MODUL 1

Model Matematika Suatu Program Linear

Drs. Marthen Tapilouw, M.Si.

PENDAHULUAN

Bahasan tentang model matematika suatu program linear didasarkan kepada pemahaman bahwa tiap masalah yang kita hadapi perlu diterjemahkan ke dalam simbol-simbol untuk menunjang proses analisis. Dalam hal ini, model matematika suatu program linear berisikan tiga unsur yaitu (1) terdapat variabel aktivitas yang merupakan keluaran (*output*), (2) fungsi tujuan yaitu suatu fungsi linear $z = f(x_1, x_2, \ldots)$, dan pembatas (kendala) yaitu sistem pertidaksamaan berisikan masukan (*input*) berkaitan dengan variabel aktivitas.

Modul ini berisi tiga kegiatan belajar yaitu (1) Pemecahan Dasar (basis) dari Sistem Persamaan (2) Sistem Pertidaksamaan Linear dengan sasaran menunjang kegiatan Anda memahami pembatas (kendala) suatu program linear, dan (3) Model Matematika Masalah Program Linear dengan sasaran menjelaskan kepada Anda bahwa terdapat paling tidak tiga kelompok program linear dilihat dari banyaknya pemecahan optimalnya, yaitu (1) terdapat satu pasangan berurutan variabel yang memungkinkan fungsi tujuan mencapai nilai optimal, (2) terdapat lebih dari satu pasangan berurutan yang memungkinkan fungsi tujuan optimal, dan (3) tidak ada pasangan berurutan tertentu yang memungkinkan fungsi tujuan optimal atau masalah program linear yang dihadapi merupakan masalah dengan pemecahan tak terikat (harga tak terbatas dari fungsi tujuan).

Apabila memahami dengan baik berbagai sistem persamaan dan pemecahannya serta mengenali model matematika program linear maka bahasan tentang cara pemecahan masalah program linear (Modul 3 sampai dengan 5) dan penerapan program linear dalam pemecahan masalah transportasi dan penugasan (Modul 6 sampai dengan 9) akan dipahami dengan cepat.

Secara umum setelah Anda mempelajari Modul 1, diharapkan Anda dapat menyusun model matematika dari suatu masalah program linear.

Agar Anda dapat mengidentifikasi kadar pencapaian tujuan yang masih umum maka jabarannya adalah dapat:

1. menentukan banyaknya pemecahan dasar sistem persamaan linear;
2. merumuskan sistem pertidaksamaan sebagai sistem persamaan
3. mencari penyelesaian sistem pertidaksamaan linear;
4. menunjukkan daerah penyelesaian layak dasar sistem pertidaksamaan linear (khususnya 2 sampai dengan 3 variabel pokok);
5. menemukan nilai optimal fungsi linear tertentu di mana variabel bebas terikat dalam sistem pertidaksamaan,
6. menerjemahkan masalah program linear ke dalam bentuk matematika (model matematika);
7. membedakan masalah dengan pemecahan tunggal suatu masalah dengan penyelesaian ganda (alternatif optimal) maupun masalah tanpa batas dan/atau masalah kemunduran (degenerasi).

KEGIATAN BELAJAR 1

Pemecahan Dasar (Basis) dari Sistem Persamaan

Hampir semua masalah pemrograman linear berkaitan dengan sistem persamaan yang terdiri atas m persamaan dan n variabel di mana m < n. Oleh karena itu, penerapan pengertian pemecahan sistem persamaan dengan k variabel dan k persamaan dapat dilakukan dengan terlebih mengetahui rank *matriks* A sistem, persamaan A.X = B.

A. RANK SUATU MATRIKS

Perhatikan matriks koefisien A dari A.X = B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Apabila det(A) $\neq 0$ maka A^{-1} ada yang berarti sistem persamaan A.X = B konsisten. Kemudian apabila det (A_x), det (A_y).... adalah tidak sama dengan nol maka sistem persamaan A.X = B konsisten dan mempunyai satu pemecahan (*pemecahan yang unik atau tunggal*).

Sistem persamaan A.X = B yang mempunyai penyelesaian tunggal di mana A adalah matriks dengan orde (n x n) merupakan topik yang penting dalam penyelesaian suatu program linear. Kondisi demikian ini berkaitan dengan pengertian *rank matriks A.*

Apabila rank A = n maka sistem persamaan A.X = B mempunyai penyelesaian tunggal. Dan, apabila rank A = k di mana k < n maka sistem persamaan A.X = B tidak mempunyai penyelesaian.

Bagaimana menentukan *rank* (perangkat) matriks $A_{n \times n}$?
Perhatikan matriks A di atas (1.1)
1. Det (A) = 0 maka A^{-1} tidak dapat ditentukan.
2. Det (A) $\neq 0$ berarti ada A^{-1}.

Ingat: Determinan A berkaitan dengan A matriks bujur sangkar.

Untuk menjangkau pemahaman yang lebih tentang penyelesaian sistem persamaan A.X = B diperlukan ekspansi kofaktor matriks A untuk memperoleh A^{-1}.

Pertama tentukan minor matriks A

Contoh: 1.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Ekspansi menurut kolom 1:

Minor elemen (entri) $a_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom pertama matriks A.

$a_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghilangkan baris kedua kolom pertama matriks A.

$a_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghilangkan baris ketiga kolom pertama matriks A.

Ekspansi menurut baris 1:

Minor elemen (entri) $a_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom pertama matriks A.

$a_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom ketiga matriks A dan seterusnya.

Namun, apabila kita bermaksud menentukan nilai det (A) maka diperlukan kofaktor minor elemen a_{ij} yaitu $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; M_{ij} adalah determinan minor dari a_{ij} atau $M_{ij} = |a_{ij}|$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}.K_{11} + a_{21}.K_{21} + a_{31}.K_{31} \\ &= a_{11}.K_{11} + a_{12}.K_{12} + a_{13}.K_{13} \\ &= a_{11}.K_{11} + a_{22}.K_{22} + a_{33}.K_{33} \text{ dan seterusnya} \end{aligned}$$

Dari matriks A dapat disusun matriks kofaktor yaitu

$$\text{kof}(A) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Transpos matriks kofaktor dari A yaitu:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Dinamakan sebagai adjoin matriks A dan dinyatakan adj (A)

Invers A atau $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$ karena $A.\text{adj}(A) = \det(A)I$

Contoh: 1.2

Carilah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 48 = -40$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 40 = -34$;

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 4 = 20$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 5 = 7$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$; $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{21}K_{21} + a_{31}K_{31}$

$K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (-40) = -40$

$K_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1).(-34) = 34$

$K_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 (-2) = -2$

$\det(A) = 1 \times (-40) + 2 \times (34) + (-1) \times (-2)$

$= -40 + 68 + 2 = 30$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -40 & 34 & -2 \\ -10 & 7 & 4 \\ 20 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -40 & 34 & -2 \\ -10 & 7 & 4 \\ 20 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

Karena det(A) = 30 atau det(A) ≠ 0 maka matriks A mempunyai A^{-1} dan rank (A) = 3. Bagaimana kalau ternyata det(A) = 0? Jawaban, pertama matriks A tidak mempunyai invers atau A singular, kedua rank (A) < 3.

Perlu diingat rank suatu matriks berkaitan dengan nilai determinan matriks bujur sangkar. Apabila matriks A adalah matriks bujur sangkar maka rank(A) dapat diketahui setelah mencari det(A). Kalau ternyata det(A) = 0 maka kita perlu mencari determinan matriks bujur sangkar dengan orde (n–1) x (n -1); (n–2) x (n–2); …..sampai dengan 1 x 1.

Pengerjaan berhenti dan rank(A) ditetapkan setelah diperoleh determinan minor A tidak sama dengan nol.

Contoh 1.3:
Perhatikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Carilah rank(A); rank(B) ; dan rank(C)

1. det(A) = 8 + 24 + 8 - 6 - 8 - 32 = - 6 $\neq$ 0
   Jadi rank(A) = 3
2. Karena orde B adalah 2 x 3 maka harus dicari determinan matriks 2 x 2 yaitu
   $$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   det(B_1) = 1 ; det (B_2) = - 1 dan det (B_3) = -1
   karena nilai determinan dengan orde lebih rendah dari orde matriks B tidak sama dengan nol maka rank(B) = 2.
   Catatan: determinan minimal satu minor matriks B tidak sama dengan nol berarti proses mencari rank B selesai.
   Jadi tidak perlu mencari determinan semua minor B. Kalau ternyata dari satu minor matriks B sudah memperoleh nilai det(M_{ij}) $\neq$ 0 maka tidak perlu mencari nilai determinan dari minor B lainnya.
3. Karena orde matriks C adalah 3 x 2 maka rank C diperoleh melalui perhitungan nilai determinan matriks bujur sangkar yang lebih kecil dari matriks C, dalam hal ini matriks 2 x 2 dan 1 x 1 (entri matriks C).
   Perhatikan $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ det(C_1) = –4

   ternyata untuk r = 2 det (C_1) $\neq$ 0 maka rank(C) = 2 sehingga tidak perlu menghitung nilai determinan lain.

Contoh: 1.4

Perhatikan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Carilah rank (A).

Ambil r =2; $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ det(A_1) = 0 dan demikian pula determinan matriks 2 x 2 lain juga bernilai 0. Kesimpulan yang dapat diambil dari kondisi ini ialah rank(A) = r(A) = 1.

Definisi 1.1:
Rank (atau peringkat) suatu matriks A dengan orde n x n ialah banyak baris di mana paling sedikit satu matriks bujur sangkar minor matriks A yang determinannya tidak sama dengan nol. Bila banyak baris matriks dengan determinan tidak nol itu adalah r maka rank(A) = r(A) = r; $r \leq n$.

1. Apabila r(A) = r di mana r = n maka matriks A disebut matriks yang non-singular (atau *regular*).
2. Apabila r(A) = r di mana r < n maka matriks A disebut matriks yang *singular* (atau tidak *regular*).

Definisi 1.2:
Rank matriks A dengan orde m x n di mana m < n ditentukan dari nilai determinan matriks dengan orde m x m atau matriks bersangkutan yang lebih kecil, dan merupakan sekatan (partisi) A.

Apabila minimal satu determinan matriks m x m itu tidak nol, maka rank(A) = m. Apabila semua determinan matriks m x m itu bernilai nol, maka rank A ditentukan dari penilaian terhadap determinan matriks (m–1) x (m–1), matriks (m–2) x (m–2) dan seterusnya sampai matriks 1 x 1 di dalam A.

Contoh 1.5.
Perhatikan sistem persamaan

$$x + y + z = 4$$
$$2x + 2y - z = 5$$
$$x - y = 1$$

Carilah rank matriks yang diperbesar dari sistem persamaan itu.
Sistem persamaan di atas jika ditulis dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = B$ dan $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X$ maka persamaan menjadi $AX = B$.

Perhatikan matriks yang diperbesar dari sistem persamaan, yaitu:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai koefisien x diganti oleh konstanta

$$\text{Det}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A_x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0 - 1 - 2 - 2 - 1 - 0$ $\qquad$ $= 0 - 1 - 5 - 2 - 4 - 0$

$= -6$ $\qquad$ $= -12$

Nilai koefisien y diganti oleh konstanta

$$\det(A_y) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0 - 4 + 2 - 5 + 1 - 0$

$= -6$

Nilai koefisien z diganti oleh konstanta

$$\det(A_z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 5 - 8 - 8 + 5 - 2 = -6$$

ternyata det (A) $\neq$ 0; det $(A_x) \neq 0$; det $(A_y) \neq 0$
det$(A_z) \neq 0$.
Sehingga rank (A) = 3; rank $(A_B) = 3$

Apabila dihubungkan dengan penyelesaian sistem persamaan A.X = B di mana A ialah matriks dengan orde n × n maka Anda perlu mencatat 3 kemungkinan berikut ini:

1. Sistem persamaan mempunyai pemecahan tunggal (unik) kalau $r(A) = r(A_B) = n$.
2. Sistem persamaan mempunyai tak berhingga pemecahan kalau $r(A) = r(A_B) = k$ di mana $k < n$.
3. Sistem persamaan tidak mempunyai pemecahan kalau $r(A) < r(A_B)$.

Catatan:
Mengenai kemungkinan ke-2 akan dibahas lebih lanjut dalam modul tentang masalah kemerosotan (degenerasi) Modul 5.

