Modul 1

Tinjauan Ulang Konsep Mekanika Klasik

Paken Pandiangan, S.Si., M.Si.

PENDAHULUAN

Pada Buku Materi Pokok (BMP) Mekanika, Anda sudah mempelajari tentang kinetika dan dinamika suatu sistem baik melalui hukum-hukum Newton, Lagrange, Hamilton, maupun dengan cara pendekatan Poisson Bracket, yang kesemuanya itu membahas perangai suatu objek secara klasik. Pada hukum Newton, persamaan gerak suatu benda bersifat deterministik yang berarti bahwa masa depan suatu benda dapat ditentukan apabila posisi awal benda tersebut diketahui. Sedangkan pada formulasi fisika kuantum tidak mungkin dapat menentukan masa depan suatu benda dengan mengetahui keadaan awalnya, namun yang dapat kita tentukan hanyalah suatu peluang. Di sinilah peranan persamaan Lagrange, Hamilton, dan persamaan Poisson Bracket yang dapat menjembatani antara mekanika klasik dan mekanika kuantum. Pada Modul 1 dan Modul 2 nanti akan diperlihatkan bagaimana ketiga persamaan tersebut bisa langsung digunakan ketika kita menggarap fisika kuantumm.

Pada sistem benda yang sederhana, kita dapat menggunakan hukum Newton untuk menyelesaikan persoalan gerak suatu benda, tetapi jika kita dihadapkan pada sistem yang kompleks (sistem benda banyak), maka rasanya kita akan sangat kesulitan jika hanya mengandalkan hukum-hukum Newton. Namun demikian, untuk memecahkan persoalan dinamika suatu benda dengan sistem kompleks dapat digunakan dengan menggunakan persamaan Lagrange, Hamilton, dan Poisson Bracket yang sekaligus merupakan jembatan dalam mempelajari fisika kuantum.

Mekanika Lagrange bukanlah suatu teori baru, tetapi merupakan perluasan dari Mekanika Newton, sehingga merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menentukan persamaan gerak dari berbagai macam sistem dinamik yang ada. Demikian juga persamaan Hamilton, dan persamaan Poisson Bracket.

Pada modul ini akan dibagi ke dalam dua kegiatan belajar, Kegiatan Belajar 1 akan membahas tentang Energi total suatu sistem yang meliputi koordinat umum, kecepatan umum, momentum umum, gaya umum, energi total sistem, fungsi Lagrange dan persamaan Lagrange. Sedangkan pada Kegiatan Belajar 2 akan dibahas tentang persamaan Hamilton, dan persamaan Poisson Bracket.

Secara umum tujuan pembelajaran modul ini adalah mahasiswa dapat melakukan tinjauan ulang terhadap teori yang terdapat dalam Mekanika Klasik. Secara lebih khusus lagi tujuan pembelajaran modul ini adalah Anda dapat:

1. menjelaskan koordinat umum,
2. menjelaskan kecepatan umum,
3. menjelaskan momentum umum,
4. menerapkan energi total suatu sistem,
5. menerapkan gaya umum,
6. menjelaskan fungsi Lagrange,
7. menerapkan persamaan Lagrange pada persoalan fisika,
8. menjelaskan fungsi Hamilton,
9. menerapkan persamaan Hamilton dalam persoalan fisika, serta
10. menerapkan persamaan Poisson Bracket dalam persoalan fisika.

Agar Anda dapat berhasil dalam mempelajari modul ini, maka berusahalah secara sungguh-sungguh untuk mempelajari teori-teorinya, berlatih mengerjakan soal-soal baik yang tertera dalam latihan maupun soal-soal yang terdapat pada buku daftar pustaka. Di samping itu, juga Anda wajib mengerjakan semua soal-soal yang terdapat pada tes formatif.

Selamat belajar, semoga Anda berhasil!

Kegiatan Belajar 1

Energi Total Suatu Sistem Fisika

A. KOORDINAT UMUM

Anda telah mempelajari persamaan gerak suatu sistem benda menurut perumusan hukum Newton, yaitu dengan menggunakan koordinat Kartesian. Koordinat ini hanya dapat digunakan dalam sistem benda yang sederhana, namun jika kita akan membahas tentang sistem suatu benda yang dipengaruhi oleh gaya sentral (gerak planet misalnya), maka kita lebih cocok menggunakan koordinat polar, sebab dengan menggunakan koordinat polar persamaan gerak sistem suatu benda menjadi lebih sederhana. Sebenarnya untuk merumuskan gerak suatu sistem benda kita dapat menggunakan koordinat apa saja, misalnya koordinat polar, silinder, maupun koordinat bola. Tentunya Anda sudah mempelajari bagaimana mengubah koordinat dari satu sistem koordinat ke sistem koordinat yang lainnya melalui suatu transformasi koordinat. Namun, Anda sudah seharusnya memahami pada saat kapan menggunakan sistem koordinat yang ada.

Misalnya dalam masalah interaksi dua benda, kita dapat mengganti koordinat vektor posisi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ dari partikel 1 dan 2 dengan koordinat $\mathbf{R}$ dari pusat massa, dan koordinat vektor posisi relatif $\mathbf{r}$ dari kedua partikel tersebut. Penggantian ini dimaksudkan agar gaya interaksi kedua partikel saling bergantung dari posisi relatif antara kedua partikel. Alasan lainnya adalah dalam banyak hal kita memang lebih tertarik untuk menyatakan gerak relatif antara kedua partikel seperti halnya gerak planet. Dalam masalah sistem banyak partikel, lebih sesuai menggunakan koordinat pusat massa karena gerak pusat massa dapat dinyatakan dengan persamaan yang lebih sederhana.

Sistem-sistem koordinat seperti tersebut di atas, termasuk sistem koordinat Kartesian, dimasukkan ke dalam satu sistem koordinat dengan nama Koordinat Umum. Koordinat umum dapat berupa sudut, panjang, atau hubungan antara keduanya. Kita tidak perlu membayangkan bahwa koordinat umum merupakan suatu perangkat sumbu-sumbu yang saling tegak lurus dan membentuk suatu vektor seperti koordinat Kartesian. Satu perangkat koordinat umum adalah setiap perangkat koordinat umum yang dapat menyatakan posisi setiap saat partikel penyusun sistem. Oleh karena itu, sangat perlu adanya suatu metode umum untuk memperoleh suatu persamaan gerak langsung dalam bentuk koordinat umum yang sesuai. Metode yang demikian pertama kali dikemukakan oleh Lagrange.

Dalam kasus-kasus yang telah disebutkan di atas, jumlah koordinat semua partikel penyusun sistem dalam sistem koordinat baru sama seperti dalam sistem koordinat Kartesian. Seperti misalnya dua koordinat x, y untuk partikel bergerak pada bidang datar diganti dengan dua koordinat polar r, θ. Tiga koordinat ruang x, y, z, diganti dengan koordinat silinder atau koordinat bola. Mungkin koordinat x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, untuk sepasang partikel diganti dengan tiga koordinat pusat massa X, Y, Z dan tiga koordinat x, y, z, dari partikel satu relatif terhadap yang lain. Mungkin juga mengganti tiga koordinat satu partikel relatif terhadap koordinat diam, dengan tiga koordinat relatif terhadap koordinat bergerak.

Tetapi tidaklah selalu jumlah koordinat dalam sistem koordinat baru sama dengan jumlah koordinat dalam sistem koordinat Kartesian. Misalnya benda tegar yang berotasi terhadap sumbu tertentu. Posisi benda dapat dinyatakan dengan satu koordinat sudut φ. Jadi dalam hal ini koordinat sebanyak tiga kali jumlah partikel penyusun benda tegar dapat diganti dengan satu koordinat saja.

