rumus $\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ digunakan jika arah positif gerak dipilih sama dengan arah jatuh bola ke bawah, dengan percepatan gravitasi bumi $\vec{g}$ adalah positif. Jika kita melempar sesuatu ke atas dan arah ke atas kita ambil arah positif dengan acuan permukaan bumi sebagai y_0 = 0, maka kita tidak boleh menggunakan rumus di atas. Percepatan gravitasi selalu ke pusat bumi, sehingga kita perlu mengambil $\vec{g}$ adalah negatif dan rumus yang sesuai adalah $\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$.

5) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = \frac{(20-0)\hat{i}m/\det}{4\det} = 5\hat{i}$ m/det^2

6) $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 3\det) - \vec{r}(t = 2\det)$

$\vec{r}(t = 2\det) = \{1 + 3.2 + 1.2.2\}\hat{i} + 2.2\hat{j} = (11\hat{i} + 4\hat{j})$ m.

$\vec{r}(t = 3\det) = \{1 + 3.3 + 1.3.3\}\hat{i} + 2.3\hat{j} = (19\hat{i} + 6\hat{j})$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 3\det) - \vec{r}(t = 2\det) = \{(19 - 11)\hat{i} + (6 - 4)\hat{j}\} = \{8\hat{i} + 2\hat{j}\}$ m

7) Kita gunakan rumus $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sehingga:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t)\hat{i} + B\sin(\omega t)\hat{j} + Ct\hat{k}] = ... =$$

$$\vec{v} = -A\omega\sin(\omega t)\hat{i} + B\cos(\omega t)\hat{j} + C\hat{k}$$

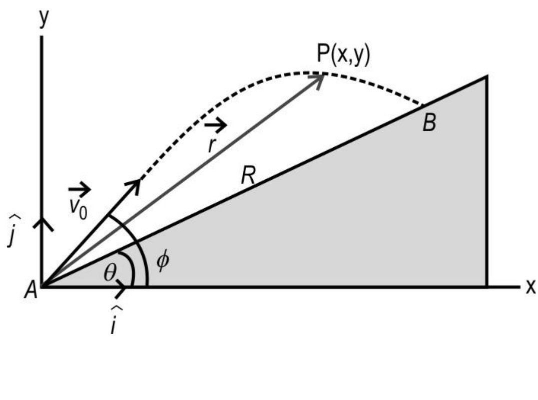
8) Jika arah positif adalah arah jatuh bola maka dapat kita gunakan rumus: $\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ dengan y(t) = H, v_0 = 0 m/det, y_0 = 0 m dan g = 10 m/det^2 sehingga untuk arah jatuh dapat dihitung dulu waktu sampai jatuh:

H = 0+0+1/2.g.t^2 → $t = \sqrt{2H/g}$

Gerak jatuh bebas adalah gerak dengan percepatan konstan sehingga $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ sehingga:

$$|\vec{v}(t)| = |\vec{v}_0 + \vec{g}t| = 0 + |\vec{g}|\sqrt{2H/g} \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$

9)



Vektor posisi untuk proyektil misal pada titik P(x,y) adalah:

$$\vec{v}_0 = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_0\cos\phi\hat{i} + v_0\sin\phi\hat{j}$$

Kecepatan pada titik P saat t adalah:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{g}t = v_0(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) - gt\hat{j}$$

Jika kecepatan adalah $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ maka vektor posisi adalah $\vec{r} = \int \vec{v}dt$ sehingga:

$$\vec{r} = \int \{v_0(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) - gt\hat{j}\}dt =$$

$$(v_0\cos\phi)t\hat{j} + \{(v_0\sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2\}\hat{j} \quad \text{(i)}$$

atau

$$x = (v_0\cos\phi)t \qquad \text{dan} \qquad y = (v_0\sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(ii)}$$

Kemudian kalau kita lihat maka terdapat hubungan $\tan\theta = y/x$, untuk sembarang titik pada bidang miring. Jika kita lihat perpotongan antara trayektori dengan bidang miring maka ini terjadi untuk waktu *t*:

$$\tan\theta = \frac{(v_0\sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2}{(v_0\cos\phi)t}$$

Persamaan ini dapat dipenuhi untuk:

$$t = 0 \quad \text{atau} \quad t = \frac{2v_0(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta)}{g\cos\theta} = \frac{2v_0\sin(\phi-\theta)}{g\cos\theta}$$

(iii)

Dari gambar maka saat t = 0 perpotongan adalah pada titik A sedangkan pada saat t = $\dfrac{2v_0\sin(\phi-\theta)}{g\cos\theta}$ perpotongan terjadi di titik B yaitu titik jatuh peluru pada bidang miring.