B. PEMECAHAN DASAR (BASIS)

Sekarang perhatikan sistem persamaan A.X = B di mana matriks A mempunyai orde m × n di mana m < n. Sistem persamaan demikian sangat sering muncul apabila kita menyajikan pembatas (kendala) suatu masalah program linear ke dalam model matematika.
Carilah penyelesaian sistem persamaan

$$2x + 3y + 4z = 12$$
$$x + 2y - 2z = 4$$

Misalkan z = t maka sistem persamaan menjadi

$$2x + 3y = 12 - 4t$$
$$x + 2y = 4 + 2t$$

sistem persamaan ini konsisten untuk tiap nilai t.

Misalkan x = p maka diperoleh kesimpulan yang sama dengan proses pemisalan z = t.

Jadi sistem persamaan di atas mempunyai banyak sekali penyelesaian sehingga untuk keperluan tertentu kita harus mencari alternatif memperoleh beberapa penyelesaian (terbatas).

Berdasarkan pengertian rank suatu matriks yang telah dibahas maka di dalam sistem persamaan A.x = B; A_{mxn} (m adalah banyak persamaan dan n adalah banyak variabel) terdapat kemungkinan $r(A) = r(A_B) = k < m$; $m < n$ berkaitan dengan tiap x yang memenuhi k persamaan akan merupakan pemecahan dari A.x = B bila untuk (n - k) variabel diberikan nilai tertentu misalkan nol atau bilangan real lainnya. Dengan catatan kolom dari A yang berkaitan dengan k variabel itu bebas linear. *Pemecahan dasar* (*basis*) merupakan jabaran penjelasan dalam alinea ini.

Perhatikan kembali sistem persamaan A.x = B di mana terdapat m persamaan dan n variabel dengan m < n.

Pertama kita anggap $r(A) = r(A_B) = m$ dan dengan bantuan pengertian partisi matriks A dapat kita jadikan A = (D,R) di mana D adalah matriks dengan orde m x m dan R adalah matriks dengan orde m × (n-m)

Matriks kolom x $= [X_D.X_R]$; X_D [$x_1, x_2, \dots , x_n$]

$X_R = [x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]$

$$A.X = (D.\ R)\begin{pmatrix} x_D \\ x_R \end{pmatrix} = D.X_D + R.X_R = B;$$

Catatan D = Dasar (basis)
R = non-basis (sisanya)

Apabila diberikan nilai untuk $X_R = 0$ maka A.X = B menjadi $D.X_D = B$; Bila invers dari D ada, sistem persamaan $D.X_D = B$ konsisten atau $X_D = D^{-1}.B$. Pemecahan sistem persamaan A.X = B yaitu $X_D = D^{-1}.B$; $X_R = 0$ atau $X = [X_D, 0]$ disebut penyelesaian dasar (*basis*) dari A.X = B.

Variabel dalam vektor (matriks) kolom X_D disebut variabel dasar (basis) dan variabel dalam X_R disebut *variabel non-basis*; banyaknya variabel basis adalah m dan banyak variabel non-basis yang diberikan nilai nol adalah (n – m).

Karena terdapat banyak kombinasi variabel yang merupakan variabel basis maka kita perlu mengetahui banyak penyelesaian dasar sistem persamaan A.X = B.

Banyak kombinasi tiap kali memilih m variabel dari n variabel sistem persamaan A.X = B dapat ditentukan dengan bantuan rumus

$$_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ ; \ n! \ \text{ dibaca n faktorial}$$

$$n! = \begin{cases} 1, & ,n=0 \\ 1.2.3.....\ n & ,n=1,2,3,......., n \end{cases}$$

Contoh 1.6:

n = 5; m = 3 $\qquad _5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10$

Hal yang dapat terjadi di antara beberapa penyelesaian dasar (basis) yaitu terjadi satu atau lebih variabel basis bernilai nol. Dalam hal ini pemecahan basis dinamakan kemerosotan (*degenerasi*) dan variabel basis yang bernilai nol itu disebut *variabel degenerasi* dan banyaknya tidak melebihi banyak maksimum pemecahan dasar. Bahasan tentang masalah degenerasi dalam program linear akan dibahas dalam Modul 5 dan 8.

Contoh 1.7:

Carilah semua penyelesaian dasar sistem persamaan.

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 11$$

Penyelesaian

1) Misalkan $x_1 = x_2 = 0$, x_3 dan x_4 dapat dicari

   $8x_3 + 7x_4 = 10$

   $6x_3 + 9x_4 = 11$

   karena $r(A) = r(A_B) = 2$ maka terdapat hanya satu penyelesaian, yaitu

   $x_3 = \frac{13}{30}$; $x_4 = \frac{14}{15}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$

   Dengan cara yang sama diperoleh

2) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{13}{31}, 0, \frac{35}{31})$

3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -2, \frac{5}{2}, 0)$

4) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{13}{15}, 0, 0, \frac{14}{15})$

5) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, -2, 0, 0)$

Pemecahan dasar keenam tidak ada karena terdapat dua kolom yang sama sebagai masukan (entri) determinan matriks koefisien sistem persamaan

$$4x_1 + 8x_3 = 10$$
$$3x_1 + 6x_3 = 11$$

Vektor kolom [4, 3] dan [8, 6] tak bebas linear atau det(A) = 0; A adalah matriks konstanta variabel x_1, x_3.

Selanjutnya perhatikan teorema berikut yang nantinya penting dalam penggunaan metode simpleks.

Teorema 1.1: Misalkan A.X = B adalah sistem persamaan yang terbentuk oleh m persamaan di dalam n variabel, dengan m < n dan rank(A) = m maka jika persamaan mempunyai penyelesaian layak di mana $X \geq 0$ akan diperoleh pemecahan layak dasar.

Bahasan tentang teorema ini akan Anda temui dalam uraian tentang persiapan penggunaan metode simpleks (Modul 3).

Pemecahan dasar dapat ditentukan bila sistem persamaan mempunyai jumlah variabel n > m. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan, di mana n < m? Untuk itu perhatikan contoh berikut

Contoh 1.8:

Carilah penyelesaian

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 = 7$$
$$x_1 + 6x_2 = 9$$

Karena terdapat 2 variabel dan 3 persamaan maka pemecahan sistem persamaan dapat dicari melalui

1. Cari penyelesaian dari sistem persamaan 2 variabel dan 2 persamaan (persamaan ke satu dengan kedua atau kombinasi lainnya) kemudian

2. Substitusi nilai x_1 dan x_2 yang diperoleh ke persamaan ketiga. Bila x_1 dan x_2 sebagai pemecahan persamaan pertama memenuhi persamaan ketiga maka x_1 dan x_2 sebagai penyelesaian sistem persamaan 3 persamaan dan 2 variabel. Tetapi, bila x_1 dan x_2 tidak memenuhi persamaan ketiga maka sistem persamaan itu tidak mempunyai penyelesaian (inkonsisten). Kembali perhatikan sistem persamaan di atas.

$2x_1 + 4x_2 = 2$ $-x_1 + 2x_2 = 7$ karena $r(A) = 4 + 4 = 8 \neq 0$ maka sistem persamaan konsisten, penyelesaiannya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = 2$ substitusikan ke $x_1 + 6x_2 = 9$ ternyata memenuhi	$x_1 + 6x_2 = 9$ $-x_1 + 2x_2 = 7$ karena $r(A) = 8 \neq 0$ maka sistem persamaan konsisten, penyelesaiannya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = 2$ substitusikan ke $2x_1 + 4x_2 = 2$ ternyata memenuhi

Jadi penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah $x_1 = -3$; $x_2 = 2$

Perhatikan

$x_1 + 6x_2 = 4$ (i)

$2x_1 + 4x_2 = -1$ (ii)

$-x_1 + 2x_2 = 8$ (iii)

Sistem persamaan

$x_1 + 6x_2 = 4$

$2x_1 + 4x_2 = -1$ konsisten dengan penyelesaian

$$x_1 = -\frac{11}{4} \text{ dan } x_2 = \frac{9}{8}$$

substitusi ke $-x_1 + 2x_2 = 8$ menjadi $\dfrac{22}{8} + \dfrac{18}{8} = 5 \neq 8$

Sehingga sistem persamaan (2 variabel dan 3 persamaan) itu tidak mempunyai penyelesaian (tidak konsisten). Bila kita mencari x_1 dan x_2 dari (ii) dan (iii) kemudian substitusi ke (i) akan diperoleh simpulan yang sama.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui sistem persamaan

$$3x + 2y - 4z = 10$$
$$x + y + 2z = 3$$
$$2x - y - 3z = 7$$

a. Nyatakan dalam bentuk A.X = B.
b. Tunjukkan minor a_{22} matriks A.
c. Nilai kofaktor K_{31} positif atau negatif?
   Tulislah alasan Anda!
d. Carilah det (A) = $a_{31}K_{31} + a_{32}K_{32} + a_{33}K_{33}$
e. Matriks kofaktor K matriks A adalah....
f. Adj(A) = ….
g. Carilah A^{-1}
h. Carilah penyelesaian dari A.X = B dengan bantuan A^{-1} dan det(A).

2) Diketahui sistem persamaan A.X = B dengan persamaan pembentuknya

$$x + y + z = 3$$
$$3x - y + 2z = 4$$
$$x + y - z = 1$$

a. Berapakah r(A)?
b. Carilah A^{-1} dengan bantuan operasi baris elementer!
c. Carilah A^{-1} dengan mencari dahulu matriks kofaktor K dari matriks A!
d. Cara mencari A^{-1} manakah yang menurut Anda lebih efisien?

3) Perhatikan sistem persamaan A.X = B

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$2x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$2x_3 + x_4 = 3$$

a. Tulislah matriks yang diperbesar A_B persamaan A.X = B.
b. Carilah r(A)
c. Carilah r(A_B)
d. Carilah semua pemecahan dasar (basis) A.X = B

4) Tinjau sistem persamaan A.X = B, yaitu

$$x + y + 2z = p$$
$$x + z = q$$
$$2x + y + 3z = r$$

a. Gunakan operasi baris elementer untuk menunjukkan hubungan p, q, dan r agar A.X = B konsisten.
b. Hitung $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{22}K_{22} + a_{33}K_{33}$
c. Apakah matriks A non-singular? Kalau ternyata matriks A non-singular carilah A^{-1}!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Sistem persamaan A . X = B

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Minor dari a_{22} adalah matriks $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; elemen pada baris kedua dan kolom kedua dihilangkan.

Untuk mengetahui tanda K_{ij} Anda harus memperhatikan aturan $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dengan bantuan aturan ini Anda dapat menemukan det(A) = 2 x K_{31} -1 x K_{32} -3 x K_{33}; Tentukan dahulu K_{31}, K_{32} & K_{33}. Matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 10 & -1 & 7 \\ 8 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

lengkapilah (harus dicari dahulu K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32} & K_{33})

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 7 & -1 & \dots \\ -3 & 7 & \dots \end{bmatrix}$$

A^{-1} dapat Anda peroleh dengan bantuan rumus $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

det(A) = 1 + 2 + 3 + 1 – 2 + 3 = 8 $\neq 0$ maka
r(A) = 3.
Mencari A^{-1} dengan bantuan operasi baris elementer sebagai berikut:
Pertama tulislah bentuk

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}}^{\text{Masukan matriks identitas ukuran } 3 \times 3}} \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kalikan baris 1 dengan (-3) tambahkan ke baris 2; dan kalikan baris 1 dengan (-1) tambahkan ke baris 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kalikan baris 2 dengan $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Kalikan baris 3 dengan $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Kalikan baris 3 dengan (-1) tambahkan ke baris 1. Kalikan baris 3 dengan $\left(-\frac{1}{4}\right)$ tambahkan ke baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Kalikan baris 2 dengan (-1) tambahkan ke baris 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Pengerjaan berakhir jika matriks sebelah kiri berubah menjadi matriks identitas.

Jadi $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Lihat penjelasan untuk menjawab soal nomor 1c kemudian Anda buat matriks transpos matriks kofaktor dan akhirnya $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$; matriks A^{-1} yang diperoleh melalui operasi baris elementer akan sama dengan ekspansi kofaktor.

3) Matriks yang diperbesar A_B dengan orde 3 x 6

$$A_B = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad r(A) = r(A_B) = 3$$

Banyak penyelesaian dasar = ${}_5C_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$

namun tidak semua yang mungkin sebab untuk $x_1 = 0$; $x_3 = 0$; bukan penyelesaian untuk sistem persamaan 3 variabel (x_2, x_4, dan x_5) karena vektor. Kolom x_2 sebanding dengan vektor kolom x_5.

Hal yang sama akan Anda peroleh untuk variabel non-basis x_1 dan x_4; dan untuk kombinasi variabel
non-basis x_3 dan x_4.