Benda tegar yang merupakan sistem banyak partikel, untuk menyatakan konfigurasinya cukup dengan 6 (enam) koordinat. Tiga koordinat untuk menyatakan posisi pusat massa dan tiga lainnya untuk menyatakan orientasi atau rotasinya. Hal ini terjadi karena benda tegar adalah sebuah contoh sistem banyak partikel yang mengalami kendala. Dalam perumusan dinamika Newton, kendala diberikan sebagai masukan tambahan, misalnya pada benda tegar kendalanya adalah jarak dan orientasi masing-masing elemen adalah tetap. Dalam sistem dinamika benda, terdapat 2 jenis kendala, yaitu kendala holonomik dan kendala nonholonomik. Persamaan kendala pada holonomik dapat digunakan untuk mengeliminasi variabel bebas, sedangkan pada kendala nonholonomik tidak bisa dipergunakan untuk mengeliminasi variabel bebas misalnya kasus kelereng yang menggelinding di permukaan bola.

Contoh

Untuk menyatakan posisi 1 partikel di dalam ruang, diperlukan 3 buah koordinat Kartesian x, y, z. Untuk dua partikel diperlukan 6 koordinat yaitu x_1, y_1, z_1, untuk partikel yang pertama dan x_2, y_2, z_2 untuk partikel yang kedua.

Koordinat umum lazimnya diberi simbol q dengan indeks angka. Jika terdapat N buah partikel yang memiliki *k* buah persamaan kendala, maka diperlukan $n = 3N\text{-}k$ koordinat untuk menyatakan posisi dan orientasinya. Karena dalam konfigurasi suatu sistem koordinat umum harus mempunyai satu set harga yang pasti, maka koordinat $q_1, q_2, q_3, q_4 \ldots, q_n$ merupakan fungsi dari koordinat Kartesian, yang memungkinkan juga sebagai fungsi dari waktu t jika berada dalam keadaan sistem koordinat bergerak, dan dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut.

$$q_1 = q_1 (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ;\ldots, x_N, y_N , z_N ; t)$$
$$q_2 = q_2 (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ;\ldots, x_N , y_N , z_N ; t)$$
$$\vdots$$
$$q_n = q_n (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2, z_2 ;\ldots,x_N , y_N , z_N ; t) \qquad 1.1a$$

Secara umum dapat dituliskan sebagai

$$q_k = q_k (x_i, y_i, z_i ; t) \qquad 1.1b$$

dengan $k = 1, 2, 3\ldots n$ dan $i = 1, 2\ldots N$

Sebaliknya terdapat hubungan timbal balik yang menyatakan koordinat Kartesian sebagai fungsi dari koordinat umum, yaitu dengan transformasi sebagai berikut.

$$x_1 = x_1 (q_1 , q_2 , q_3 \ldots,q_n ; t)$$
$$y_1 = y_1 (q_1 , q_2 , q_3 \ldots,q_n ; t)$$
$$z_1 = z_1 (q_1 , q_2 , q_3 \ldots,q_n ; t)$$
$$\vdots$$
$$x_N = x_N (q_1 , q_2 , q_3\ldots,q_n ; t)$$
$$y_N = y_N (q_1 , q_2 , q_3\ldots,q_n ; t)$$
$$z_N = z_N (q_1 , q_2 , q_3\ldots,q_n ; t) \qquad 1.2a$$

Atau secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$x_i = x_i (q_{k;} t)$$
$$y_i = y_i (q_{k;} t) \text{ dan}$$
$$z_i = z_i (q_{k;} t), \text{ dengan } i = 1, 2,\ldots,N \text{ dan } k = 1, 2\ldots,n \ (n= 3N). \qquad 1.2b$$

Contoh

Sebuah partikel bergerak dalam bidang datar xy. Tentukanlah koordinat umum yang sesuai dengan keadaan partikel tersebut!

Penyelesaian

Koordinat Kartesian pada partikel tersebut adalah $x_1 = x$ dan $y_1 = y$. Sebagai koordinat umum dipilih koordinat polar sehingga $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. Maka menurut persamaan (1.1b) diperoleh:

$q_1 = q_1 (x_1 , y_1)$ adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan

$q_2 = q_2 (x_1 , y_1)$ adalah $\theta = arc\,tg \dfrac{y}{x}$.

Sebaliknya

$x_1 = x_1 (q_1, q_2)$ adalah $x = r \cos \theta$, dan

$y_1 = y_1 (q_1 , q_2)$ adalah $y = r \sin \theta$.

B. KECEPATAN UMUM

Jika koordinat suatu sistem N partikel dinyatakan dengan koordinat umum q_1, q_2, q_3 …,q_n, maka $\dfrac{dq_n}{dt} = \dot{q}_k$ untuk sembarang koordinat q_k disebut *kecepatan umum* yang berkaitan dengan koordinat tersebut. Misalnya kecepatan umum yang berkaitan dengan koordinat Kartesian x_i adalah $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$, kecepatan umum yang berkaitan dengan koordinat sudut θ adalah $\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, dan lain sebagainya. Kecepatan umum dapat dinyatakan dalam koordinat Kartesian dan kecepatan, demikian pula sebaliknya. Kecepatan dalam koordinat Kartesian dapat dinyatakan dalam koordinat umum dengan jalan mendiferensiasi persamaan (1.2b) terhadap waktu, dan hasilnya adalah

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \qquad 1.3$$

dengan cara yang sama diperoleh kecepatan untuk komponen y dan z sebagai

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} \text{, dan} \qquad 1.4$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial t} \qquad 1.5$$

secara umum kecepatan suatu sistem benda dapat dituliskan sebagai

$$\dot{r}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial t} \qquad 1.6$$

Contoh

Tentukanlah kecepatan sebuah partikel yang berada pada bidang xy yang memenuhi persamaan $x = r \cos(\theta + \omega_o t)$ dan $y = r \sin(\theta + \omega_o t)$!

Penyelesaian

Kecepatan partikel tersebut masing-masing dalam arah sumbu x dan y adalah:

$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta + \omega_0 t) - r\dot{\theta}\sin(\theta + \omega_0 t) - r\omega_0 \sin(\theta + \omega_0 t)$, dan

$\dot{y} = \dot{r}\sin(\theta + \omega_0 t) + r\dot{\theta}\cos(\theta + \omega_0 t) + r\omega_0 \cos(\theta + \omega_0 t)$.

C. ENERGI KINETIK UMUM DAN MOMENTUM UMUM

Energi kinetik untuk sistem yang terdiri dari N partikel, dalam koordinat Kartesian dapat dinyatakan sebagai

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{x}}_i^{\,2} + \dot{\vec{y}}_i^{\,2} + \dot{\vec{z}}_i^{\,2} \right), \text{ atau } T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \qquad 1.7$$

dengan $\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \dot{\vec{x}}_i^{\,2} + \dot{\vec{y}}_i^{\,2} + \dot{\vec{z}}_i^{\,2}$, yaitu harga kecepatan yang berkaitan dengan posisi r_i. Besarnya energi kinetik dalam koordinat umum dapat diperoleh apabila persamaan (1.6) kita substitusikan ke dalam persamaan (1.7), dan hasilnya adalah:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k,l}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2\sum_{k}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l}^{n} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2\sum_{k}^{n} M_k \dot{q}_k + M_0 \cdot \qquad 1.8$$

di mana $M_{kl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$, $M_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$, dan

$$M_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

Jadi secara umum energi kinetik dinyatakan sebagai

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \qquad 1.9$$

Terlihat dari persamaan (1.9) bahwa T_2 kuadratik terhadap kecepatan umum, T_1 linear terhadap kecepatan umum, dan T_0 tidak bergantung pada kecepatan umum. Koefisien M_0, M_k dan M_{kl} adalah fungsi dari koordinat umum q_1, $q_2,\ldots,q_n$ dan t. Jika $M_{kl} = 0$, kecuali $k = l$, maka dikatakan koordinat umum bersifat ortogonal. Koefisien M_0 dan M_k sama dengan nol jika unsur waktu t tidak secara eksplisit terdapat dalam transformasi $q_k = q_k (r_i ; t)$. Dengan kata lain jika sistem koordinat umum tidak tergantung waktu, maka untuk koordinat yang tetap, hanya koefisien M_{kl} saja yang tidak nol, sehingga T merupakan fungsi dari kuadrat kecepatan umum.

Contoh

Hitunglah energi kinetik sebuah partikel bermassa m yang berada pada bidang datar!