Jarak jangkauan R dapat dihitung dengan substitusi nilai *t* kedua dalam persamaan :

$$R = x\sec\theta = (v_0\cos\phi)t\sec\theta = (v_0\cos\phi)\{\frac{2v_0\sin(\phi-\theta)}{g\cos\theta}\}\sec\theta$$

$$= \frac{2v_0^2\sin(\phi-\theta)\cos\phi}{g\cos^2\theta} \qquad \text{(iv.1)}$$

Sudut tertentu agar diperoleh R_{maks} dapat dicari dengan metode berikut. Kita gunakan identitas trigonometri berikut:

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$ sehingga:

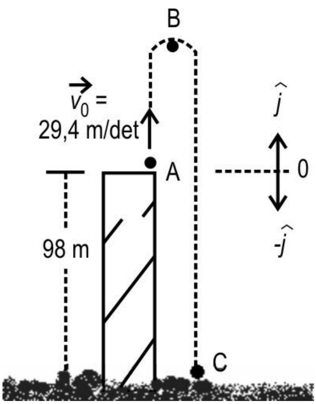
$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}\{\sin(2\phi - \theta) - \sin\theta\} \qquad \text{(iv.2)}$$

Nilai ini akan maksimum jika diambil $\sin(2\phi - \theta) = 1$, yaitu $\phi = \theta/2 + \pi/4$. Nilai R maksimumnya adalah:

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}\{1 - \sin\theta\} = \frac{v_0^2}{g(1-\sin^2\theta)}\{1 - \sin\theta\} = \frac{v_0^2}{g(1+\sin\theta)}$$

(v)

10)



Kita ambil arah positif arah ke atas dan ke bawah negatif dengan titik awal koordinat adalah pada puncak menara. Kecepatan awal v_0 = 29,4 m/det, g = -10 m/det^2 dan y_0 = - 98 m.

a) Pada titik tertinggi bola berhenti v = 0 sehingga v = v_0 – gt → t = (v – v_0)/g = (0 – 29,4 m/det)/(- 10 m/det^2) = 3 detik.
b) Titik tertinggi dicapai dengan waktu tertinggi yaitu:
   y = v_0t – ½ gt^2 = (29,4 m/det)(3 det) – ½ .10(m/det^2).(3det)^2 = 44,1 m.
c) Setelah 2 det maka jarak yang ditempuh:
   y = v_0t – ½ gt^2 = (29,4)(2)-1/2.10.2^2 = 39,2 m.

d) Dengan y = v_0t – ½ gt^2 maka untuk sampai di tanah maka y = -98 m. Sehingga – 98 m = (29,4 m/det)t – ½ .10 (m/det^2)t^2. Diperoleh persamaan kuadrat $t^2 - 6t - 20 = 0$. Solusi persamaan ini adalah t = 8,4 det. Solusi t negatif tidak digunakan karena waktu adalah besaran positif.

11) Kecepatan masing-masing:

$$\vec{v}_1 = \vec{r}_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 = \frac{d}{dt}\{2t\hat{i} - t^2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k}\} = 2\hat{i} - 2t\hat{j} + (6t-4)\hat{k}\Big|_{t=2}$$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}\,.$$

$$\vec{v}_2 = \vec{r}_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_2 = \frac{d}{dt}\{(5t^2 - 12t + 4)\hat{i} + t^2\hat{j} - 3t\hat{k}\}$$

$$= (10t - 12)\hat{i} + 3t^2\hat{j} - 3\hat{k}\Big|_{t=2} = 8\hat{i} + 12\hat{j} - 3\hat{k}$$

Kecepatan relatif partikel 2 terhadap partikel 1 adalah:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (8\hat{i} + 12\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}) = (6\hat{i} + 16\hat{j} - 11\hat{k})$$

RANGKUMAN

Studi mekanika biasanya dibagi menjadi dua topik, yaitu:

(1) Kinematika: mempelajari gerak benda (obyek) tanpa mempersoalkan sesuatu yang menyebabkan benda tersebut bergerak. Pada konteks ini kita belum memerlukan hukum-hukum Newton tentang gerak.