4) Ingat syarat sistem persamaan dengan n variabel dan n persamaan konsisten bila $r(A) = r(A_B) = k$

dan dalam hal ini $n = 3$ dan $k < 3$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 0 + 2 + 2 - 0 - 1 - 3 = 0$ sehingga tidak ada A^{-1}.
Karena det (A) = 0 maka $r(A) < 3$; ternyata $r(A) = 2$
Anda perlu mencari hubungan p,q, dan r dari $\det(A_B) = 0$
dengan menuliskan dahulu

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & p \\ 1 & 0 & 1 & q \\ 2 & 1 & 3 & r \end{bmatrix}$$

Setelah Anda mengerjakan semua soal di atas, baca dan pahami kembali uraian tentang rank matriks, ekspansi kofaktor untuk mencari determinan suatu matriks bujur sangkar dan pemecahan dasar sistem persamaan.

RANGKUMAN

1. Rank matriks A berkaitan dengan nilai determinan matriks bujur sangkar minor (dapat A atau lebih kecil dari A).
   Kalau orde A adalah m x n maka
   a. untuk m = n, rank(A) = r(A) = n bila det(A) $\neq$ 0 apabila det(A) = 0 maka r(A) ditentukan oleh banyak baris (kolom) minor A entri a_{ij}, dengan paling sedikit satu determinannya tidak sama dengan nol.
   b. untuk m < n; r(A) = m bila terdapat satu determinan P dalam matriks P_{mxm} yang bernilai tidak sama dengan nol.
2. Nilai determinan suatu matriks bujur sangkar dapat diperoleh melalui ekspansi kofaktor.
   Misalkan A dengan orde n x n
   $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + \ldots + a_{1n}K_{1n}$
   (ekspansi menurut baris tertentu)
   $= a_{21}K_{21} + a_{n2}K_{n2} + \ldots + a_{2n}K_{1n}$
   $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $= a_{n1}K_{n1} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{nn}K_{nn}$
   $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{nn}K_{nn}$ (ekspansi diagonal)
   $\det(A) = a_{12}K_{12} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{n2}K_{n2}$ (ekspansi kolom tertentu)

   $K_{ij} = (-1)^{1+j} \times M_{ij}$; M_{ij} adalah determinan minor entry a_{ij}

3. Penyelesaian dasar sistem persamaan A.X = B di mana banyak persamaan m dan banyak variabel n serta m < n diperoleh dengan memperhatikan r(A) dan r(A_B); A_B adalah matriks yang diperbesar sistem persamaan A.X = B

   Banyak pemecahan dasar maksimum ${}_nC_m$ (kombinasi n unsur di mana tiap pilihan sebanyak m unsur).
   m variabel disebut *variabel dasar* (basis)
   n – m variabel disebut *variabel non-basis*. Semua variabel non-basis bernilai nol.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Rank matriks yang diperbesar dalam A.X = B
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10$
$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 + x_6 = 20$
adalah r(A) = 2 sebab ....
A. A adalah matriks dengan orde 2 x 6
B. A_B adalah matriks dengan orde 2 x 7
C. $\det(A_1) \neq 0$; $(A_1)_{2x2}$ adalah partisi dari (A_B)
D. $\det(A_1) \neq 0$; $(A_1)_{2x2}$ adalah partisi dari (A)

2) Rank matriks yang diperbesar A_B dalam A.X = B
$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 17$, ialah ....
A. 1
B. 2
C. 3
D. 6

3) Perhatikan sistem persamaan
$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$
Banyak pemecahan dasar yang nyata sistem persamaan adalah ….
A. 8
B. 9
C. 10
D. 19

4) Kalau $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ adalah pemecahan dasar dari
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 14$
maka salah satu pemecahan dasar itu adalah ....
A. (0,0,1,3,0)
B. (0,0,0,1,3)
C. (0,1,3,0,0)
D. (0,1,0,3,0)

5) Salah satu pemecahan dasar sistem persamaan
$4x_1 + px_2 + 8x_3 = 16$
$x_1 + (-x_2) + 2x_3 = 20$
adalah $\left(0, \dfrac{-64}{p.4q}, 4\right)$
Hubungan antara p dan q yang berkaitan dengan pemecahan dasar itu adalah ….
A. $3p + 4q = 0$
B. $3p - 4q = 0$
C. $p - q = 0$
D. $p + q = 0$

6) Det(A) dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ bernilai sama dengan ....
A. $6\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
B. $6\begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
C. $6\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
D. $6\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

7) Perhatikan matriks
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$
Kofaktor unsur a_{43} adalah ….
A. –144
B. –120
C. 132
D. 144

8) Matriks kofaktor dari

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} -24 & 0 & 6 \\ 33 & -11 & 0 \\ -24 & 22 & -6 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -24 & 0 & -6 \\ -33 & 11 & 0 \\ -24 & 22 & -6 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -24 & 0 & -6 \\ -33 & 11 & 0 \\ 24 & 22 & -6 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -24 & 0 & 6 \\ -33 & 11 & 0 \\ -24 & 22 & 6 \end{bmatrix}$

9) Perhatikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, A^{-1} adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -11 & 6 & -9 \\ -12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & -6 & 9 \\ -12 & -7 & -10 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & -6 & 9 \\ -12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

10) Teliti 3 sistem persamaan berikut.

$$\text{(i)}\quad \begin{matrix} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \\ 4x + 5y = 17 \end{matrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{matrix} 5x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \\ 6x + 8y = 20 \end{matrix} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{matrix} 2x + 3y = -2 \\ x - y = 4 \\ 5x + y = 8 \end{matrix}$$

Sistem persamaan yang konsisten ialah ....
A. (i) dan (ii)
B. (ii) dan (iii)
C. (i) dan (iii)
D. (i), (ii) dan (iii)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sistem Pertidaksamaan Linear

Perhatikan dua ilustrasi berikut sebagai pengantar untuk mengenali pertidaksamaan linear. (i) Pengusaha mebel ingin memproduksi almari kualitas tinggi dan almari kualitas sedang dari kayu jati dan kayu ramin yang tersedia dalam jumlah tertentu. Tiap unit kayu jati maupun kayu ramin digunakan secara menyebar dalam proporsi tertentu untuk menghasilkan kedua macam almari.

Hal pokok yang tersurat dalam ilustrasi itu adalah (1) variabel aktivitas ada 2 dan (2) terdapat dua masukan yang ternyata terbatas, yaitu *paling banyak* kayu yang tersedia itu habis terpakai.

(ii) Menurut Dokter, Amin dan Ani (suami istri) perlu mengatur menu makannya dengan baik. Untuk itu mereka membutuhkan daging miskin lemak dan daging berlemak dalam jumlah/proporsi tertentu. Kebutuhan Amin dan Ani *sedikitnya* sejumlah daging miskin lemak dalam seminggu. Kedua kriteria daging dapat dipenuhi oleh daging sapi dan ayam atau salah satu.

Hal pokok yang tersurat dalam ilustrasi ini, berkaitan dengan sistem pertidaksamaan linear adalah (1) variabel bebas daging sapi dan ayam, (2) jumlah lemak menurut kriteria kebutuhan Amin dan Ani yang terdapat dalam daging sapi dan ayam dalam batasan paling *sedikit* dan dibutuhkan (non-negatif).

Kedua ilustrasi sederhana di atas menampilkan kepada kita dua macam pertidaksamaan linear.

1. $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \le b_1$; a_{11}, a_{12}, dan b_1 adalah konstanta
2. $p_{11}\, x_1 + p_{12}\, x_2 \ge t_1$; p_{11}, p_{12}, dan t_1 adalah konstanta

Memperhatikan ilustrasi (i) di mana terdapat kayu jati dan ramin untuk membuat almari kualitas tinggi (x_1) dan almari kualitas sedang (x_2) maka *pembatas* bagi masukan dapat dirumuskan

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \le b_1$ untuk kayu jati
$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \le b_2$ untuk kayu ramin

Demikian pula dari ilustrasi (ii) dapat dinyatakan
kebutuhan Amin $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ge b_1$
kebutuhan Ani $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ge b_2$

Karena terdapat dua pertidaksamaan linear yang terjalin dalam suatu kesatuan (keterikatan) maka gabungan dua pertidaksamaan itu dimaksudkan di sini sebagai suatu sistem pertidaksamaan. Kombinasi lain yang dapat tampil sebagai pembatas suatu program linear seperti berikut ini.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq , = , \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq, = , \geq b_2$

$a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 \leq , = , \geq b_3$ dan lainnya bergantung pada rumusan pembatas (kendala) yang ada dalam suatu masalah pemrograman linear.

A. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Perhatikan persamaan $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ ... (1.1)

Pemecahan persamaan (1.1) adalah himpunan pasangan (x, y) secara geometri dinyatakan dengan garis lurus. Kenapa? Bagaimana dengan pertidaksamaan linear $ax + by \leq c$ ... (1.2) dan $ax + by \geq c$ ... (1.3) di mana a, b, dan c adalah konstanta.

Untuk itu, (1) buat garis $ax + by = c$

(2) dengan memperhatikan nilai konstanta kita peroleh bidang datar (dengan garis $ax + by = c$ sebagai pembatas) sebagai himpunan (x, y) yang merupakan pemecahan pertidaksamaan.

(3) kalau a, b, dan c adalah konstanta real positif

(i) bidang datar sebelah *kiri* $ax + by = c$ (termasuk garis itu) sebagai daerah pemecahan $ax + by \leq c$

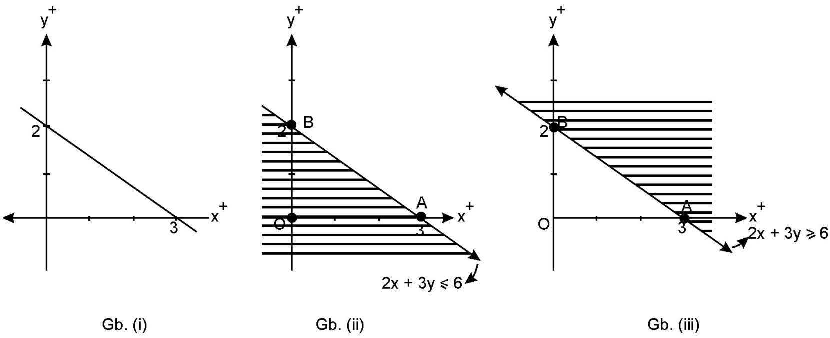
(ii) bidang datar sebelah *kanan* $ax + by = c$ (termasuk $ax + by = c$) sebagai *daerah pemecahan* $ax + by \geq c$

Contoh 1.9

Perhatikan $2x + 3y = 6$ …. (i); $2x + 3y \leq 6$ (ii)

dan $2x + 3y \geq 6$ (iii)

Tunjukkan pemecahan dari ketiga bentuk itu.



Gambar 1.1

Garis yang ditunjukkan Gambar 1.1(i) menunjukkan daerah penyelesaian (i), daerah arsiran yang ditunjukkan gambar 1.1 (ii) memperlihatkan daerah hasil pertidaksamaan yang layak (ii), dan daerah arsiran Gambar 1.1(iii) memperlihatkan daerah hasil pertidaksamaan yang layak (iii).

Bagaimanakah kalau x dan y non-negatif?

1. Daerah hasil persamaan (i) ialah sepanjang garis termasuk titik potong dengan sb.x dan sb.y
2. Daerah hasil/penyelesaian pertidaksamaan (ii) adalah daerah bidang segitiga OAB
3. Daerah penyelesaian pertidaksamaan (iii) ialah bagian kuadran I (x^+, y^+) di luar segitiga OAB dengan segmen AB sebagai pembatas.

Contoh 1.10

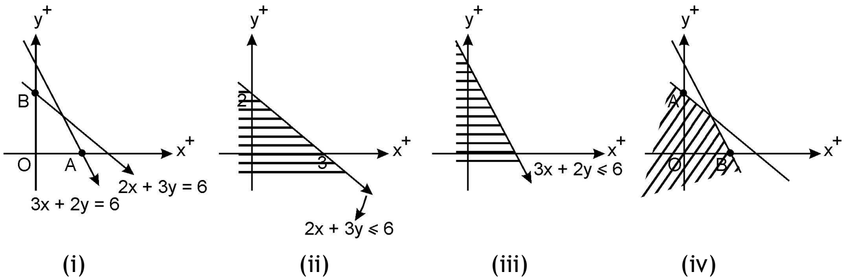
Perlihatkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan

1. $2x + 3y \leq 6$
   $3x + 2y \leq 6$
2. $2x + 3y \leq 6$
   $3x + 2y \leq 6$
   $x \geq 0, \; y \geq 0$

Pertama digambarkan garis dengan persamaan

$2x + 3y = 6$ dan $3x + 2y = 6$ Gambar 1.2 (i) (I)

Kedua, mengarsir daerah penyelesaian tiap pertidaksamaan (Gambar 1.2 (ii)) dan (Gambar 1.2 (iii))
Ketiga, daerah arsiran (Gambar 1.2. (iv)) menunjukkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (i).
Keempat, daerah AOB pada Gambar 1.2 (iv) menunjukkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (ii).