Penyelesaian

Kasus partikel bermassa m yang berada pada bidang datar dalam koordinat polar, persamaannya adalah:

$$x = r\cos\theta \ , \ \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$y = r\sin\theta \ , \ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Jadi besarnya energi kinetik sebuah benda bermassa m yang berada pada bidang datar adalah:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Tampak di dalam T tidak terdapat bagian linear dalam q_k dan tidak terdapat bentuk silang $q_k q_\ell$ (dalam hal ini $r\theta$), karena koordinat polar adalah koordinat ortogonal.

Di dalam koordinat Kartesian telah diketahui bahwa komponen momentum linear ke arah sumbu x, y dan z dapat diturunkan melalui diferensiasi persamaan (1.7) terhadap posisi yang secara berturut-turut adalah:

$$p_{ix} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \,,\; p_{iy} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i \,,\; p_{iz} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = m\dot{z}_i \qquad 1.10$$

Dalam hal mana kasus sebuah partikel yang bergerak pada bidang datar, dengan menggunakan koordinat polar, maka energi kinetiknya adalah

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \qquad 1.11$$

Besarnya komponen momentum linear pada arah r dan θ secara berturut-turut dapat dirumuskan sebagai

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ , dan } p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad 1.12$$

Hal yang sama akan kita diperoleh pada gerak tiga dimensi dengan menggunakan koordinat bola maupun dengan menggunakan koordinat silinder.

Dengan demikian kita dapat menunjukkan bahwa untuk setiap koordinat q_k yang menunjukkan pergeseran linear setiap partikel pada arah tertentu, momentum linear partikel pada arah tersebut adalah $\partial T / \partial \dot{q}_k$. Demikian pula untuk koordinat q_k yang menunjukkan pergeseran sudut partikel atau kelompok partikel yang berotasi terhadap sumbu tertentu, momentum sudut terhadap sumbu tersebut adalah juga $\partial T / \partial \dot{q}_k$. Oleh karena itu, *momentum umum* yang berhubungan dengan koordinat umum q_k dapat dituliskan sebagai

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \qquad 1.13$$

dari persamaan (1.13) terlihat bahwa jika q_k adalah posisi (jarak), maka p_k merupakan momentum linear, sedangkan jika q_k adalah simpangan sudut, maka p_k merupakan momentum sudut.

D. GAYA UMUM

Misalkan suatu sistem terdiri dari N partikel, mempunyai n = 3N derajat kebebasan dan koordinat umumnya $q_1, q_2, q_3 \ldots, q_n$. Perubahan kecil konfigurasi sistem dari $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ke konfigurasi baru $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2 \ldots, q_n + \delta q_n)$, maka perubahan tersebut di dalam koordinat Kartesian akan bergerak dari posisi $(x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ ke posisi $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1 \ldots, x_N + \delta x_N, y_N + \delta y_N, z_N + \delta z_N)$. Atau secara singkat, untuk partikel ke-i berubah dari posisi (x_i, y_i, z_i) ke posisi $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$, di mana perubahan kecil masing-masing x_i, y_i, dan z_i dapat dituliskan sebagai

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \ , \ \delta y_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \ , \ \delta z_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad 1.14$$

Contoh

Tentukanlah matriks δ_x dan δ_y sebuah partikel yang bergerak dalam bidang datar!

Penyelesaian

Dengan menggunakan koordinat polar, maka kita dapat menentukan bahwa $q_1 = r$ dan $q_2 = \theta$. Untuk satu partikel $x_1 = x = r \cos\theta$ dan $y_1 = y = r \sin\theta$, maka dengan menggunakan persamaan (1.14) diperoleh:

$$\delta x = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\delta q_2 = \frac{\partial x}{\partial r}\delta_r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta_\theta = \cos\theta \ \ \delta r - r \ \ \sin\theta \text{, dan}$$

$$\delta y = \frac{\partial y_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_1}{\partial q_2}\delta q_2 = \frac{\partial y}{\partial r}\delta_r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta_\theta = \sin\theta \ \ \delta r + r \ \ \cos\theta$$

atau dalam bentuk matriks transformasi pergeseran, δ_x dan δ_y dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{vmatrix}\delta x\\ \delta y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r & \sin\theta\\ \sin\theta & r & \cos\theta\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\delta r\\ \delta\theta\end{vmatrix}$$

Jika suatu sistem terdiri dari N partikel, di mana masing-masing partikel berada pada posisi x_1, y_1, z_1, …, x_N, y_N, z_N padanya bekerja gaya –gaya sebesar $\mathbf{F_{1x}}$, $\mathbf{F_{1y}}$, $\mathbf{F_{1z}}$, …, $\mathbf{F_{Nx}}$, $\mathbf{F_{Ny}}$, $\mathbf{F_{Nz}}$, dan mengalami pergeseran $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$, …, $x_N + \delta x_N$, $y_N + \delta y_N$, $z_N + \delta z_N$, maka usaha yang dilakukan gaya tersebut adalah :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i\right) \qquad 1.15$$

apabila persamaan (1.14) kita substitusikan ke dalam persamaan (1.15), maka diperoleh

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k \qquad 1.16$$

di mana

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \qquad 1.17$$

Q_k disebut dengan gaya umum yang merupakan fungsi dari koordinat umum q_k dan mungkin juga merupakan fungsi dari waktu *t*. Karena δW berdimensi usaha, maka jika δq_k berdimensi jarak, berarti Q_k akan berdimensi gaya. Jika δq_k berdimensi sudut, maka Q_k akan berdimensi momen gaya.

Apabila gaya yang bekerja pada suatu sistem bersifat konservatif, maka hubungan antara usaha yang dilakukan gaya dan perubahan energi potensial adalah $\delta W = -\delta V$. Untuk sistem yang terdiri dari N partikel dalam koordinat Kartesian diperoleh hubungan,

$$\delta W = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) \qquad 1.18$$

perhatikanlah bahwa persamaan (1.18) jika dinyatakan dalam koordinat umum, maka dapat dituliskan sebagai

$$\delta W = -\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k \qquad 1.19$$

cobalah bandingkan persamaan (1.19) dengan persamaan (1.16), dengan demikian kita dapat merumuskan bahwa gaya umum juga memenuhi persamaan

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad 1.20$$

E. PERSAMAAN LAGRANGE'S

Tentunya Anda telah mempelajari persamaan Lagrange's berikut cara penurunannya dari mata kuliah Mekanika, namun untuk sekedar mengingatkan di sini akan dibahas kembali mengenai hal tersebut. Persamaan dinamika menurut hukum Newton dapat dituliskan sebagai

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad 1.21$$

Sedangkan untuk sistem yang konservatif berlaku formulasi

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \qquad 1.22$$

persamaan (1.22) memiliki pengertian bahwa

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad 1.23$$

Namun di pihak lain kita telah mengetahui bahwa besarnya energi kinetik suatu benda memenuhi persamaan $T = \frac{1}{2}mv^2$. Jika Energi kinetik ini kita difrensiasi terhadap posisi, maka hasilnya adalah nol.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad 1.24$$

Dengan demikian persamaan (1.23) dapat juga kita tuliskan dalam bentuk

$$F_x = -\frac{\partial(V-T)}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial(V-T)}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial(V-T)}{\partial z} \; \text{atau} \; F_{q_k} = -\frac{\partial(V-T)}{\partial q_k} \qquad 1.25$$

dengan cara yang sama pula (tanpa merubah harganya), maka persamaan (1.13) dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$p_k = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_k} \qquad 1.26$$

Substitusi persamaan (1.26) dan (1.25) ke dalam persamaan (1.21) akan memberikan

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right) \qquad 1.27$$

di mana $L = T - V$, yang dikenal sebagai *fungsi Lagrange's*, dengan demikian persamaan (1.27) dapat dituliskan dalam bentuk

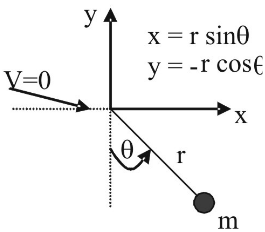
$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad 1.28$$

Persamaan (1.28) dikenal sebagai *persamaan Lagrange's* untuk sistem *konservatif.*