(2) Dinamika: mempelajari gerak benda (obyek) dengan memperhitungkan sesuatu yang menyebabkan benda tersebut bergerak, yaitu (vektor) gaya. Di sini selain kita ingin melihat bagaimana benda bergerak juga ingin menjawab *mengapa* (*why*) benda tersebut bergerak? Yaitu kita mesti meninjau gaya-gaya yang menyebabkan gerak tersebut? Di sini hukum-hukum Newton mesti diterapkan untuk dapat memecahkan problem.

Gerak benda secara umum dapat memilih salah satu atau kombinasi dari tipe-tipe gerak berikut, yaitu:

(i) Gerak Translasi. Merupakan gerak dalam garis lurus, misalnya mobil yang bergerak lurus atau gerak benda jatuh ke permukaan bumi.

(ii) Gerak Rotasi. Gerak rotasi ini mempunyai lintasan yang ingin memutari sesuatu. Lintasan dapat berbentuk lingkaran, elips atau yang lain.

(iii) Gerak Vibrasi. Gerak vibrasi ini memiliki karakteristik bergerak bolak-balik terhadap suatu titik kesetimbangan.

Jadi di alam, gerak suatu obyek dapat dimodelkan dengan tipe-tipe gerak di atas termasuk tipe kombinasinya.
Vektor jarak digambarkan terhadap titik asal koordinat (0) dan sering juga disebut vektor posisi karena memberi gambaran posisi sebuah benda terhadap acuan. Besaran fisis kecepatan (*velocity*) rata-rata $\vec{v}$ di definisikan dengan:

$$\vec{v}\text{ (rata-rata) } = \frac{\Delta\overline{x}}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{i}}{t_2 - t_1} \text{ (meter/detik)}$$

Laju rata-rata adalah perbandingan antara total jarak yang ditempuh dengan interval waktu yaitu

$$\text{v (rata-rata) } = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ (meter/detik)}$$

Selanjutnya jika benda mempunyai pergeseran yang sama untuk interval waktu yang sama maka benda disebut mempunyai *kecepatan seragam*. Kecepatan sesaat didefinisikan dengan:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \text{ (meter/detik)}$$

Percepatan rata-rata didefinisikan dengan:

$$\vec{a}\text{ (rata-rata) } = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Jadi syarat terjadinya mendapatkan percepatan jika ada perubahan kecepatan terhadap waktu. Benda yang bergerak dengan kecepatan konstan berarti percepatannya nol.

Kinematika gerak lurus berubah beraturan dapat dianalisis dengan rumus-rumus berikut:

(i) $v = v_0 + at$ (ii) $x = \overline{v}t = \dfrac{v_0 + v}{2}t$

(iii) $x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$ (iv) $v^2 = v_0^2 + 2ax$

Untuk gerak rotasi mempunyai rumusan similar yaitu:

(i) $v = \omega r$ (ii) $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

(iii) $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ (iv) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\phi - \phi_0\right)$

Gerak proyektil adalah gabungan dua buah gerak, yaitu arah sumbu X yang merupakan gerak dengan kecepatan tetap dan arah Y yang merupakan gerak dengan percepatan tetap. Gerak ini dapat dirumuskan dengan:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta)t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

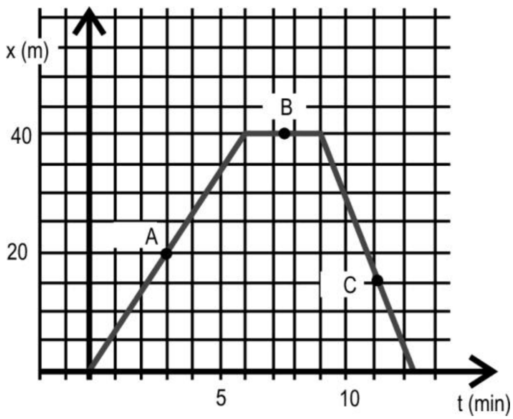
1) Sebuah partikel percepatannya diberikan oleh $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{i} + 5\cos t\hat{j} - 3\sin t\hat{k}$. Jika kecepatan mula-mula partikel adalah $\vec{v}_0 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, maka tentukan kecepatan partikel saat t = 60 det?
   A. $\vec{v} = 2e^{-60}\hat{i} + (\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3)\,\hat{j}$
   B. $\vec{v} = (6 - 2e^{-60})\hat{i} + (\frac{1}{2})\hat{k}$
   C. $\vec{v} = (6 - 2e^{-60})\hat{i} + (\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3)\,\hat{j} + (\frac{1}{2})\hat{k}$
   D. $\vec{v} = (6 - 2e^{-60})\hat{i} + (\frac{5}{2}\sqrt{3})\,\hat{j} + (\frac{1}{2})\hat{k}$