Gambar 1.2

Bagaimana penyelesaian dengan penerapan konsep penyelesaian pertidaksamaan dengan dua variabel/tiga variabel dan pemecahan sistem pertidaksamaan dengan 2 persamaan dan 3 variabel?

Perhatikan (i) $2x + 3y \leq 6$

dengan menambahkan konstanta (dapat juga variabel) z ke ruas kiri, kita memperoleh

$$2x + 3y + z = 6$$

bila z = t; t adalah konstanta

maka $2x + 3y = 6 - t$; dan untuk y = s

$2x = 6 - t - 3s$; jadi pertidaksamaan

$2x + 3y \leq 6$ mempunyai banyak sekali pemecahan; Ingat: bidang adalah himpunan pasangan berurutan (x, y), untuk dimensi dua/dua variabel.

(ii) $2x + 3y \leq 6$

$3x + 2y \leq 6$

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$

dengan menambahkan variabel *slack* (penambah) u dan z maka sistem pertidaksamaan menjadi sistem persamaan

$$2x + 3y + u = 6$$
$$3x + 2y + z = 6;\ \text{u dan z adalah variabel slack } u \geq 0;\ z \geq 0$$

Selanjutnya kita gunakan cara pemecahan sistem persamaan.

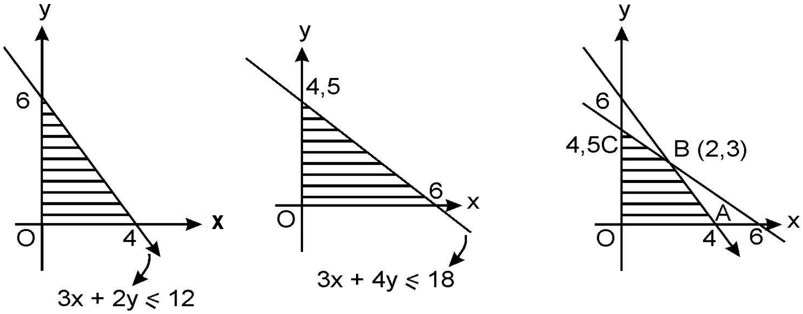
Karena banyak variabel n = 4 dan banyak persamaan m = 2 maka dengan penerapan pengertian rank matriks yang diperbesar kita peroleh kesimpulan sistem persamaan (berasal dari sistem pertidaksamaan) mempunyai banyak sekali pemecahan, di antara itu terdapat *pemecahan dasar* (basis) yang akan digunakan dalam pemecahan masalah program linear.

$2x + 3y + u = 6$
$3x + 2y + z = 6$
Terdapat ${}_4C_2 = 6$ pemecahan dasar (x, y, u, z), yaitu
(0, 0, ..., ...); (0,...,0,..); (0,...,..,0)
(..., 0, 0, ...); (.., 0, .., 0); (.., .., 0, 0). Silakan lengkapi

Contoh 1.11
Perhatikan sistem pertidaksamaan dengan kendala (syarat):

$3x + 2y \leq 12$
$3x + 4y \leq 18$
$x \geq 0,\ y \geq 0$

Gambarlah daerah penyelesaian dan tentukan nilai terbesar dari T = 4x + 5y di mana (x,y) adalah penyelesaian sistem pertidaksamaan itu. T merupakan fungsi tujuan yang akan ditentukan nilai optimumnya, yaitu nilai T terbesar. Apa yang dapat kita buat untuk menemukan nilai T?
Pertama, gambarlah garis g dengan persamaan 3x + 2y = 12 dan garis t dengan pertama 3x + 4y = 18 dalam bidang XOY (Gambar 1.3 (i) & (ii)).
Kedua, arsirlah daerah hasil layak (pemecahan) Gambar 1.3 (iii)
Ketiga, cari koordinat titik-titik sudut poligon pembatas daerah hasil layak
Keempat, hitung nilai T.



(i) (ii) (iii)

Gambar 1.3

1. Daerah hasil layak adalah bidang OABC; A dan C ialah titik potong garis pembatas dengan sumbu x dan sumbu y. B ialah titik potong garis g dengan garis t dengan koordinat (2.3).

2. A (4,0) ……….T = 4x + 5y = 16
   B (2,3) ………..T = 8 + 15 = 23
   C $(0,4\ \frac{1}{2})$ T = $0 + 22\frac{1}{2} = 22\ \frac{1}{2}$

Nilai T terbesar dicapai bila x = 2 dan y = 3 atau (2,3) sebagai pasangan penentu nilai optimal dari T.

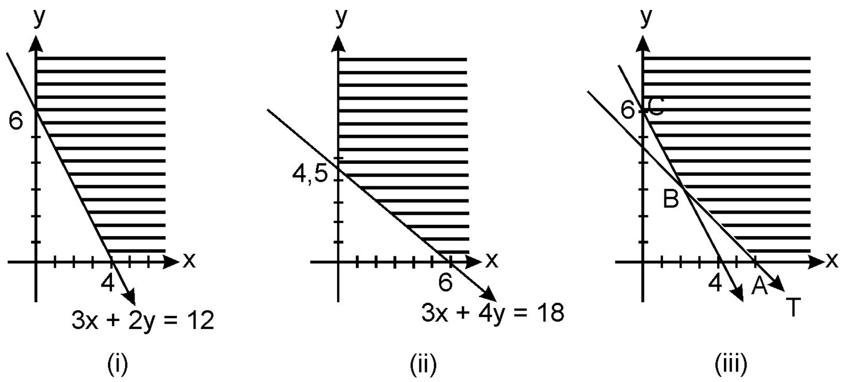
Mengapa kita hanya memperhatikan titik sudut poligon OABC untuk menentukan nilai terbesar dari T. Silakan Anda mencari jawaban itu!

Contoh 1.12

Tentukan nilai ekstrim T = 4x + 5y jika (x, y) adalah penyelesaian sistem pertidaksamaan

$3x + 2y \geq 12$
$3x + 4y \geq 18$
$x \geq 0$ dan $y \geq 0$

1. Gambarlah garis 3x + 2y = 12 dan 3x + 4y = 18
2. Daerah pemecahan (hasil layak) adalah bidang yang terbuka ke kanan (lihat Gambar 1.4).



Gambar 1.4

Garis tepi bidang hasil layak adalah:

a. sinar garis yang terletak pada sumbu y dengan pangkal C
b. ruang garis CB
c. ruas garis BA
d. sinar garis yang terletak pada sumbu x dengan pangkal A (lihat Gambar 1.4 (iii)).

3. Menentukan nilai T

titik	x	y	T = 4x + 5y
A	6	0	24
B	2	3	23
C	0	6	30

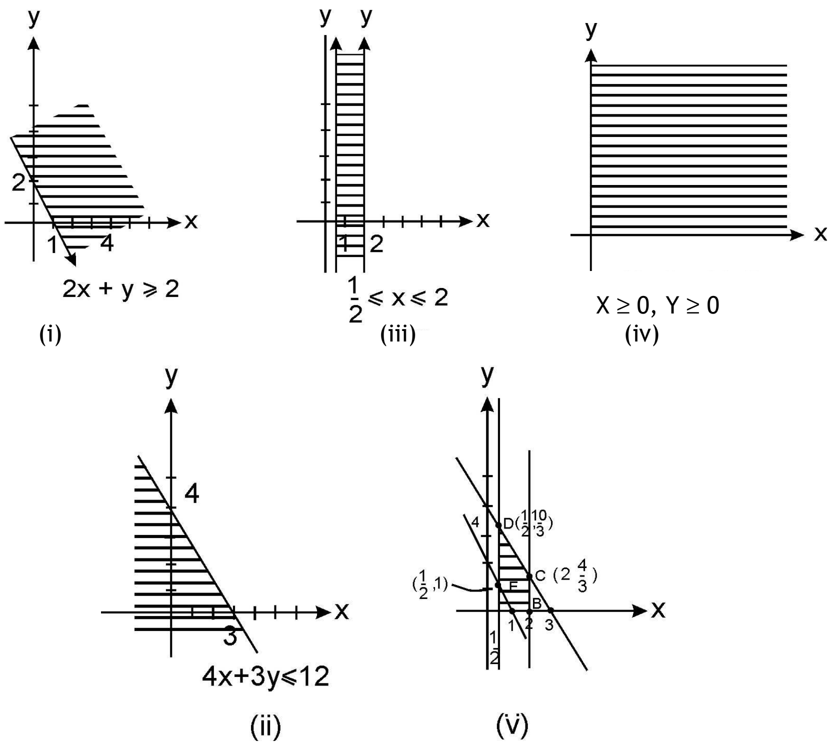
Kalau mencari T maksimum maka pasangan (0,6) yang dipilih.
Kalau mencari nilai minimum, maka pasangan (2,3) yang dipilih.
Timbul pertanyaan mengapa titik (2,3) terpilih untuk menentukan nilai T baik maksimum maupun minimum? Cobalah Anda cari jawabannya!

Contoh 1.13

Gambarlah grafik tiap daerah hasil tiap pertidaksamaan pembentuk dan sistem pertidaksamaan

$2x + y \geq 2$ …. (i)
$4x + 3y \leq 12$ …. (ii)
$0{,}5 \leq x \leq 2$ ….(iii)
$x, y \geq 0$ ….(iv)

Kemudian carilah nilai ekstrim T = 4x + 5y di mana (x, y) adalah titik bidang pembatas daerah hasil layak sistem pertidaksamaan itu.



Gambar 1.5

Titik	x	y	T = 4x + 5y
A	1	0	4
B	2	0	8
C	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{44}{3}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{56}{3}$
E	$\frac{1}{2}$	1	7

Simpulan: Nilai Maksimum T = $\frac{56}{3}$ di titik D

Nilai minimum T = 4 di titik A

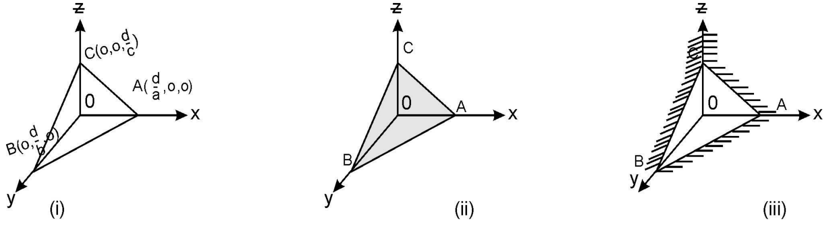
2. SISTEM PERTIDAKSAMAAN TIGA VARIABEL

Perhatikan
$$ax + by + cz = d \quad .... \text{(i)}$$
$$ax + by + cz \leq d \quad .... \text{(ii)}$$
$$ax + by + cz \geq d \quad ....\text{(iii)}$$

Pertama-tama kita bahas a, b, c dan d konstanta positif atau secara geometris akan kita bahas daerah dalam ruang yang dibatasi oleh bidang X^+OY^+, X^+OZ^+, dan Y^+OZ^+ .x,y,z $\geq$ 0.

1. Daerah pemecahan ax + by + cz = d terdapat pada bidang yang melalui A ($\frac{d}{a}$,0,0);

   B (0, $\frac{d}{b}$, 0); C (0,0, $\frac{d}{c}$), lihat gambar 1.6 (i)
2. Daerah pemecahan ax + by + cz $\leq$ d; x, y, z $\geq$ 0 adalah bangun ruang (limas O.ABC) yang dibatasi oleh bidang XOY, XOZ, YOZ, dan ax + by + cz = d. Lihat Gambar 1.6 (ii)
3. Daerah pemecahan ax + by + cz $\geq$ d; x, y, z $\geq$ 0 adalah bangun ruang pada permukaan bidang ax + by + cz = d dan di luar limas O.ABC. Lihat Gambar 1.6 (iii).



Gambar 1.6

Apabila terdapat kombinasi lain maka pemahaman materi bahasan dalam Stereometri sangat esensial untuk menunjang usaha Anda menemukan daerah pemecahan sistem pertidaksamaan tiga variabel.