Dari uraian tersebut jelaslah bahwa persamaan Lagrange dapat diturunkan dari persamaan gerak Newton. Keduanya merupakan cara yang berbeda tetapi ekivalen dalam menyatakan hukum-hukum tentang gerak yang sama. Suatu persamaan gerak yang diperoleh dengan persamaan Lagrange dapat pula dicari dengan hukum-hukum Newton tentang gerak. Tetapi untuk sistem yang sifatnya lebih kompleks, biasanya lebih mudah mencari energi kinetik dan energi potensialnya bila dinyatakan dalam koordinat umum, kemudian menggunakan persamaan Lagrange's. Untuk sistem yang mengalami kendala (*constraint*) tertentu, maka cara Lagrange's akan lebih mudah digunakan. Dari cara penurunan persamaan Lagrange's, jelaslah bahwa persamaan tersebut memiliki bentuk yang sama dalam setiap sistem koordinat umum. Fungsi Lagrange L mempunyai harga yang sama untuk setiap perangkat posisi dan kecepatan tertentu tanpa perlu memperhatikan sistem koordinat yang digunakan, tetapi bentuk fungsi Lagrange mungkin akan berbeda di dalam sistem koordinat yang berbeda. Persamaan Lagrange merupakan cara yang seragam dalam menyatakan persamaan gerak suatu sistem, tak tergantung dari jenis sistem koordinat yang digunakan. Persamaan Lagrange merupakan titik awal perkembangan dalam perumusan mekanika, sekaligus merupakan jembatan dalam mempelajari Fisika Kuantum.

Contoh

Sebuah bandul matematis mengalami ayunan sederhana (lihat gambar).



Apabila sudut θ dianggap cukup kecil, potensial berharga 0 di x = 0, dan y = 0 (sebagai titik acuan), serta θ = 0 pada sumbu (-y), maka tentukanlah:

a. energi kinetik sistem,
b. energi potensial sistem,
c. fungsi Lagrange's,
d. persamaan geraknya (persamaan Lagrange).

Penyelesaian

a. energi kinetik sistem adalah

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

b. energi potensial sistem adalah

$$V = mgy = -mgr\cos\theta$$

c. fungsi Lagrange's

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta$$

d. persamaan gerak

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$, hasilnya adalah: $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0$, dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\ ,\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)+mgr\sin\theta=0$$

untuk θ yang kecil, $\sin\theta \approx \theta$, sehingga persamaan geraknya pada keadaan r yang konstan adalah

$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$, di mana $\omega^2=\dfrac{g}{r}$

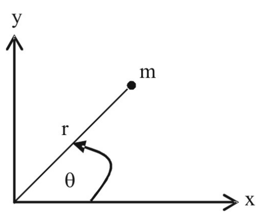
Untuk mencari persamaan gerak suatu sistem dengan menggunakan persamaan Lagrange's, maka langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah:

a. memilih koordinat yang cocok untuk menyatakan konfigurasi sistem.
b. menentukan energi kinetik T dinyatakan dalam koordinat atau kecepatan umum.
c. mencari energi potensial V sebagai fungsi koordinat umum apabila sistem dalam keadaan konservatif, dan jika sistem tidak konservatif carilah gaya umum Q_k.
d. gunakan persamaan Lagrange yang sesuai untuk mencari persamaan gerak sistem.

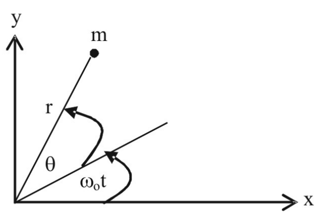
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukanlah koordinat umum sebuah partikel yang berada pada bidang datar dua dimensi xy, apabila koordinat umum yang dipilih berupa koordinat polar yang berotasi dengan kecepatan sudut ω_o berlawanan dengan arah jarum jam (lihat gambar)!



Koordinasi polar diam



Koordinat polar berotasi

2) Hitunglah besarnya energi kinetik sebuah partikel yang berada pada bidang datar bila terdapat unsur t secara eksplisit dalam transformasi $q_k = q_k (r_i, t)$, misalnya koordinat polar berotasi dengan kecepatan sudut ω_o!
3) Jika besarnya energi kinetik sebuah partikel dalam koordinat umum dinyatakan sebagai
$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{n} M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\sum_{k}^{n} M_k\dot{q}_k + M_0$, maka tentukanlah momentum umum partikel tersebut!
4) Tentukanlah komponen gaya umum pada suatu partikel yang bergerak pada bidang datar!
5) Sebuah benda bermassa m bergetar selaras sederhana pada arah sumbu x. Tentu-kanlah persamaan gerak benda tersebut dengan penggunakan persamaan Lagrange's!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Pilih
$x_1 = x_1 (q_1 , q_2 ; t)$ adalah $x = r \cos (\theta + \omega_o t)$, dan
$y_1 = y_1 (q_1, q_2 ; t)$ adalah $y = r \sin (\theta + \omega_o t)$.
Demikian juga sebaliknya
$q_1 = q_1 (x_1, y_1 ; t)$ adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan
$q_2 = q_2 (x_1, y_1 ; t)$ adalah $\theta = arc\ \ tg(\frac{y}{x}) - \omega_0\ \ t$.
2) Gunakan persamaan $x = r \cos (\theta + \omega_o t)$, dan $y = r \sin (\theta + \omega_o t)$, dan hasilnya adalah:
$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mr^2\omega_0\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\omega_0{}^2 = T_2 + T_1 + T_0$$
Jadi tampak di dalam T terdapat bagian yang merupakan fungsi linear dari q_k yaitu θ, dan bagian yang tidak tergantung dari q_k (θ atau r), yakni $\frac{1}{2} m r^2 \omega_o^2$.
3) Gunakan persamaan $p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$, dan hasilnya adalah $p_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl}\dot{q}_l + B_k$.

4) Dalam koordinat Kartesian, komponen gaya yang bekerja pada partikel adalah $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$, sedangkan di dalam koordinat polar $F = F_r\hat{e}_r + F_\theta\hat{e}_\theta$. Dengan menggunakan persamaan (1.17) diperoleh

$$Q_r = F_x\frac{\partial x}{\partial r} + F_y\frac{\partial y}{\partial r} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = F_r \text{ (gaya pada arah r)}$$

$$Q_\theta = F_x\frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \quad F_x\sin\theta + r \quad F_y\cos\theta = r \quad F_\theta$$

(momen gaya atau torka)

5) Gunakan persamaan Lagrange's $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

di mana L adalah fungsi Lagrange's $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$,

dan hasilnya adalah $\ddot{x} + \omega^2 x = o$, di mana $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RANGKUMAN

1. Satu perangkat koordinat umum adalah setiap perangkat koordinat yang dapat menyatakan posisi setiap partikel penyusun suatu sistem. Koordinat umum dapat berupa koordinat kartesian, koordinat polar, koordinat silinder, koordinat bola atau koordinat yang bergerak. Koordinat umum dapat berupa sudut, panjang atau hubungan antara keduanya, dan diberi simbol q_1, q_2, q_3 …, q_n. Misalnya untuk gerak lurus pada sumbu x, koordinat umumnya $q_1 = x$. Partikel bergerak pada bidang datar, dengan menggunakan koordinat polar (r, θ), maka $q_1 = r$ dan $q_2 = \theta$.

2. Secara umum kecepatan suatu sistem benda dapat dituliskan sebagai
$$\dot{r}_i = \sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial t}$$

3. Energi kinetik suatu sistem dapat dirumuskan sebagai T = T_2 + T_1 + T_0.
   a. T_0 adalah bagian yang tak bergantung pada kecepatan umum $(\dot{q}_k)$ yaitu

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

b. T_1 bagian yang bergantung secara linear dengan $\dot{q}_k$

$$T_1 = 2\sum_{k}^{n} M_k \dot{q}_k \quad \text{dan}$$

c. T_2 tergantung dari kuadrat kecepatan umum $(\dot{q}_k{}^2)$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{n} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Di dalam sistem koordinat umum yang diam T_0 dan T_1 sama dengan nol dan hanya T_2 yang tidak nol, sehingga T merupakan fungsi kuadrat kecepatan umum.