2) Sebuah partikel pada saat *t* digambarkan dengan $\vec{r} = 3e^{-2t}\hat{i} + 4\sin 3t\hat{j} + 5\cos 3t\hat{k}$. Berapakah besarnya kecepatan pada saat t = 0?
   A. $6\sqrt{5}$
   B. $\sqrt{5}$
   C. $5\sqrt{6}$
   D. $-6\sqrt{5}$

3) Dua partikel dengan vektor posisi masing-masing $\vec{r}_1 = (2t, -t^2, 3t^2 - 4t)$ dan $\vec{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4, t^3, -3t)$. Tentukan percepatan relatif partikel kedua terhadap partikel pertama pada suatu saat di mana t = 2?
A. $14\hat{j} - 6\hat{k}$
B. $-6\hat{k}$
C. $\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$
D. $10\hat{i} + 14\hat{j} - 6\hat{k}$

4) Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi $\vec{r} = (\cos\omega t, \sin\omega t)$ dengan ω adalah konstanta. Ungkapan berikut ini benar, *kecuali* ....
A. $\vec{r} \bullet \vec{v} = 0$ (hasil kali skalar)
B. $\vec{r} \times \vec{v} = \omega\hat{k}$ (hasil kali vektor)
C. $\vec{r} \perp \vec{v}$ ($\vec{r}$ tegak lurus kecepatan $\vec{v}$)
D. $\vec{r} // \vec{v}$ ($\vec{r}$ sejajar kecepatan $\vec{v}$)

5) Seseorang bergerak pada jalan lurus dari timur ke barat dan dapat digambarkan geraknya seperti diagram di bawah ini.



Maka berdasarkan diagram tersebut ungkapan berikut ini yang benar adalah ....
A. kecepatan rata-rata sama dengan kecepatan sesaat untuk seluruh interval waktu
B. kecepatan rata-rata sama dengan laju untuk seluruh interval waktu

C. besarnya kecepatan sesaat di titik A adalah 6,7 m/min
D. besarnya kecepatan sesaat di titik B sama dengan di titik A

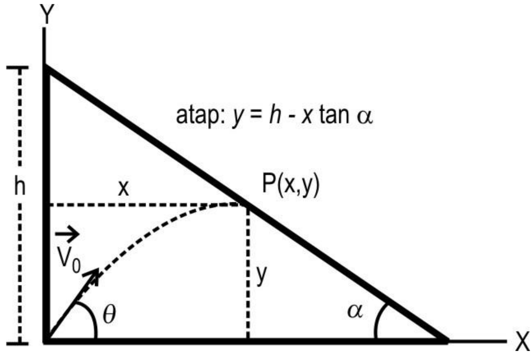
6) Sebuah pesawat terbang yang semula diam lalu berjalan dipercepat sejauh 600 m selama 12 detik sebelum akhirnya tinggal landas dan mengudara. Berapakah percepatan dari pesawat tersebut?
A. 8,11 m/det^2
B. 8,33 m/det^2
C. 8,45 m/det^2
D. 8,60 m/det^2

7) Sebuah benda dijatuhkan begitu saja dari atas jembatan dan mencapai permukaan air sungai dalam waktu 5 detik. Perkirakan tinggi jembatan tersebut di atas permukaan air? (g = 9,8 m/det^2) ....
A. 123 m
B. 223 m
C. 157 m
D. 311 m

8) Sebuah peluru meriam ditembakkan dengan kecepatan awal 95 m/det pada sudut 50^o dan setelah 5 detik jatuh di puncak bukit. Berapakah tinggi bukit tersebut?
(g = 9,8 m/det^2)
A. 231 m
B. 237 m
C. 241 m
D. 257 m

9) Seseorang berdiri tepat di kaki bukit yang sisinya mempunyai kemiringan 30^o terhadap horizontal. Orang tersebut kemudian menembakkan bola tenis ke atas pada sudut 60^o terhadap horizontal dengan kecepatan awal 33 m/det dan jatuh di sisi miring bukit. Berapa jauhkah bola akan mengenai sisi miring bukit jika diukur dari orang tersebut berdiri? (g = 9,8 m/det^2)
A. 128,3 m
B. 138,3 m
C. 222 m
D. 235 m

10) Sebuah proyektil ditembakkan ke arah atap gedung seperti pada gambar di bawah ini. Jika v_0 = 40 m/det, θ = 35^o , α = 30^o dan h = 15 m tentukan titik jatuh peluru di atap yaitu titik P(x,y)?