Contoh 1.14

Tunjukkan dengan gambar daerah pemecahan sistem pertidaksamaan

$4x + 3y + 2z \leq 12$

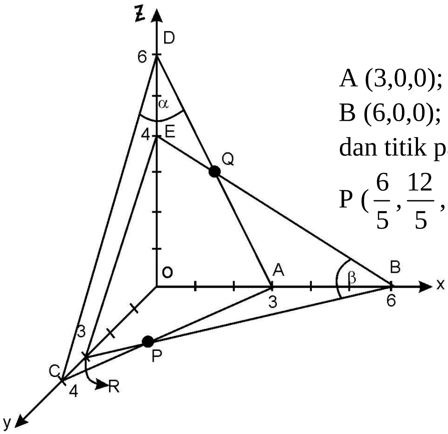
$2x + 4y + 3z \leq 12$

$x, y, z \geq 0$

Untuk itu, gambarlah bidang: $\alpha : 4x + 3y + 2z = 12$

$\beta : 2x+4y+3z= 12$

Lihat Gambar 1.7



A (3,0,0); C (0,4,0); D (0,0,6)

B (6,0,0); R (0,3,0); E (0,0,4)

dan titik pada irisan antara dua bidang yaitu

P $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$ Q $\left(\frac{3}{2}, 0,3\right)$

Gambar 1.7

Daerah pemecahan (layak hasil) adalah limas Q.OAPRE

Berapa nilai maksimum T = 2x + 3y + z ?

	x	y	z	T = 2x + 3y + z
O	0	0	0	0
A	3	0	0	6
P	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	9,6
R	0	3	0	9
Q	1,5	0	3	6
E	0	0	4	4

Nilai maksimum T = 9,6 ditentukan oleh pasangan x, y, z yang terdapat pada irisan kedua bidang yang diketahui dan dalam ruang pemecahan (limas terpancung ORE. APQ). Bagaimana bila pernyataan pertidaksamaan menjadi

$4x + 3y + 2z \geq 12$

$2x + 4y + 3z \geq 12$

$x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$

Jawabannya adalah sebagai berikut

1. Gambar bidang α dan β (lihat Gambar 1.7).
2. Daerah yang dibatasi oleh bidang BPQ dan CPQD dalam ruang X^+OY^+ dan bagian bidang α dan β (lihat Gambar 1.7) merupakan daerah pemecahan.

Cari nilai minimum T = 2x + 3y + 4z

	x	y	z	T = 2x + 3y + 4z
B	6	0	0	12
P	1,2	2,4	0	2,4 + 7,2 = 9,6
Q	1,5	0	3	3,0 + 0 + 12 = 15
D	0	0	6	0 + 0 + 24 = 24
C	0	4	0	0 + 12 + 0 = 12

Nilai minimum dicapai pada titik P yang terletak pada irisan antara dua bidang pembentuk sistem pertidaksamaan di atas.

Perhatikan kembali sistem pertidaksamaan, Contoh 1.14. Apabila memasukkan variabel baru u dan v maka sistem pertidaksamaan ini menjadi:

$4x + 3y + 2z + u = 12$ (i)

$2x + 4y + 3z + v = 12$ (ii)

$x \geq 0 ; y \geq 0; z \geq 0; u \geq 0; v \geq 0$

Karena terdapat 2 persamaan dengan 5 variabel maka sistem persamaan itu mempunyai banyak sekali pemecahan. Untuk itu, kita pilih pemecahan dasar (basis) yang layak sebagai pemecahan sistem persamaan.

Variabel basis	**Variabel non-basis**	**Keterangan**
u = 12; v = 12 (1)	x = 0; y = 0; z = 0	layak
u = - 12; x =6	v = 0; y = 0; z = 0	tidak layak
u = 3; y = 3 (2)	x = 0; v = 0; z = 0	layak
u = 4; z = 4 (3)	x = 0; y = 0; v = 0	layak
x = 3; v = 6 (4)	u = 0; y = 0; z = 0	layak
y = 4; v = - 4	x = 0; u = 0; z = 0	tidak layak
z = 6; v = - 6	x = 0 ; y = 0 ; u = 0	tidak layak
x = $\frac{6}{5}$; y = $\frac{12}{5}$ (5)	u = 0 ;v = 0; z = 0	layak
x = $\frac{3}{2}$; z = 3 (6)	u = 0; y = 0; v =0	layak
y =12; z = - 12	x = 0; u = 0; v = 0	tidak layak

Catatan: Disebut layak karena memenuhi syarat nilai variabel selalu non negatif. Disebut tidak layak karena ada variabel yang bernilai negatif.

Bagaimana nilai T = 2x + 3y + z?

$$T_{(1)} = 0;\ T_{(2)} = 9\ ;\ T_{(3)} = 4;\ T_{(4)} = 6$$

$$T_{(5)} = \frac{12}{5} + \frac{36}{5} = 9{,}6\ ;\ T_{(6)} = 6$$

Jadi nilai maksimum T = 9,6 yang sama dengan cara grafik pada Contoh 1.14

Bagaimana kalau ternyata sistem pertidaksamaan yang terdapat dalam batas x, y, dan z non-negatif seperti berikut.

$4x + 3y + z \leq 19$
$2x + 3y + 4z \leq 21$
$x + 2y + 3z \leq 14$

1. Dengan bantuan gambar, penyelesaian diperoleh dengan lebih dahulu menggambar 3 bidang datar di dalam sistem koordinat Cartesius XYZ (lihat Contoh 1.14).

   Bidang (i) $4x + 3y + z = 19$
   (ii) $2x + 3y + 4z = 21$
   (iii) $x + 2y + 3z = 14$

Kemudian arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ yang memenuhi ketiga pertidaksamaan. Penyelesaian sistem pertidaksamaan adalah himpunan titik-titik (x, y, z) yang terdapat pada bangun ruang berbentuk .... (silakan Anda jawab setelah menggambar).

Selanjutnya cari koordinat titik sudut bangun ruang dengan cara mencari pemecahan sistem persamaan, yaitu 2 persamaan simultan (i) dan (ii); (i) dan (iii); (ii) dan (iii); dan tiga persamaan simultan (i), (ii), dan (iii).

2. Masukkan pada ruas kiri tiap pertidaksamaan, secara berurutan variabel non negatif u,v, dan w sehingga menjadi

$$4x + 3y + z + u = 19$$
$$2x + 3y + 4z + v = 21$$
$$x + 2y + 3z + w = 14$$

Terdapat 3 persamaan dengan 4 variabel. Perhatikan kembali aturan tentang penerapan rank matriks koefisien variabel dan rank matriks yang diperbesar sistem persamaan.

Tiap pemecahan dasar (basis) akan kita peroleh setelah mengambil 3 variabel non basis. Misalnya variabel basis pertama u, v, dan w; variabel non-basis x, y, dan z, dan seterusnya. Terdapat ${}_6C_3$ = 20 pemecahan dasar. Pemecahan dasar yang layak adalah pemecahan dasar di mana nilai variabel basis selalu non-negatif. Apabila $T = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$ maka nilai variabel u, v, dan w adalah nol biar pun variabel itu menjadi variabel basis. Mengapa? Karena u, v, w dimaksud sebagai variabel penambah (*slack*) untuk mengubah sistem pertidaksamaan menjadi sistem persamaan, sehingga perlu diperkecil peranannya.

C. SISTEM PERTIDAKSAMAAN DENGAN 4 VARIABEL (ATAU LEBIH)

Seperti pertidaksamaan linear 2 variabel dan 3 variabel, pertidaksamaan linear dengan 4 variabel dapat diselesaikan dengan cara menambahkan variabel penambah. Sedangkan cara grafik seperti bahasan tentang 2 variabel atau tiga variabel tidak bisa kita gunakan untuk mencari penyelesaian pertidaksamaan dengan 4 variabel.

Tinjau (i) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1$

(ii) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2$

(iii) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}\,x_4 \leq b_3$
(iv) $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$

Nilai variabel yang merupakan pemecahan sistem pertidaksamaan harus mengubah tiap pertidaksamaan menjadi pernyataan yang *benar* dan terdapat dalam batasan non-negatif.

Kita perhatikan sistem persamaan dengan pertidaksamaan pembentuk yaitu (i) dan (ii). Tambahkan s_1 ke ruas-kiri (i) dan s_2 ke ruas kiri (ii).

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3 + x_{24}x_4 + s_2 = b_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Karena terdapat banyak sekali pemecahan sistem persamaan (*) maka alternatif yang mungkin kita ambil adalah mencari pemecahan dasar (basis). Untuk itu, tiap pemecahan dasar mengandung *dua variabel basis* dan *empat variabel non-basis*. Mengapa? Silakan Anda menjawabnya.

Sedangkan untuk satu variabel basis bernilai (masalah degenerasi) akan kita bahas di dalam modul tentang primal dual dan degenerasi (modul 5).

Pemecahan dasar awal dari (*) adalah

$s_1 = b_1;\ s_2 = b_2;\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, dan seterusnya menentukan banyak kombinasi 2 variabel dari 6 variabel yang tampil sebagai variabel basis. Jumlah maksimum pemecahan dasar dari (*) adalah

$${}_6C_2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5x6}{1x2} = 15$$

Contoh 1.15

Carilah pemecahan dasar sistem pertidaksamaan

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

dengan catatan nilai x_j, $j = 1, 2, 3, 4$ adalah non-negatif.
Tambahkan variabel slack x_5 pada persamaan (i) dan x_6 pada persamaan (ii)

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_2 + 3x_4 + x_5 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 12$$

(1) Variabel basis x_5 dan x_6 ; non-basis x_1, x_2, x_3 dan x_4
(2) Variabel basis x_5 dan x_1 ; non-basis ....
(3) Variabel basis x_5 dan x_3 ; ....
(4) Variabel basis x_5 dan x_4 ; …………………………….
(5) Variabel basis ………….; non-basis x_5, x_2, x_3, dan x_4
(6) Variabel basis ………….; non-basis x_5, x_1, x_2, dan x_4
(14) Variabel basis ………….; non-basis x_2, x_4, x_5, dan x_6

Coba Anda teliti vektor kolom x_2 dan vektor kolom b dari matriks yang diperbesar

2	2	4	3	1	0	12
4	2	3	2	0	1	12

Berdasarkan pengertian rank (A) dan rank (A_B), simpulan apakah yang dapat dirumuskan tentang pemecahan dasar sistem persamaan (*). Silakan Anda baca kembali uraian dalam modul 1 atau dari Buku Aljabar Linear Elementer (Howard Anton)/Pengantar Matriks (Supranto J). Jawaban diserahkan kepada Anda sebagai bahan kajian.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Gambar daerah pemecahan pertidaksamaan
   (i) $3x + 2y \leq 6$
   (ii) $2x - 5y \geq 10$
   (iii) $5x + 2y \leq 4$
   (iv) $5x + 7y \geq 35$

2) Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan tentukan koordinat titik sudut yang terbentuk
   (i) $x + y \leq 1$
   $x - y \leq 1$
   (ii) $2y - x \leq 2$

$2y - 3x \leq -1$

(iii) $x + 2y \leq 12$

$2x + y \leq 12$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

(iv) $3x + 4y \leq 12$

$5x + 6y \leq 30$

$1 \leq x \leq 3$

3) Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan

(i) $2x + 5y + 4z \leq 40$

$5x + 4y + 2z \leq 40$

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

(ii) $2x + 4y + 5z \leq 60$

$4x + 5y + 2z \leq 60$

$5x + 2y + 4z \leq 60$

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

4) Tentukan nilai maksimum $T = 3x + 4y$ di mana x dan y adalah pemecahan sistem

$2x + y \leq 12$

$x + 2y \leq 12$

$x \geq 0$; $y \geq O$

5) Tentukan nilai maksimum dari $T = 2x + 2y + 3z$ di mana x, y, z adalah pemecahan dari

$2x + 5y + 4z \leq 40$

$5x + 4y + 2z \leq 40$

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

6) Masukan variabel penambah (*slack*) non-negatif ke ruas kiri pertidaksamaan, kemudian carilah semua pemecahan dasar sistem persamaannya.