4. Momentum umum yang berhubungan dengan koordinat umum q_k dapat dituliskan sebagai

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

5. Gaya umum dapat dirumuskan sebagai

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

Satuan Q_k mungkin gaya, atau mungkin torka, tergantung satuan dari pergeseran kecil δx panjang atau sudut.

6. Fungsi Lagrange L = T – V dengan T adalah energi kinetik dan V energi potensial dinyatakan dalam koordinat umum. Fungsi Lagrange L adalah fungsi dari q_k, $\dot{q}_k$ dan mungkin juga merupakan fungsi eksplisit dari waktu *t*.

7. Secara umum persamaan Lagrange dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \begin{cases} 0, \text{sistem konservatif} \\ Q, \text{Q adalah komponen gaya non konservatif} \end{cases}$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Sebuah partikel bergerak dalam ruang 3 dimensi. Tentukanlah koordinat umum yang sesuai dengan keadaan partikel tersebut, jika yang dipilih adalah sistem koordinat bola

A. r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\cos^{-1}\dfrac{x}{r}$, $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

B. r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\dfrac{x}{r}$, $\varphi=\sin^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$

C. r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\cos^{-1}\dfrac{z}{r}$, $\varphi=\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D. r = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\dfrac{y}{x}$, $\varphi=\dfrac{x}{r}$

2) Tentukanlah formulasi kecepatan untuk sistem banyak partikel!

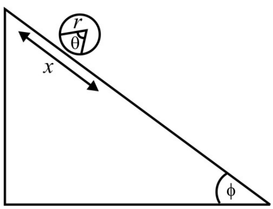
A. $\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{3N}\dfrac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_k}q_k+\dfrac{\partial\vec{v}_n}{\partial t}$

B. $\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{3N}\dfrac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$

C. $\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{3N}\dfrac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_k}$

D. $\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{3N}\dfrac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}$

3) Sebuah cakram bermassa m dengan jari-jari r menggelinding di atas bidang miring (lihat gambar). Hitunglah energi kinetik cakram yang menggelinding tanpa selip.



A. $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}mr\dot{\theta}^2$

B. $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}$

C. $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$

D. $\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + m\, r^2\, \dot{\theta}^2$

4) Tentukanlah fungsi Lagrange cakram pada gambar soal nomor 3 apabila cakram bergerak sepanjang l.

A. L = $\frac{1}{2}\, m\, \left[\dot{x}^2 + r\,\dot{\theta}^2 - g(\ell + x)\sin\,\phi\right]$

B. L = $\frac{1}{2}\, m\, \left[\dot{x}^2 + r\,\dot{\theta}^2 + g(\ell - x)\sin\,\phi\right]$

C. L = $\frac{1}{2}\, m\, \left[\dot{x}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + g(\ell + x)\sin\,\phi\right]$

D. L = $\frac{1}{2}\, m\, \left[\dot{x}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 - g(\ell - x)\sin\,\phi\right]$

5) Hitunglah besarnya momentum dua buah partikel (masing-masing massanya m_1 dan m_2) pada arah X dan z, apabila energi kinetiknya dalam koordinat X, Y, Z, dan x, y, serta z adalah

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2)\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\right]$$

A. $p_X = (m_1 + m_2)\dot{x}\,,\ \ p_z = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\dot{z}$

B. $p_X = (m_1 + m_2)\dot{X}\ ,\ \ p_z = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\dot{z}$

C. $p_X = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\dot{x}\,,\ \ p_z = (m_1 + m_2)\dot{Z}$

D. $p_X = (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\dot{X}\ ,\ \ p_z = (m_1 + m_2)\dot{Z}$

6) Hitunglah momentum umum suatu benda bermassa M yang berada dalam sistem gaya sentral yang memiliki kecepatan v = $\sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2}$

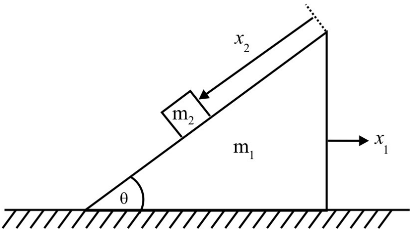
A. $p_r = m\dot{r}\ ,\ p_\theta = m\, r\, \dot{\theta}^2$

B. $p_r = m\dot{r}\ ,\ p_\theta = m\, r^2\, \dot{\theta}$

C. $p_r = \frac{1}{2}\, m\dot{r}^2\ ,\ p_\theta = m\, r^2\, \dot{\theta}^2$

D. $p_r = \frac{1}{2} m\dot{r}^2$, $p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$

7) Tentukanlah E_k dan E_p sistem benda seperti pada gambar berikut ini.



A. T = $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right), V = m_1 g x_1 \cos\theta$

B. T = $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right), V = m_1 g x_2 \sin\theta$

C. T = $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right), V = -m_2 g x_1 \sin\theta$

D. T = $\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right), V = -m_2 g x_2 \cos\theta$

8) Apabila besarnya sudut pada gambar soal nomor 7 adalah 45^o, tentukanlah persamaan gerak benda tersebut!

A. $\ddot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ddot{x}_1 + g\right),\ \ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_2$

B. $\ddot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ddot{x}_1 - g\right),\ \ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_2$

C. $\ddot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_1,\ \ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_2 - g)$

D. $\ddot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_1,\ \ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_2 + g)$

9) Hitunglah besarnya $\ddot{x}_1$ dan $\ddot{x}_2$ pada gambar soal nomor 7 apabila m_1 = 0,1 kg, m_2 = 0,2 kg dan g = 10 m/s^2.

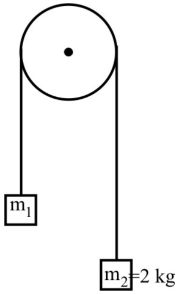
A. $\ddot{x}_1$ = 0,4 m/s^2, $\ddot{x}_2$ = 0,6 m/s^2

B. $\ddot{x}_1$ = 0,6 m/s^2, $\ddot{x}_2$ = 0,8 m/s^2

C. $\ddot{x}_1 = 0{,}5 \text{ m/s}^2,\ \ddot{x}_2 = 1{,}2 \text{ m/s}^2$

D. $\ddot{x}_1 = 0{,}8 \text{ m/s}^2,\ \ddot{x}_2 = 1{,}5 \text{ m/s}^2$

10) Hitunglah besarnya m_1 agar m_2 dapat bergerak dengan percepatan 0,5 m/s^2 (lihat gambar), massa tali sepanjang l dan massa katrol dapat diabaikan.
A. 1,0 kg
B. 1,2 kg
C. 1,5 kg
D. 1,7 kg



Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

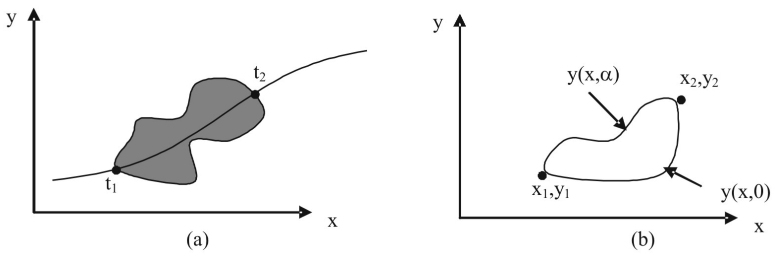
Persamaan Hamilto dan Persamaan Poisson Bracket

A. PENURUNAN PERSAMAAN LAGRANGE DARI PRINSIP HAMILTON

Berikut ini akan disajikan cara lain untuk menurunkan persamaan Lagrange, yaitu dengan menggunakan prinsip variasi Hamilton. Prinsip ini menyatakan bahwa gerak suatu sistem dari saat t_1 sampai dengan saat t_2 adalah sedemikian hingga integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \quad dt \tag{1.29}$$

di mana $L = T - V$ adalah fungsi Lagrange, yang berharga ekstrimum untuk lintasan yang dilalui sistem di dalam ruang konfigurasi (lihat Gambar 1.1a).



Gambar 1.1
Lintasan titik sistem dalam ruang konfigurasi

Ruang konfigurasi adalah ruang euclead n-dimensi di mana koordinatnya adalah koordinat umum q_k, dan setiap titik dalam ruang merepresentasikan suatu konfigurasi keadaan yang mungkin.