A. (12,00 m, 7,90)
B. (12,28 m, 7,90)
C. (12,28 m, 8,0)
D. (12,28 m, 11)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A. $\phi = \dfrac{1}{r}$

Kita hitung $\nabla^2\phi = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\dfrac{1}{r}\right)$ (1)

Kita evaluasi suku-x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{1/2} = \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Dengan cara yang sama untuk suku-y dan z:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{1/2} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{1/2} = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Dapat kita jumlahkan untuk seluruh suku:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Atau dapat kita buktikan $\nabla^2\left(\dfrac{1}{r}\right)$=0, sehingga $\phi = 1/r$ adalah solusi.

2) C. $\cos\alpha = 1/3 \; \cos\beta = 5/9; \; \cos\gamma = 7/9$

Dari $\vec{A}+\vec{B}=3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}$; $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=9$, maka kosinus-kosinus arah adalah:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{A}+\ \vec{B}\right|_x}{\left|\vec{A}+\vec{B}\right|}\quad=3/9=1/3.$$

$$\cos\alpha=1/3;\ \cos\beta=5/9;\ \cos\gamma=7/9$$

3) A.

$$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\alpha\hat{n};\ \ (\vec{A}\times\vec{B})^2=(\vec{A}\times\vec{B})\bullet(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})^2=A^2B^2\sin^2\alpha=A^2B^2(1-\cos^2\alpha)$$

Oleh karena itu

$$(\vec{A}\times\vec{B})^2=A^2B^2-(\vec{A}\bullet\vec{B})^2\ \ (\vec{A}\times\vec{B})^2=A^2B^2-(\vec{A}\bullet\vec{B})^2$$

4) D. $\hat{n}=\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$

5) D. $m(-11\hat{i}-10\hat{j}+9\hat{k})$

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=...=m(-11\hat{i}-10\hat{j}+9\hat{k})\text{ satuan.}$$

6) A.

$$\frac{1}{3}\vec{A}-3\vec{B}$$

$$=\frac{1}{3}(\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})-3(2\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})=-\frac{1}{3}\hat{i}(17)-10\hat{j}+\frac{49}{3}\hat{k}$$

7) C. m= - 5, dan n =6.

Kita hitung terlebih dahulu, vektor selisih:

$$m\vec{A}-n\vec{B}=m(-2\hat{i}+3\hat{j})-n(2\hat{i}+3\hat{j})=(-2m-2n)\hat{i}+(3m-3n)\hat{j}$$

$$m\vec{A}-n\vec{B}=\vec{C}=-2\hat{i}-3\hat{j}$$

Membandingkan kedua persamaan dan mengumpulkan suku-suku yang sesuai maka kita peroleh: $-m-2n=-2$ dan $3m-3n=-3$. Kedua persamaan ini dapat dipecahkan yang hasilnya m= - 5, dan n =6.

8) D. $30\hat{i}+25\hat{j}+2\hat{k}$.

$$\vec{\tau}=\vec{R}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -2 & 2 & 5\\ 3 & -4 & 5\end{vmatrix}=30\hat{i}+25\hat{j}+2\hat{k} \qquad \text{(Nm)}$$

9) C. -3

Kita terapkan ke konsep integral garis:

$$\int_C \vec{A}\bullet d\vec{r}=\int_C\{(3x^2-6yz)\hat{i}+(2y+3xz)\hat{j}+(1-4xyz^2)\hat{k}\}\bullet\{dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}\}$$

$$\int_C \vec{A}\bullet d\vec{r}=\int_C\{(3x^2-6yz)dx+(2y+3xz)dy+(1-4xyz^2)dz$$

Sepanjang garis lurus dari (0,0,0) ke (0,0,1) maka x = 0, y = 0, dx = 0 dan dy = 0 sedangkan z dari 0 ke 1. Jadi integral untuk segmen ini adalah:

$$\int_{z=0}^{z=1}\{(3.0^2-6.0.z).0+(2.0+3.0.z).0+(1-4.0.0.z^2)dz=\int_0^1 dz=1$$