(i) $3x + 4y \leq 12$

$5x + 3y \leq 15$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

(ii) $3x + 4y + 2z \leq 24$
$2x + 3y + 4z \leq 24$
$x \geq 0; y \geq 0 ; z \geq 0$

(iii) $4x + 3y \leq 18$
$3x + 5y \leq 19$
$2x + 3y \leq 12$
$x \geq 0; y \geq 0$

Petunjuk Jawaban Latihan

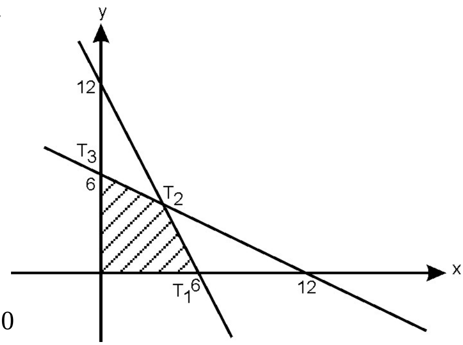
1) Gambarlah garis (i) $3x + 2y = 6$ kemudian substitusi (x, y) yang dalam hal ini (0,0) ke dalam pertidaksamaan dan perhatikan nilai kebenaran pernyataan itu.
Kalau ternyata benar, lihat di mana letak (0,0) itu dan arsir daerah yang sesuai. Gambar garis (ii) $2x - 5y = 10$, kemudian substitusi (0,0) ke dalam pertidaksamaan, akan diperoleh $0 \geq 10$ menghasilkan pernyataan yang salah, sehingga daerah pemecahan pertidaksamaan terdapat sebelah bawah/kanan $2x - 5y = 10$. Cara yang sama untuk menggambar (arsiran) daerah pemecahan $x + 2y \leq 4$; hanya saja himpunan titik pada garis $x + 2y = 4$ adalah penyelesaian pertidaksamaan dan arsiran ke arah titik (0,0).

2) Proses menjawab soal ke-2 merupakan lanjutan dari pekerjaan pada nomor 1.
   a. perlu menggambar garis dengan persamaan $x + y = 1$ dan $x - y = 1$ dalam satu bidang XOY; kemudian arsir daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan.
   b. perlu menggambar garis $2y - x = 2$ dan $y - 3x = -1$ kemudian arsir daerah dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.
   c. gambar garis $x + 2y = 12$, melalui A(12,0) dan B(0,6) kemudian gambar garis $2x + y = 12$, melalui C(6,0) dan D(0,12). Arsir daerah dalam bidang X^+OY^+ yang memenuhi sistem pertidaksamaan.
   d. gambar garis melalui A(4,0) dan B(0,3)
   gambar garis melalui C(6,0) dan D(0,5)
   gambar garis $x = 1$ dan $x = 3$
   arsir daerah sesuai dengan tanda pertidaksamaan

Daerah pemecahan terdapat pada poligon PQRS; P dan Q adalah perpotongan x = 1 dengan garis AB dan CD; R dan S adalah perpotongan garis x = 3 dengan CD dan AB.

3) a. Gambar bidang-bidang datar $2x + 5y + 4z = 40$ dan $5x + 4y + 2z = 40$ kemudian arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.
b. Gambar bidang α melalui A(30,0,0), B(0,15,0), C(0,0,12)
gambar bidang β melalui K(15,0,0), L(0,12,0), M(0,0,30)
gambar bidang γ melalui P(12,0,0), Q(0,30,0), R(0,0,15)
arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.

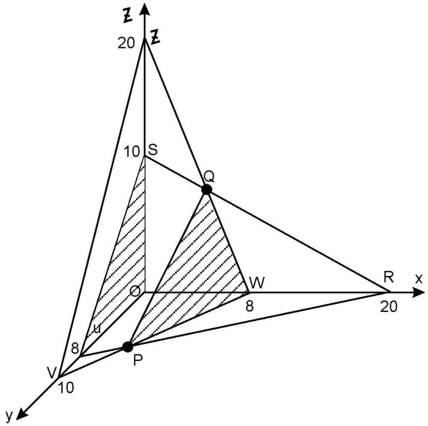
4) Gambar garis $x + 2y = 12$ dan $2x + y = 12$ kemudian arsir daerah itu dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan. Nilai $T_1 = 18$; $T_2 = 28$; $T_3 = 24$.



0

5) Gambar bidang $2x + 5y + 4z = 40$
$5x + 4y + 2z = 40$
Arsir daerah yang terdapat dalam ruang dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.
R(20,0,0); U(0,8,0); S(0,0,10)
W(8,0,0); V(0,10,0); Z(0,0,20)
P adalah perpotongan garis $2x + 5y = 40$
$5x + 4y = 40$
Q adalah perpotongan garis $2x + 4z = 40$
$5x + 2z = 40$

Daerah penyelesaian pada bangun ruang OUS. WPQ (limas terpancung). Substitusikan nilai x, y, dan z pada koordinat P, Q, W, S dan U ke dalam T = 2x + 2y + 3z dan Anda akan peroleh nilai maksimum T.



Gambar 1.7a

6) a. Masukkan variabel *slack* u dan w sehingga sistem pertidaksamaan menjadi 3x + 4y + u = 12

5x + 3y + w = 15

Pemecahan dasar pertama	(x, y, u, w)	(0,0,12,15)
kedua	(0,5,-8,0) tidak layak	
ketiga	(0,3,0,6)	
keempat	(3,0,3,0)	
kelima	(4,0,0,-5) tidak layak	
keenam	(…, ….,0,0) silakan Anda lengkapi	

b. Masukkan variabel slack u dan w sehingga sistem pertidaksamaan menjadi 3x + 4y + 2z + u = 24

2x + 3y + 4z + w = 24

Pemecahan dasar pertama	(x,y,z,u,w)	(0,0,0,24,24)
kedua		(0,0,6,12,0)
ketiga		(0,0,12,0,-32) tidak layak
		dan seterusnya

c. Silakan Anda cari sendiri.

RANGKUMAN

1. Sistem pertidaksamaan $ax + by \leq c$; $ax + by \geq c$; a, b, c konstanta
   $px + qy \leq r$; $px + qy \geq r$; p, q, r konstanta
   $x \geq 0$; $y \geq 0$
   a. dengan bantuan gambar garis $ax + by = c$ dan $px + qy = r$ dan arsir daerah pemecahan, kita dapat menemukan beberapa penyelesaian yang ditunjukkan oleh titik sudut pada bidang pemecahan untuk menentukan nilai maksimum/minimum dari $T = mx + ny$; m dan n konstanta.
   b. dengan memasukkan variabel penambah (*slack*) yang positif sistem pertidaksamaan menjadi
      $ax + by + u = c$; a, b dan c konstanta
      $px + qy + w = r$; p, q, dan r konstanta
      $x > 0$; $y > 0$; u dan w variabel slack

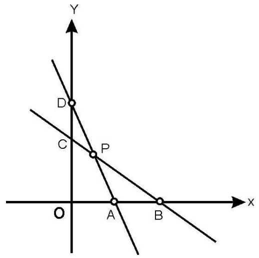
      Banyak pemecahan dasar adalah banyak kombinasi dari n variabel dengan tiap pilihan m variabel, n adalah banyak variabel termasuk variabel penambah (*slack*) dan m adalah banyak persamaan; $m \leq n$; m variabel disebut variabel basis sedangkan $n - m$ variabel disebut variabel non-basis.

2. Sistem pertidaksamaan
   $ax + by + cz \leq d$; $ax + by + cz \geq d$
   $px + qy + rz \leq t$; $px + qy + rz \geq t$
   $x \geq 0$; $y \geq 0$; dan $z \geq 0$ $\quad$ $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

   a. dengan bantuan persamaan $ax + by + cz = d$ dan $px + qy + rz = t$ dan gambar bidang datar yang ditunjukkan dengan dua persamaan itu serta arsir daerah dalam ruang XYZ sesuai dengan tanda pertidaksamaan dapat kita peroleh daerah penyelesaian serta beberapa penyelesaian penunjuk titik ekstrim dari $T = kx + ly + mz$.
   b. dengan memasukkan variabel penambah (*slack*) sistem pertidaksamaan menjadi
      $ax + by + cz + u = d$
      $px + qy + rz + w = t$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) 

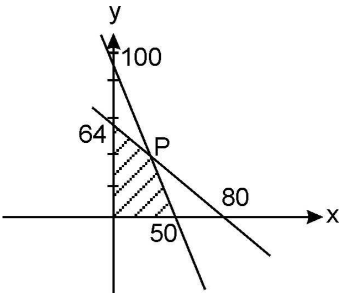
Perhatikan gambar di atas, jika A(40,0); B(80,0); $C\left(0,\dfrac{480}{11}\right)$ dan D (0,80) maka koordinat P adalah ....

A. (20,35)
B. (25,30)
C. (30,25)
D. (35,40)

2) Koordinat titik sudut dalam daerah pemecahan
$2x + 5y \leq 100$
$5x + 2y \leq 100$
$x \geq 0;\ y \geq 0$
adalah titik pada alternatif jawab, *kecuali* ….
A. (50,0)
B. (0,20)
C. $\left(\dfrac{100}{7}, \dfrac{100}{7}\right)$
D. (20,0)

3) Nilai maksimum T = 2x + 3y, di mana (x, y) adalah titik pembatas daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan
$6x + 11y \leq 480$
$2x + y \leq 80$
$x \geq 0;\ y \geq 0$ adalah ….
A. 80
B. 120
C. 140
D. 160

4) Lihatlah gambar di bawah. Nilai T = 5x + 4y yang dicapai x, y di titik P, adalah ….



A. 250
B. 256
C. 310
D. 320

5) Diketahui $8x + 5y \geq 40$
$x + 2y \geq 8$
$x \geq 0$; $y \geq 0$

Pasangan berurutan (titik) yang terdapat di antara alternatif jawab *bukan titik sudut* daerah pemecahan, yaitu ….

A. (8,0)
B. (0,8)
C. (5,0)
D. (3,3)

6) Diketahui $3x + 5y + 6z \leq 30$
$6x + 3y + 2z \leq 30$
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

Titik yang ada pada alternatif jawab terdapat dalam daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan, *kecuali* ….

A. (5, 0, 0)
B. (2, 4, 0)
C. (4, 0, 3)
D. (3, 2, 2)

7) Nilai maksimum T = 4x + 3y + 3z dalam batas
$3x + 5y + 6z \leq 30$
$6x + 3y + 2z \leq 30$
x, y, dan z non negatif adalah ….

A. 20
B. 22
C. 23,15
D. 24,29

8) Diketahui sistem pertidaksamaan
$x + y \geq 20$
$x + 3y \geq 30$
$3x + y \geq 30$
$x \geq 0$;$y \geq 0$
Titik yang tidak terdapat dalam daerah penyelesaian adalah ….
A. (30,0)
B. (15,5)
C. (5,15)
D. (0,20)

9) Perhatikan sistem persamaan
$x + 2y + z = 4$
$2x + y + 5z = 5$
Pemecahan yang bukan merupakan penyelesaian dasar adalah ….
A. (0, 1, 2)
B. (5, 0, -1)
C. (2, 1, 0)
D. $(0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

10) Perhatikan sistem pertidaksamaan
$x + 2y + 3z + 4u \leq 7$
$2x + y + 3z + 2u \leq 3$
Tambahkan ke ruas kiri tiap pertidaksamaan variabel non-negatif w dan t sehingga menjadi sistem persamaan. Kombinasi yang tersedia pada alternatif jawab adalah kombinasi *variabel non-basis* dari *pemecahan dasar*. Kombinasi yang menunjukkan sistem persamaan dengan variabel basis tidak *mempunyai penyelesaian*, adalah ….
A. x, y, w, t
B. x, z, w, t
C. y, u, w, t
D. z, u, w, t

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Model Matematika Masalah Program Linear

Program linear, kata benda dari pemrograman linear *(linear programming*), muncul dalam bidang penelitian operasional (*Operational research*), telah terbukti sebagai cara yang paling tepat untuk penyelesaian masalah tertentu. Ide ini pertama kali dikembangkan dalam bidang kemiliteran selama Perang Dunia Kedua, kemudian dikembangkan di dalam bidang pemerintahan, manajemen, komersial dan perdagangan, aplikasi dalam bidang industri, dan lainnya.

Persoalan pokok yang dihadapi, seperti inti bahasan dalam kegiatan belajar 3 ini adalah sejauh mana masalah itu diterjemahkan ke dalam model matematika sehingga dapat dianalisis dengan lebih saksama. Tentu saja upaya menerjemahkan masalah ke dalam model matematika tidak terlepas dari hakikat program linear sebagai suatu teknik perencanaan yang bersifat analisis memakai model matematika.

Untuk itu, diawali dengan memperhatikan contoh yang ditampilkan oleh Brian D. Bunday, sebagai berikut.