Jadi dari kemungkinan-kemungkinan lintasan yang dilalui sistem, lintasan yang sebenarnya dilalui sistem dari posisi pada saat t_1 sampai posisi pada saat t_2 adalah lintasan di mana integral I adalah bersifat ekstrimum, baik minimum ataupun maksimum. Dengan kata lain prinsip Hamilton menyatakan bahwa gerak sistem dari t_1 dan t_2 yang membuat aksi berikut stasioner, sehingga dapat ditulis

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n; t\right) = 0 \qquad 1.30$$

Titik stasioner dari I diperoleh dengan memvariasikan lintasan yang kita ambil. Lintasan yang menghasilkan I yang konstan walaupun lintasannya diubah sedikit, maka lintasan tersebut adalah merupakan lintasan yang dicari. Marilah kita cari lintasan stasioner dari integral berikut ini (lihat Gambar 1.1b)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), \dot{y}(x), x\right] \quad dx\,, \;\; \dot{y} = \frac{dy}{dx} \qquad 1.31$$

Nilai pada titik ujung adalah konstan sehingga,

$$y(x_1) = y_1\,, \text{ dan } \; y(x_2) = y_2 \qquad 1.32$$

untuk bisa memvariasikan lintasan, kita harus memasukkan suatu parameter baru (α) yang akan dipakai sebagai variasi, yaitu

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x) \qquad 1.33$$

di mana $\eta(x)$ adalah fungsi gangguan kecil, dengan $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, sehingga persamaan (1.31) dapat dituliskan dalam parameter α, yaitu

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\right] \quad dx \qquad 1.34$$

Dengan adanya parameter α, titik stasioner dari $J(\alpha)$ dapat kita hitung dengan menggunakan kalkulus biasa dengan syarat $\dfrac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = 0$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} = 0 \qquad 1.35$$

perhatikan suku kedua, dan lakukan integrasi parsial akan diperoleh

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \quad dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{y}} \quad dx \qquad 1.36$$

misalkan $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$, maka $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, sehingga persamaan (1.36) dapat dituliskan kembali dalam

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \quad dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \quad \eta(x) \quad dx \qquad 1.37$$

Bila persamaan (1.37) disubstitusikan ke dalam persamaan (1.35), maka diperoleh

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \right\} \eta(x) \quad dx = 0 \qquad 1.38$$

karena $\eta(x)$ sembarang, maka persamaan (1.38) haruslah memenuhi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \qquad 1.39$$

Apabila kita lakukan kembali transformasi variabel, $x \to t$, $y \to q$, $f \to L$, serta $\dot{y} \to \dot{q}$, maka persamaan (1.39) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \qquad 1.40$$

yang tidak lain adalah persamaan Lagrange yang sudah kita turunkan pada pembahasan Kegiatan Belajar 1.

B. FUNGSI HAMILTON DAN PERSAMAAN HAMILTON

Jika pada persamaan Lagrange kita menemukan persamaan diferensial orde dua, namun dalam persamaan Hamilton ini persamaan diferensial yang muncul adalah persamaan diferensial orde satu. Dari n buah syarat awal yang diperlukan oleh persamaan Lagrange, ingin dibuat suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang menggambarkan dinamika dari 2n variabel yaitu q_j, yang memenuhi persamaan

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad 1.41$$

di mana q adalah koordinat umum, dan p merupakan momentum *conjugate* dari koordinat umum. Jadi yang ingin dilakukan adalah perubahan transformasi dari sistem $L(q_j, \dot{q}_j; t)$ ke $H(q_j, p_j; t)$ di mana sistem dapat direpresentasikan dalam ruang fasa yang berdimensi 2n (q,p) sedemikian hingga berlaku persamaan

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)dt = 0 \qquad 1.42$$

Lintasan dalam ruang konfigurasi yang berdimensi n yang diambil dari sistem akan membuat variasi pada persamaan (1.42) sama dengan nol.

Tinjau suatu fungsi $f(x, y)$ dengan diferensial totalnya adalah

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = udx + vdy \qquad 1.43$$

Untuk mengganti fungsi $f(x, y)$ menjadi $g(u, y)$ diakukan transformasi Legendre dengan menuliskan

$$g = f - ux \qquad 1.44$$

Lakukan diferesiasi total terhadap persamaan (1.44) kemudian substitusikan ke dalam persamaan (1.43) hasilnya adalah

$$dg = df - xdu - udx = udx + vdy - xdu - udx = -xdx + vdy \qquad 1.45$$

Anda tentu saja sudah mengetahui dari Mekanika bahwa fungsi Hamilton didefinisikan sebagai

$$H(q,p;t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j - L(q,\dot{q};t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} - L = h(q,\dot{q};t) \qquad 1.46$$

Walaupun $H(q,p;t)$ seperti fungsi energi $h(q,\dot{q};t)$, namun keduanya memiliki kebergantungan yang berbeda terhadap variabel-variabelnya. Pada fungsi energi $h(q,\dot{q};t)$: $\dot{q}$ diperoleh dari q, sedangkan fungsi Hamilton $H(q,p;t)$: q dan p diperlakukan saling bebas.

Persamaan Hamilton, dapat kita turunkan dengan cara melakukan diferensiasi total terhadap persamaan (1.46) yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right] + \frac{\partial H}{\partial t}dt = \sum_{j=1}^{n}\left[p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j\right] - \\ \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right] - \frac{\partial L}{\partial t}dt\end{aligned} \qquad 1.47$$

Jika kita bandingkan antara ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (1.47), maka diperoleh persamaan:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad 1.48$$

Persamaan (1.48) di atas dikenal sebagai *Persamaan Gerak Hamilton*, yang lebih sederhana bila dibandingkan dengan persamaan Lagrange.

C. PERSAMAAN POISSON BRACKET

Hubungan poisson Bracket antara dua buah besaran $u(q,p)$ dan $v(q,p)$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\left[u,v\right]_{(q,p)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}\right\} \qquad 1.49$$

atau dalam notasi simplektik dituliskan sebagai

$$\left[u,v\right]_{\vec{\eta}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}}\right)^T \vec{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right) \qquad 1.50$$

$\vec{J}$ adalah matriks identitas yang berhubungan dengan matriks $[\eta_j, \eta_k]$.

Contoh

Tentukanlah hubungan komutasi dari $[q_i, q_j]$, $[p_i, p_j]$, dan $[q_i, p_j]$.

Penyelesaian

$$\left[q_i, q_j\right] = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right\} = 0,$$

$$\left[p_i, p_j\right] = \sum_{k=1}^{n}\left\{\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0}\right\} = 0$$

$$\left[q_i, p_j\right] = \sum_{k=1}^{n}\left\{\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$$

bandingkanlah hasil hubungan komutasi dua buah besaran seperti di atas dengan cara mekanika kuantum, yaitu:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Sifat-sifat struktur aljabar Poisson Bracket dapat dituliskan sebagai berikut.

1. $[u,v] = -[v,u], \Rightarrow [u,u] = 0$ (anti komutatif)

2. $[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$, a, b konstanta (bersifat linear)
3. $[uv,w]=u[v,w]+[u,w]v$ (assosiatif)
4. $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$ (Identitas Jacobi)

Persamaan Gerak dalam Poisson Bracket

Misalkan $u=u(q,p;t)$, maka

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial u}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.51}$$

substitusikan persamaan (1.51) ke dalam persamaan (1.48) diperoleh

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial t}=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.52}$$

Bila u bukan merupakan fungsi eksplisit dari waktu t, maka $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ sehingga persamaan (1.52) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{du}{dt}=\left[u,H\right] \quad \text{atau} \quad \dot{u}=\left[u,H\right] \tag{1.53}$$

Contoh

Tentukanlah persamaan gerak sebuah partikel bebas yang bermassa m dengan menggunakan formulasi Poisson Bracket!