Berturut-turut dengan cara yang sama maka hasil integral total adalah:

$$\oint_C \vec{A}\bullet d\vec{r}=1+1-5=-3$$

Tes Formatif 2

1) C. $\vec{v}=(6-2e^{-60})\hat{i}+(\tfrac{5}{2}\sqrt{3}-3)\hat{j}+(\tfrac{1}{2})\hat{k}$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=2e^{-t}\hat{i}+5\cos t\hat{j}-3\sin t\hat{k}\rightarrow$$

$$\vec{v}=\int(2e^{-t}\hat{i}+5\cos t\hat{j}-3\sin t\hat{k})dt$$

$\vec{v}=-2e^{-t}\hat{i}+5\sin t\hat{j}+3\cos t\hat{k}+c1$. Jika kecepatan awal adalah $\vec{v}_0=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ maka pada t = 0

dipenuhi: $4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}=-2\hat{i}+3\hat{k}+c_1\Rightarrow c_1=6\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$. Jadi kembali ke atas kita mempunyai:

$\vec{v} = -2e^{-t}\hat{i} + 5\sin t\hat{j} + 3\cos t\hat{k} + (6\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$. Untuk t = 60 det maka kecepatannya adalah

$\vec{v} = -2e^{-60}\hat{i} + 5\sin 60\,\hat{j} + 3\cos 60\hat{k} + (6\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$ atau:

$$\vec{v}(t = 60\,\text{det}) = -2e^{-60}\hat{i} + 5.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\hat{j} + 3.\tfrac{1}{2}\,\hat{k} + (6\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$$

$$\vec{v}(t = 60\,\text{det}) = (6 - 2e^{-60})\hat{i} + (5.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 3)\,\hat{j} + (3.\tfrac{1}{2} - 1)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t = 60\,\text{det}) = (6 - 2e^{-60})\hat{i} + (\tfrac{5}{2}\sqrt{3} - 3)\,\hat{j} + (\tfrac{3}{2} - 1)\hat{k}$$

2) A $6\sqrt{5}$ m/det.

$\vec{r} = 3e^{-2t}\hat{i} + 4\sin 3t\hat{j} + 5\cos 3t\hat{k} \rightarrow$

$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -6e^{-2t}\hat{i} + 12\cos 3t\hat{j} - 15\sin 3t\hat{k}$. Kecepatan pada waktu t = 0 adalah:

$\vec{v}(t = 0) = -6e^{-2.0}\hat{i} + 12\cos 3.0.\,\hat{j} - 15\sin 3.0\hat{k} = -6\hat{i} + 12\,\hat{j}$.

Besarnya kecepatan adalah $v = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

3) D. $10\hat{i} + 14\,\hat{j} - 6\hat{k}$

Percepatan masing-masing:

$$\vec{a}_1 = \dot{\vec{v}}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \ddot{\vec{r}}_1 = \ldots = -2\,\hat{j} + 6\hat{k}\Big|_{t=2} = -2\,\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = \dot{\vec{v}}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \ddot{\vec{r}}_2 = \ldots = 10\hat{i} + 12\hat{k}\Big|_{t=2} = 10\hat{i} + 12\hat{k}$$

Percepatan relatif partikel 2 terhadap partikel 1 adalah:

$\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \ldots = 10\hat{i} + 14\,\hat{j} - 6\hat{k}$

4) D. $\vec{r}\,//\,\vec{v}$ ($\vec{r}$ sejajar kecepatan $\vec{v}$)

$\vec{r} = \cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}$ dan $\vec{v} = d\vec{r}/dt = -\omega\sin\omega t\hat{i} + \omega\cos\omega t\hat{j}$

Dapat dihitung:

$\vec{r} \bullet \vec{v} = \ldots = 0\,;\, \vec{r} \bullet \vec{v} = 0 = rv\cos\theta = rv\cos 90^o \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$

$d^2\vec{r}/d\vec{t}^{\,2} = \ldots = -\omega^2\vec{r}$ dan $\vec{r} \times \vec{v} = \ldots = \omega\hat{k}$

Jadi jawaban D yang salah.

5) C. Besarnya kecepatan sesaat di titik A adalah 40/6 = 6,7 m/min

6) B. 8,33 m/det^2. Gunakan x = v_0t + ½ at^2 dengan v_0 = 0 m/det, x = 600 m.