Contoh 1.16

Sebuah Firma memproduksi sendiri rak buku dalam dua model, yaitu A dan B. Produksi rak buku dibatasi oleh persediaan material (papan kualitas tinggi) dan waktu yang terbatas mesin pemroses. Tiap unit A memerlukan $3m^2$ papan dan tiap unit B memerlukan $4m^2$ papan. Firma memperoleh 1.700 m^2 papan tiap minggu dari pemasok sendiri. Tiap unit A membutuhkan waktu 12 menit dari mesin pemroses dan tiap unit B membutuhkan waktu 30 menit. Setiap minggu memungkinkan total waktu mesin 160 jam. Jika keuntungan (profit) tiap unit A sebesar \$2 dan tiap unit B sebesar \$4, berapa banyak unit dari tiap model akan di produksi tiap minggu!

Rumusan masalah yang ditampilkan oleh Brian diuraikan sebagai berikut.

1. Terdapat tujuan yang dicapai, yaitu mencapai keuntungan melalui produksi rak buku jenis A dan B di mana tiap jenis produksi itu telah direncanakan mempunyai harga (*nilai, konstanta, parameter*) tertentu.

Apabila banyaknya jenis rak buku A dan B disebut sebagai x_1 dan x_2 dengan harga tiap jenis/unit c_1 dan c_2 maka fungsi objektif (*tujuan*) tersebut ialah

$Z = c_1x_1 + c_2x_2$ Memaksimumkan (i)

x_1 dan x_2 adalah keluaran (*output*) perusahaan dan disebut variabel aktivitas. Fungsi tujuan di atas berbentuk *fungsi linear*, karena tersirat perbandingan (*proporsional*) jika terjadi pertambahan pada tiap unit keluaran akan terjadi perubahan menyebar dalam proporsi (*rasio*) yang sama c_1 terhadap tiap x_1 dan c_2 terhadap x_2 atau dalam rumusan yang lebih umum

$Z = c_j.x_j$ $j = 1,2, \ldots, n$

Jadi aspek penting masalah program linear jika fungsi tujuan bentuk fungsi linear, ada asumsi (atau anggapan) linearitas dan *proporsionalitas*.

2. Terdapat sumber daya atau masukan (*input*) yang berada dalam keadaan terbatas. Dalam hal ini, Firma mempunyai persediaan, melalui pemasok sendiri, yaitu tiap minggu 1700 m^2; dan waktu kerja mesin pemroses yang terbatas, yaitu tiap minggu 160 jam.
   a. Papan $\longrightarrow$ untuk tiap x_1 unit A diperlukan $3x_1$ m^2
   untuk tiap x_2 unit B diperlukan $4x_2$ m^2
   b. Jam Mesin $\longrightarrow$ untuk tiap x_1 unit A diperlukan 0,2 x_1 jam
   untuk tiap x_2 unit B diperlukan 0,5 x_2 jam

   Masukan (persediaan) yang terbatas itu proporsional dan ada keterkaitan dengan keluaran (variabel aktivitas) sehingga dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear, yaitu *pertidaksamaan linear*.
   Papan: $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$
   Jam Mesin: $0{,}2\,x_1 + 0{,}5\,x_2 \leq 160$

Pembatas (kendala) tersebut harus memenuhi syarat yang terkait dengan keluaran, yaitu non-negatif, $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Rumusan masalah yang direncanakan oleh Firma tersebut dan disajikan dalam bentuk rumusan kuantitatif menjadi *model matematika program linear* adalah

Fungsi tujuan $Z = 2x_1 + 4x_2$ Memaksimumkan
Pembatas (kendala) $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$
$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$
Syarat keterikatan keluaran $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$(atau ditulis singkat $x_1, x_2 \geq 0$)

Catatan:
1. Keluaran non-negatif berarti paling sedikit tidak memproduksi, yaitu $x_1 = 0$ atau $x_2 = 0$
2. Tanda pertidaksamaan kurang dari (lebih kecil dari) mengandung makna paling banyak papan yang tersedia 1700 m^2 habis terpakai dan jam kerja mesin tidak boleh lebih dari 160 jam/minggu.
3. Masukan (input) positif berarti papan dan mesin yang akan dipakai untuk memproses tersedia.

Rumusan masalah yang dihadapi Firma tersebut dan diklasifikasi sebagai suatu program linear, selain aspek linearitas dan proporsionalitas, terdapat pengertian mendasar, yaitu;
1. Kriteria optimal fungsi tujuan ditentukan oleh jumlah sesuai dengan harga masing-masing variabel (*aditivitas*).
2. Nilai variabel pengambilan keputusan dapat merupakan bilangan bulat atau kalau diperlukan dapat saja sebagai pecahan (*divisibilitas*) dan
3. Semua konstanta atau parameter (nilai c_j pada fungsi tujuan, b_j sebagai sumber dana atau masukan yang tersebar menjadi a_{ij} secara proporsional menunjang variabel aktivitas) tetap atau ditentukan secara pasti.

Selanjutnya, sebelum dirumuskan bentuk baku dan kanonik suatu program linear perhatikan contoh masalah sederhana tentang minimumkan fungsi tujuan (ditampilkan oleh Bunarso T, 1976).

Contoh 1.17

Seorang pedagang (pengusaha kecil) telah menerima dua jenis kembang gula dari seorang pengusaha. Dalam tiap jenis memuat *coklat*, *karamel* dan *gula* dengan perbandingan.

	Cokelat	Karamel	Gula
Jenis A (%)	20	20	60
Jenis B (%)	20	60	20

Kedua jenis ini dicampur dan kemudian dimasak lagi untuk dijadikan kembang gula lagi dengan label sendiri; dengan perhitungan kembang gula dengan label baru akan lebih laku jika memuat paling sedikit 4 kg cokelat, paling sedikit 6 kg karamel, dan paling sedikit 6 kg gula. Harga jenis A adalah \$10 per kg dan jenis B \$15 per kg. Berapa banyak dari tiap jenis harus dicampur supaya biaya serendah-rendahnya.

Terjemahan persoalan

Fungsi tujuan	$Z = 10\,x_1 + 15\,x_2$	Meminimumkan
Pembatas	$x_1 + x_2 \geq 20$	
	$x_1 + 3x_2 \geq 30$	
	$3x_1 + x_2 \geq 30$	
Syarat variabel	$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$	

Rumusan umum bentuk baku suatu program linear dapat dinyatakan sebagai berikut.
Carilah nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dapat menghasilkan berbagai kombinasi optimum (maksimum atau minimum)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Pembatas

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq \text{atau} \geq b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq \text{atau} \geq b_2\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq \text{atau} \geq b_k\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
&a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq \text{atau} \geq b_m
\end{aligned}$$

Syarat variabel $x_j \geq 0$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$
Dengan menggunakan notasi sigma

Fungsi tujuan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, untuk $j = 1,2, \ldots, n$

Syarat ikatan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq$ atau $\geq b_i$

Untuk $i = 1,2, \ldots, m$ dan $x_j \geq 0$

c_j = koefisien harga variabel pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan, atau parameter yang dijadikan kriteria optimasi.

x_j = variabel pengambilan keputusan yang harus dicari atau variabel aktivitas (keluaran atau output).

a_{ij} = konstanta variabel aktivitas ke-j dalam pembatasan (kendala) ke-i.

b_i = sumber daya yang terbatas atau konstanta (nilai sebelah kanan) dari pembatas ke-i, yang membatasi aktivitas berkaitan dengan usaha mengoptimalkan fungsi tujuan; b_i juga disebut sebagai masukan (input).

Z = nilai skalar yang berkaitan dengan kriteria pengambilan keputusan fungsi tujuan.

Dengan menggunakan notasi matriks-vektor, rumusan persoalan suatu program linear dapat disajikan sebagai berikut.

Maksimum (atau minimum) $z = c^T X_o$ (i)

di mana $x_o \geq 0$ (ii)

dan $A_o x_o \leq b$ (iii)

di mana $c^T = (c_1, c_2, \ldots. c_n)$, vektor baris 1 x n

$x_o = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vektor kolom n x 1

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, vektor kolom m x 1

dan $A_o = (a_{ij})$ adalah matriks dengan orde m x n

Indeks "o" pada x_o dan A_o menunjukkan matriks kolom dengan masukan (entri, unsur) variabel pokok dan matriks A yang berisikan koefisien variabel pokok sesuai dengan banyak pembatas.

Contoh 1.18

Fungsi tujuan $Z = 4x_1 + 3x_2$ Maksimum

Pembatas $3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$7x_1 + 2x_2 \leq 14$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

1. Variabel pokok (keluaran) x_1 dan x_2
2. Kalau di dalam ruas kiri pertidaksamaan pembatasan ditambah variabel penambah (slack), s_1 dan s_2 dengan syarat tetap non-negatif maka banyak variabel menjadi 4.

Rumusan persoalan Contoh 1.18 menjadi

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 0.s_1 + 0.s_2$$
$$3x_1 + 4x_2 + s_1 = 12$$
$$7x_1 + 2x_2 + s_2 = 14$$
x_1, x_2, s_1, s_2 non-negatif.

Pada prinsipnya setiap persoalan program linear dapat dipecahkan atau menghasilkan penyelesaian. Namun, tidak bisa dihindari akan terjadi 3 kategori yaitu (1) ada satu pemecahan yang menunjukkan fungsi tujuan mencapai optimal, (2) ada satu penyelesaian tak terikat, (3) tidak terdapat penyelesaian layak dari suatu persoalan yang dirumuskan ke dalam bentuk program linear. Tentang satu pemecahan optimal ternyata terdapat dua alternatif, yaitu: jawaban tunggal yang dicapai pada satu titik (untuk masalah dua atau tiga variabel pokok); dan nilai optimal dicapai oleh dua titik atau lebih dalam daerah penyelesaian .

Untuk memperlihatkan ketiga kategori di atas, perhatikan contoh berikut. Contoh untuk jawaban tunggal, kita memperhatikan persoalan pada contoh 1.18 di atas.

	$Z = 4x_1 + 3x_2$	Maks
Pembatas	$3x_1 + 4x_2 \leq 12$	
	$7x_1 + 2x_2 \leq 14$	
	$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$	

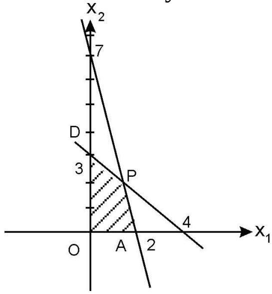
Pemecahan masalah dua variabel pokok merupakan penerapan cara pemecahan sistem pertidaksamaan linear (Kegiatan Belajar 2).

Lihat gambar di samping. Daerah arsiran adalah daerah layak.

$Z_1 = 8$ A(2,0)

$Z_2 = \frac{127}{11}$ $P(\frac{16}{11}, \frac{21}{11})$

$Z_3 = 9$ D(0,3)



Gambar 1.8

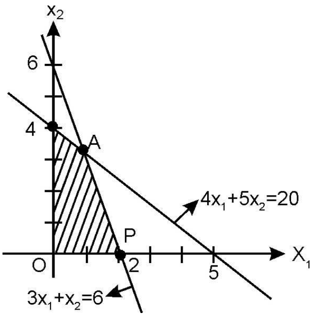
Jadi nilai maksimum Z dicapai pada titik sudut P dari poligon daerah layak OAPD.

Contoh 1.19:

Maksimum $Z = 6x_1 + 2x_2$

Pembatas non-negatif $4x_1 + 5x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 6$



Perhatikan gambar ternyata gradien garis $3x_1 + x_2 = 6$ sama dengan gradien $6x_1 + 2x_2 = 12$ dalam hal ini Z = 12 ; di titik A $\left(\frac{10}{11}, \frac{36}{11}\right)$ Z = 12; di titik P (2,0) dan untuk tiap titik pada ruas garis AP tetap Z = 12, inilah masalah penyelesaian yang berkaitan dengan penetapan koefisien harga pada fungsi tujuan. Di titik R(0,4) nilai Z = 8.

Gambar 1.9

Dengan demikian Contoh 1.9 adalah contoh penyelesaian optimum yang dicapai oleh dua titik atau lebih.

Contoh 1.20

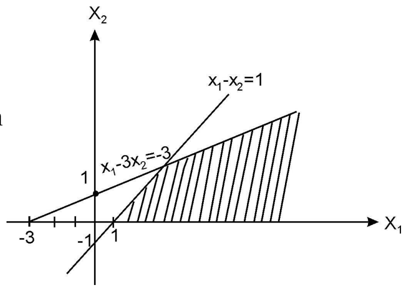
Penyelesaian tak terikat

Fungsi tujuan $Z = x_1 + x_2$ Maksimum

pembatas $x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 - 3x_2 \geq -3$

$x_1 \geq 0$; $x_2 > 0$



Gambar 1.10

Lihat Gambar 1.10 di atas, daerah arsiran menunjukkan kepada kita, terbuka peluang untuk terus mempertinggi nilai fungsi tujuan atau dalam perencanaan kita melihat adanya ketidakterikatan pemecahan. Bagaimana pendapat Anda tentang penetapan kriteria dan koefisien variabel aktivitas pada fungsi tujuan masalah Contoh 1.20? Silakan Anda memberi komentar. Dan apakah perlu kita hindari kondisi seperti ini dalam perencanaan? Bagaimana komentar Anda?