Penyelesaian

Sebuah partikel bebas memiliki energi potensial sama dengan nol, sehingga Hamiltonian sistem sebuah partikel bebas dapat dirumuskan sebagai

$$H=\frac{p^2}{2m}$$

Untuk mencari persamaan gerak partikel tersebut kita gunakan persamaan (1.53), yaitu

$\dot{p} = [p, H] = [p, \frac{p^2}{2m}] = \frac{1}{2m}\underbrace{[p, p]}_{=0} p = 0$, yang berarti bahwa momentum bersifat kekal

$$\dot{q} = [q, H] = \frac{1}{2m}\underbrace{[q, p]}_{=1} p = \frac{p}{2m} = c \text{ (konstan)}$$

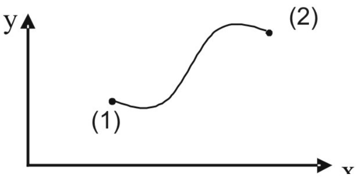
Jadi

$q(t) = ct + q_0$, di mana $c = \frac{p}{2m}$ (persamaan gerak partikel yang dicari).

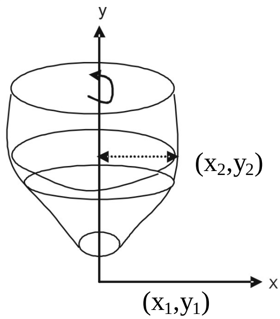
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Hitunglah jarak terpendek antara dua buah titik yang berada pada sebuah bidang datar (lihat gambar), apabila diketahui $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$!



2) Kurva berikut ini yang membuat permukaannya minimum dirumuskan sebagai $2\pi \quad dS = 2\pi x\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$. Carilah lintasan benda yang jatuh di dalamnya sehingga waktu yang diperlukan sesingkat mungkin!



3) Tentukanlah persamaan gerak sebuah osilator harmonik satu dimensi yang bermassa m dengan menggunakan formulasi Poisson Bracket!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan persamaan (1.31). Jarak suatu sistem yang bergerak dari titik (1) ke titik (2) adalah

$$s = \int_{x_1}^{x_2} f \quad dx = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{, atau}$$

$$f = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{, dan } \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

Jarak terpendek antara titik (1) dan (2) harus memenuhi persamaan (1.39), yaitu:

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$ atau $0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$, terpenuhi jika dan hanya jika suku yang ada dalam kurung berharga suatu konstanta.

Jadi, $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c$, atau $\dot{y}^2 = c^2\left(1 + \dot{y}^2\right)$, atau $\dot{y}^2\left(1 - c^2\right) = c^2$,

$$\dot{y} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} \text{, atau } y = \int \dot{y} \quad dx = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} x + b$$

Dengan demikian lintasan terpendek antara dua buah titik pada bidang datar adalah

$y = ax + b$, $a = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$ (lintasan terpendeknya berupa garis lurus).

2) Luas total kurva adalah $2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$, dengan $f = x\sqrt{1 + \dot{y}^2}$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$. Gunakan persamaan (1.39), diperoleh $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$,

atau $\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \quad \Rightarrow \dot{y}^2\left(x^2 - c^2\right) = c^2$

Solusi umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$y = c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - c^2}} + b = c \quad arch\frac{x}{c} + C$ atau $x = c\cosh\frac{y - C}{c}$ (lintasan minimum)

3) Hamiltonian pada osilator harmonik dalam satu dimensi adalah

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{x} = [x, H] = \frac{1}{2m}\left[x, p^2\right] + \frac{1}{2}k\left[x, x^2\right] = \frac{1}{2m}2\underbrace{[x, p]}_{=1}p + \frac{1}{2}k \cdot 2\underbrace{[x, x]}_{=0}x = \frac{p}{m}$$

Jadi persamaan geraknya adalah:

$p = m\dot{x}$

$\dot{p} = [p, H] = \frac{1}{2m}\underbrace{\left[p, p^2\right]}_{=0} + \frac{1}{2}k\underbrace{\left[p, x^2\right]}_{-2x} = -kx$, atau $\ddot{p} + k\dot{x} = 0$,

dengan memasukkan $\dot{x} = \frac{p}{m}$, maka diperoleh persamaan $\ddot{p} + k\frac{p}{m} = 0$,

yang dapat dituliskan dalam bentuk $\ddot{p} + \omega^2 p = 0$, dengan penyelesaian:

$p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, di mana $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RANGKUMAN

1. Prinsip variasi Hamilton dapat dinyatakan sebagai

   $$I = \int_{t_1}^{t_2} L \quad dt$$

   di mana $L = T - V$ adalah fungsi Lagrange, yang berharga ekstrimum untuk lintasan yang dilalui sistem di dalam ruang konfigurasi.
2. Ruang konfigurasi adalah ruang euclead n-dimensi di mana koordinatnya adalah koordinat umum q_k, dan setiap titik dalam ruang merepresentasikan suatu konfigurasi keadaan yang mungkin. Jadi dari kemungkinan-kemungkinan lintasan yang dilalui sistem, lintasan yang sebenarnya dilalui sistem dari posisi pada saat t_1 sampai posisi pada saat t_2 adalah lintasan di mana integral I adalah bersifat ekstrimum, baik minimum ataupun maksimum.

3. Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai

$$H(q,p;t)=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j p_j - L(q,\dot{q};t)=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j}-L=h(q,\dot{q};t)\,.$$

Walaupun $H(q,p;t)$ seperti fungsi energi $h(q,\dot{q};t)$, namun keduanya memiliki kebergantungan yang berbeda terhadap variabel-variabelnya. Pada fungsi energi $h(q,\dot{q};t)$: $\dot{q}$ diperoleh dari q, sedangkan fungsi Hamilton $H(q,p;t)$: q dan p diperlakukan saling bebas.

4. Persamaan Gerak Hamilton dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}\,,\quad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\,,\quad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

5. Hubungan poisson Bracket antara dua buah besaran $u(q,p)$ dan $v(q,p)$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$[u,v]_{(q,p)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}\right\}.$$

Dalam notasi simplektik dituliskan sebagai:

$$[u,v]_{\vec{\eta}}=\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}}\right)^T \vec{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right).$$

$\vec{J}$ adalah matriks identitas yang berhubungan dengan matriks $[\eta_j,\eta_k]$.

6. Sifat-sifat struktur aljabar Poisson Bracket dapat dituliskan sebagai berikut.
   a. $[u,v]=-[v,u],\Rightarrow[u,u]=0$ (anti komutatif)
   b. $[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$, a, b konstanta (bersifat linear)
   c. $[uv,w]=u[v,w]+[u,w]v$ (assosiatif)
   d. $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$ (Identitas Jacobi)

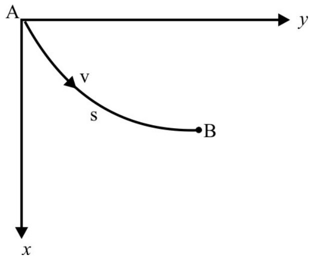
7. Persamaan Gerak dalam Poisson Bracket dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{du}{dt}=[\mathrm{u},\ \mathrm{H}]+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}\ \text{ atau }\ \dot{u}=[\mathrm{u},\ \mathrm{H}]+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}\,.$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Tentukanlah persamaan kurva datar sedemikian hingga suatu zarah yang oleh karena gaya beratnya saja akan turun sepanjang kurva dari A sampai ke B dalam waktu yang seminimal mungkin (lihat gambar).



A. $y = a\left[\arcsin\sqrt{1-\frac{x}{2a}} + \sqrt{bx-\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\right]$, a dan b konstanta

B. $y = a\left[\arccos\sqrt{1-\frac{x}{a}} + \sqrt{bx-\frac{1}{2}x^2}\right]$, a dan b konstanta

C. $y = a\left[\arctan\sqrt{1-\frac{x}{2a}} + \sqrt{bx^2-\frac{x}{a}}\right]$, a dan b konstanta

D. $y = a\left[\sin\sqrt{1-\frac{x}{a}} + \sqrt{bx^2-ax}\right]$, a dan b konstanta

2) Tentukanlah lintasan terpendek sebuah benda yang bergerak dalam bidang datar.
   A. $y = ax^2 + bx + c$
   B. $y = ax^2 + c$
   C. $y = ax^2 + cx^2$
   D. $y = ax + c$

3) Salah satu keuntungan menggunakan persamaan Hamilton adalah bahwa bentuk persamaan diferensialnya merupakan persamaan .....
   A. diferensial orde-2
   B. diferensial orde-1

C. integral orde-2
D. integral parsial

4) Persamaan gerak Hamilton dapat dinyatakan sebagai ....