7) A. 123 m.
Gunakan rumus $y = v_0 t + ½ gt^2$ dengan acuan y = 0 di lantai jembatan. Benda dijatuhkan begitu saja artinya benda jatuh bebas dengan kecepatan awal nol.

8) C. 241 m
Dengan rumus $y = v_0 . \sin\alpha . t – ½ gt^2$ maka dapat dihitung bahwa tinggi bukit y = 241.

9) A. 128,3 m.
Ini adalah gerak peluru dalam bidang miring, dan dengan g = 9,8 m/det^2, v_0 = 33 m/det, θ = 30^o, ϕ = 60^o serta rumus: R = $\dfrac{2v_0^2 \sin(\phi-\theta)\cos\phi}{g\cos^2\theta}$ maka dapat dihitung: R = {2 (33)^2 sin(60 – 30)cos(60)}/{9,8.cos 60.cos 60} = 128,3 m.

10) B. (12,28 m, 7,90)
Gunakan rumus-rumus gerak peluru dengan persamaan bidang atap adalah $y = h - x \tan\alpha$.

Glosarium

Skalar	:	Besaran fisis yang hanya mempunyai nilai atau besar atau *magnitude* saja. Seperti temperatur hanya diberikan nilainya saja, misal $T = 23^{o}$C.
Vektor	:	Besaran fisis yang perlu didefinisikan nilai dan sekaligus arahnya untuk menspesifikasinya. Seperti kecepatan harus dituliskan dalam bentuk vektor, v = 230 m/s ke timur, atau v = 230 i m/s, dengan i adalah vektor satuan yang menunjukkan arah vektor dalam sistem koordinat.
Vektor kolinear	:	Apabila beberapa vektor dalam keadaan satu garis atau sejajar satu sama lain, maka vektor-vektor ini disebut vektor-vektor (yang) kolinear. Vektor-vektor kolinear dihubungkan satu dengan yang lain secara *scaling* artinya suatu vektor yang kolinear dapat dituliskan sebagai perkalian suatu skalar dengan vektor yang dijadikan acuan, misalnya $\vec{C} = \alpha\vec{B}$ dengan α adalah skalar/bilangan penyekala.
Vektor koplanar	:	Apabila vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dalam satu bidang disebut vektor-vektor (yang) *koplanar* dan bila merupakan vektor yang segaris dan sekaligus sebidang maka disebut vektor-vektor *koplanar* dan *kolinear*.
Aljabar vektor	:	Operasi matematika vektor dengan vektor dapat berupa perkalian skalar yang menghasilkan skalar, atau perkalian vektor yang menghasilkan vektor.
Kalkulus vektor	:	Operasi matematika vektor dapat juga dalam bentuk kalkulus vektor seperti untuk *gradient*, *curl*, divergensi, teorema *stokes*, teorema divergensi.
Analisis vektor	:	Perhitungan-perhitungan fisika yang melibatkan besaran-besaran fisika perlu memperhatikan penerapan analisis vektor yang mencakup aljabar dan kalkulus vektor.

Daftar Pustaka

Alvin Harpern. (1988). *Physics: Schaum's Solved Problems Series*. McGraw Hill Book Company.

Andy Ruina and Rudra Pratap. (2002). *Introduction to Statics and Dynamics*, Oxford University Press.

Arya, A.P. (1979). *Introductory College Physics.* Macmillan Pub. Company.

Benjamin Crowell. *Newtonian Physics* dalam: www.lighandmatter.com.

Eutiquio C. Young. (1993). *Vektor and Tensor Analysis*. New York: Marcel Dekker.

Frank L. H. Wolfs. (2004). Rochester, NY: University of Rochester. http://physics.tamuk.edu/%7Esuson/word/2325/policies.doc

Halpern, A. (1988). *Physics: Schaum's Solved Problems Series*. McGraw-Hill Book Company.

John W. Norbury. (2000). *Elementary Mechanics and Thermodynamics*. Univ. of Wiskonsin-Milwaukee.

Murray R. Spiegel. (1983). *Theoretical Mechanics: Schaum Outline Series.* Singapore: McGraw Hill Book Comp.

Paul G. Hewitt. (2002). *Conceptual Physics*. Pearson-Addison-Wesley.

Richard Fitzpatrick. *Classical Mechanics: Introductory Course*. The University of Texas.