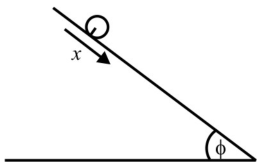
A. $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

B. $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

C. $q_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \; p_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$

D. $q_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \; p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$

5) Sebuah kelereng menggelinding di atas bidang miring (lihat gambar). Tentukanlah fungsi Hamilton sistem apabila jari-jari, kelereng adalah r.



A. $\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{p_\theta}{mr}\right)^2 + mg(\ell - x)\sin\phi$

B. $\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{p_\theta}{mr}\right)^2 - mg(\ell - x)\sin\phi$

C. $\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + mg(\ell - x)\sin\phi$

D. $\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}mr\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + mg(\ell - x)\sin\phi$

6) Sebuah bandul disimpangkan sejauh sudut θ (θ < 10°) terhadap arah vertikal. Tentukanlah persamaan Hamilton sistem apabila massa bandul m, dan panjang talinya P.

A. $\dot{p}_\theta = -mg\ell\sin\theta, \; \dot{p}_r = \frac{mg^2}{\ell}\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

B. $\dot{p}_\theta = -mg\ell \cos\ \theta,\ \dot{p}_r = \dfrac{mg^2}{\ell}\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

C. $\dot{p}_\theta = mg\ell \sin\ \theta,\ \dot{p}_r = \dfrac{mg}{\ell}\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

D. $\dot{p}_\theta = mg\ell \sin\ \theta,\ \dot{p}_r = \dfrac{mg}{\ell}\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

7) Hitunglah besarnya energi total sistem sebuah bandul matematis bermassa M, panjang tali r yang disimpangkan sejauh sudut θ.

A. $M\dot{r}^2 + Mr^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mgr\ \cos\theta$

B. $M\dot{r}^2 - Mr^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}\right) + Mgr\ \sin\theta$

C. $M\dot{r}^2 + Mr^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - Mgr\ \cos\theta$

D. $M\dot{r}^2 + Mr^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}\right) - Mgr\ \sin\theta$

8) Tentukanlah hubungan komutasi antara x^2 dan momentum linear dengan cara Poisson Bracket!

A. x
B. x^2
C. p
D. p^2

9) Tentukanlah persamaan gerak sebuah osilator harmonik yang bermassa m!

A. $x = \dfrac{2p}{m}t + x_o$

B. $x = \dfrac{p^2}{m}t + x_o$

C. $x = \dfrac{p^2}{2m}t + x_o$

D. $x = \dfrac{p}{m}t + x_o$

10) Perbedaan antara fungsi Hamilton H dan fungsi energi h adalah ....
   A. pada fungsi energi q diperoleh dari $\dot{q}$, sedangkan fungsi Hamilton $\dot{q}$ diperoleh dari q
   B. pada fungsi energi $\dot{q}$ diperoleh dari q, sedangkan fungsi Hamilton q dan p saling independen
   C. pada fungsi Hamilton q diperoleh dari $\dot{q}$, sedangkan fungsi energi $\dot{q}$ diperoleh dari q
   D. pada fungsi Hamilton $\dot{q}$ diperoleh dari q, sedangkan fungsi energi q dan p diperlakukan saling bebas

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C. Gunakan koordinat bola

   $x = r \sin\theta \cos\varphi$

   $y = r \sin\theta \cos\varphi$

   $z = r \cos\theta$

2) B. Gunakan persamaan (1.3) sampai dengan (1.6).
3) C. Gunakan persamaan (1.7).
4) D. Gunakan persamaan (1.27).
5) B. Gunakan persamaan (1.12).
6) B. Gunakan persamaan (1.13).
7) A. Gunakan persamaan $\vec{v}_1 = \dot{x}$

   $\vec{v}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$

8) A. Gunakan persamaan (1.28)
9) C. Cukup jelas.
10) D. Gunakan persamaan $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2$

   $V = -m_1 g\, x_1 - m_2 g\,(P - x_1)$

Tes Formatif 2

1) A. Gunakan persamaan

   $dt = \frac{ds}{v}$, $ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx$, $v = \sqrt{2gx}$; $f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}$

   Lalu substitusikan ke dalam persamaan $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$

2) D. Pada bidang datar $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y^2}\, dx$, $f = \sqrt{1+y^2}$

   Kemudian subsitusikan ke dalam persamaan Euler-Lagrange.

3) B. Lihat penjelasan pada Kegiatan Belajar 2.
4) B. Lihat persamaan (1.48).
5) C. Gunakan persamaan (1.46).
6) A. Gunakan persamaan (1.48).
7) C. Gunakan persamaan energi total

   $h = T + V$, di mana $x = r \sin\theta$, $y = -r\cos\theta$

8) A. Gunakan persamaan (1.49).
9) D. Gunakan persamaan (1.53).
10) B. Lihat persamaan (1.46).

Glosarium

Koordinat umum adalah sejumlah minimum koordinat untuk menyatakan konfigurasi suatu sistem. Koordinat umum dapat berupa besaran panjang, sudut, atau hubungan antara keduanya.

Kecepatan umum adalah kecepatan yang berkaitan dengan koordinat umum, seperti $\dot{q}_k$ adalah kecepatan umum yang berkaitan dengan koordinat umum q_k.

Momentum umum adalah momentum yang dinyatakan dalam koordinat umum, yang dapat berupa momentum linear, maupun momentum sudut. Momentum umum juga dapat dinyatakan dalam energi kinetik umum.

Gaya umum adalah gaya yang berkaitan dengan koordinat umum. Gaya umum dapat berdimensi gaya maupun berdimensi momen gaya.

Energi kinetik umum adalah energi kinetik yang dinyatakan dalam koordinat umum q_k, dalam koordinat diam energi kinetik umum hanya fungsi dari $\dot{q}_k^{\,2}$.

Fungsi Lagrange dalam sistem konservatif didefinisikan sebagai pengurangan antara energi kinetik dengan energi potensial.

Persamaan Lagrange adalah suatu persamaan untuk menentukan persamaan gerak sistem dinamik dengan menentukan energi kinetik dan energi potensial sistem yang dinyatakan dalam koordinat umum. Terdapat perbedaan antara persamaan Lagrange untuk sistem konservatif dan persamaan Lagrange untuk sistem non konservatif.

Kendala (Constraint) adalah suatu koordinat yang merupakan pembatas gerak suatu sistem. Kendala yang dapat dinyatakan dalam persamaan yang menyatakan hubungan antara koordinat-koordinat umum disebut kendala holonomik.

Jumlah derajat kebebasan adalah suatu nilai yang menyatakan arah di mana partikel-partikel suatu sistem dapat bergerak bebas tanpa melanggar kendala. Dalam sistem holonomik jumlah derajat kebebasan sama dengan jumlah koordinat umum yang diperlukan untuk menyatakan konfigurasi suatu sistem.

Fungsi Hamilton merupakan energi total suatu sistem, yaitu hasil penjumlahan antara energi kinetik dengan energi potensial.

Daftar Pustaka

Fowles, G. R. (1986). *Analytical Mechanics* 4th. ed., New York: CBS Colledge Publishing.

Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics*. USA: Addison Wesley Publishing Company Inc. Reading Mass.

Symon, K.R *Mechanics*. 3rd. ed., USA: Addison Wesley Publishing Company.

Beiser, A. (1982). *Consepts of Modern Physics*. 3rd edition. New York: McGraw-Hill.

Gasiorowicz, S. (1995). *Quantum Physics*. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Leslie E. B. (1990). *Quantum Mechanics*. New York: Prentice-Hall International.

Liboff, R. L. (1992). *Introductory Quantum Mechanics.* Reading Massachusett: Addison Wesley Publishing Company.

Pandiangan, P. (2000). *Dasar-dasar Fisika Kuantum.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Tannoudji, C. (1977). *Quantum Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yarif, A. (1982). *An Introduction to Theory and Aplication of Quantum Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.