Contoh 1.21

Tidak terdapat penyelesaian

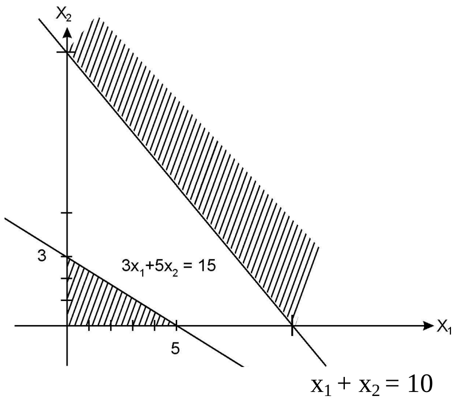
Minimumkan $Z = 2x_1 + 3x_2$

Subjek $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 10$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$

Lihat Gambar 1.11 di bawah, daerah yang ditunjukkan dengan dua pembatas, yang tidak saling menunjang. Kesimpulannya, tidak terdapat penyelesaian optimal.



Gambar 1.11

Bahasan tentang kategori suatu masalah program linear dilihat dari banyak pemecahan terlihat sederhana karena masalah yang sementara dibahas hanya terbatas dalam 2 variabel pokok. Bila banyak variabel pokok lebih dari dua maka kesimpulan seperti di atas relatif tidak sederhana, karena kita menghadapi matriks bujur sangkar n x n dengan n lebih dari 2, di mana menentukan det(A) = 0 merupakan tantangan bagi kita. Uraian lebih lanjut akan Anda temui dalam modul 3 dan modul 4, yaitu bahasan tentang metode simpleks dan penerapannya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Perusahaan Aneka mendapat jatah merakit sepeda dan sepeda motor. Karena jumlah pekerja terbatas, perusahaan hanya dapat merakit sepeda 120 unit tiap bulan dan sepeda motor paling sedikit 10 unit dan paling banyak 60 unit. Pendapatan dari tiap unit sepeda sebesar Rp40.000,00 dan tiap unit sepeda motor Rp268.000,00. Berapa pendapatan maksimum tiap bulan kalau kapasitas produksi kedua jenis 160 unit.
   a. Rumuskan fungsi tujuan!
   b. Rumuskan pembatas!
   c. Tanpa menghitung terlebih dahulu, perlihatkan daerah pemecahan yang ditunjukkan dengan pembatas dengan gambar!
   d. Kemungkinan titik manakah yang menunjukkan nilai maksimum fungsi tujuan. Berikan alasan!

2) Seorang penjahit mempunyai 60 m wol dan 40 m katun. Dengan yang tersedia itu, penjahit membuat setelan jas dan rok kepada beberapa orang pelanggan. Satu stel jas memerlukan 3 m wol dan 1 m katun, satu rok memerlukan 2 m wol dan 2 m katun. Berapa stel jas dan rok harus dibuat oleh penjahit kalau harga satu stel jas Rp120.000,00 dan harga satu stel rok (baju wanita) Rp75.000,00 untuk memperoleh pendapatan maksimum.
   a. Tentukan fungsi tujuan:
   b. Tentukan pertidaksamaan yang menunjukkan pembatas lengkap dengan syarat yang diperlukan!
   c. Gambarlah daerah pemecahan pertidaksamaan pembatas itu kemudian tentukan koordinat titik sudut poligon (atau segi banyak) pada pembatas itu!
   d. Hitunglah nilai maksimum fungsi tujuan!

3) Seorang tukang roti mempunyai bahan A, B dan C dengan banyak yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, tukang roti membuat dua macam roti sesuai dengan

pesanan langganan. Pembuat roti menetapkan keperluan bahan sebagai berikut.

Macam roti	bahan A	bahan B	bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

a. Rumuskan fungsi tujuan dan pembatas.
b. Harga roti I sebesar Rp350,00 dan ke II Rp800,00. Berapa banyak tiap macam harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh pembuat roti?
c. Jika roti macam I dijual dengan harga Rp450,00 dan macam II tetap Rp800,00. Apakah dia akan mengubah rencana semula? Kalau terjadi perubahan, berapa banyak roti dari tiap macam harus dibuat oleh pembeli roti itu. Berapa rupiah akan diterima kalau semua roti itu habis terjual?

4) Telitilah rumusan program linear berikut dengan bantuan gambar.

(i) $Z = 4x_1 + 3x_1$ Maks
$2x_1 + 3x_2 \leq 6$
$4x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(ii) $Z = 12x_1 + 2x_2$ Min
$x_1 - x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 7$
$6x_1 + x_2 \geq 12; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(iii) $Z = 2x_1 - 5x_2$ Maks
$7x_1 + 4x_2 \leq 28$
$x_1 - x_2 \geq 3$
$3x_1 + 8x_2 \geq 16$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(iv) $Z = 2x_1 + 5x_2$ Maks
$4x_1 - 3x_2 \geq -12$
$x_1 - 4x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

(v) $Z = 12x_1 + 5x_2$ Min
$-4x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1 - x_2 \geq 3$
$3x_1 - 4x_2 \geq 5$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

Rumusan

a. program linear dengan pemecahan tunggal adalah ....
b. optimal alternatif adalah ....
c. Tidak terdapat nilai optimal biarpun terdapat sistem persamaan pembatas konsisten, adalah ....
d. tanpa batas adalah ….
e. tidak ada daerah layak adalah ….
f. carilah nilai optimal dari jawaban Anda pada soal (a) dan (b).

Bilamana Anda mengalami kesulitan menjawab persoalan latihan di atas, baca petunjuk berikut ini. Tapi bilamana tidak ada kesulitan, silakan baca rangkuman dan kerjakan soal tes formatif 3.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Variabel aktivitas, keluaran adalah sepeda (x_1) dan sepeda motor (x_2); Fungsi tujuan $Z = 40.000\, x_1 + 268.000\, x_2$
Pembatas: $10 \le x_2 \le 60$
$0 \le x_1 \le 120$
$x_1 + x_2 \le 160$

Untuk mengetahui titik sudut dalam daerah hasil layak menunjukkan nilai maksimum Z, pertama-tama Anda menggambarkan daerah pemecahan sistem pertidaksamaan pembatas kemudian melihat titik terjauh dalam daerah pemecahan; substitusi nilai x_1 dan x_2 tiap titik sudut pembatas daerah layak hasil ke dalam fungsi Z dan Anda akan memperoleh nilai maksimum.

2) Variabel aktivitas x_1 adalah unit jas dan x_2 adalah unit rok (pakaian wanita);
Fungsi tujuan Z = $120.000\, x_1 + 75.000\, x_2$
Pembatas $3x_1 + 2x_2 \le 60$
$x_1 + 2x_2 \le 40$
$x_1 \ge 0 ; x_2 \ge 0$

Arsirlah daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan pembatas kemudian, substitusikan nilai x_1 dan x_2 tiap titik sudut pembatas daerah hasil layak ke dalam Z. Nilai tertinggi yang diperoleh adalah nilai maksimum Z; Kalau Anda memperoleh nilai x_1 dan x_2 yang menunjukkan nilai maksimum Z merupakan pecahan, bagaimana kesimpulan yang dapat Anda rumuskan.

3) Variabel aktivitas x_1 adalah roti macam I dan x_2 adalah roti macam II.
Fungsi tujuan $Z = 350\ x_1 + 800\ x_2$
Pembatas:
$$x_1 + 5x_2 \leq 150$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 90$$
$$2x_1 + x_2 \leq 150$$

Gambarlah daerah pemecahan sistem pertidaksamaan, kemudian cari nilai x_1 dan x_2 tiap titik sudut pembatas daerah pemecahan. Substitusikan (x_1, x_2) dari tiap titik sudut ke dalam $Z = 350x_1 + 800x_2$; Kalau terjadi kenaikan harga jual x_1 tentu akan memperoleh nilai Z yang lain silakan Anda rumuskan kesimpulan.

4) (i) daerah penyelesaian yang diperlihatkan oleh pertidaksamaan pembatas merupakan daerah yang konveks sehingga ada pemecahan tunggal; selain itu tidak terdapat parameter pada fungsi tujuan, tiap variabel aktivitas yang sebanding dengan koefisien (parameter) variabel terurut pada pembatas.
(ii) terdapat optimal alternatif; lihatlah $12x_1 + 2x_2 = k$ (dari fungsi tujuan) dan $6x_1 + x_2 = 12$ (salah satu pembatas); nilai x_1 dan x_2 tiap titik pada garis $6x_1 + x_2 = 12$ menunjukkan nilai Z yang sama termasuk nilai Z di titik sudut daerah hasil layak, baik pada sumbu x_1 maupun perpotongan antara kedua garis pembatas.
(iii) sistem persamaan konsisten dan hanya satu titik sebagai daerah pemecahan sehingga tidak ada nilai optimal sebab tidak ada pilihan.
(iv) pemecahan tanpa batas. Mengapa? Silakan Anda melengkapi.
(v) tidak terdapat daerah pemecahan yang memungkinkan kita memperoleh nilai optimal Z. Silakan Anda menggambar.

RANGKUMAN

Model matematika suatu program linear menunjukkan bentuk sajian data program linear dengan simbol (notasi lambang) matematika, yaitu (1) Fungsi tujuan $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sebagai fungsi linear dengan variabel aktivitas (keluaran) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (2) sumber daya yang terbatas di mana tiap pembatas secara proporsional menunjang tiap variabel aktivitas. Umumnya variabel aktivitas non-negatif.

Pembatas adalah suatu sistem pertidaksamaan linear

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq$ atau $\geq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq$ atau $\geq b_2$
$\ldots \quad + \ldots \quad + \ldots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq$ atau $\geq b_m$

Dengan notasi matriks/vektor rumusan di atas menjadi

$Z = c^T x_j$ maks (atau Min)
$x_o \geq 0$
$A_o x_o \leq$ atau $\geq b$

$c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; vektor baris 1 x n; $x_o = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor kolom n x 1; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektor kolom m x 1 dan $A_o = (a_{ij})$ matriks orde m x n dari koefisien x_i pada pembatas.

Rumusan pembatas di atas menunjukkan bahwa terdapat kombinasi tanda "$\leq$" atau "$\geq$ " dalam satu sistem pertidaksamaan sebagai pembatas. Rumusan resmi (kanonik) suatu masalah program linear adalah sebagai berikut.

1. Masalah memaksimumkan

   Fungsi tujuan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$

   Pembatas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

   Untuk i = 1, 2, …, m ; xj > 0
2. Masalah meminimumkan

   Fungsi tujuan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$

   Pembatas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \; ; x_j \geq 0 \; ; i = 1, 2, \ldots\ldots, m$

Tanda pertidaksamaan yang sama dalam rumusan suatu program linear dalam bentuk kanonik akan membantu kita untuk menyusun program dual dari masalah primal yang sudah ditetapkan lebih dahulu (akan dibahas pada Modul 5).

Memperhatikan daerah hasil layak yang kita gambar dan juga penerapan pengertian rank matriks koefisien dan rank matriks yang diperbesar dari suatu sistem persamaan (dalam hal ini pembatas dan fungsi tujuan) maka suatu masalah program linear (1) mempunyai pemecahan optimal tunggal, (2) optimal alternatif, (3) optimal tanpa batas, dan (4) tidak terdapat nilai Z optimal yang mungkin berdampak kurang tepat dalam penetapan sebaran yang proporsional dari tiap pembatas (persediaan) untuk menunjang tiap variabel aktivitas.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk nomor 1 sampai dengan 3!

Seorang pengusaha penitipan (parkir) kendaraan (roda 4 atau lebih) menyediakan ruangan seluas 600 m^2. Tiap mobil jenis sedan/minibus memerlukan 6 m^2 dan tiap mobil jenis bus memerlukan 30 m^2. Supaya tersedia biaya untuk pemeliharaan bangunan, pengusaha itu menetapkan kepada pelanggan bahwa tidak menampung lebih dari 60 kendaraan sekaligus. Kepada pelanggan dikenakan biaya penitipan (tiap malam), Rp1.250,00 untuk tiap mobil jenis sedan dan Rp3.750,00 untuk tiap bus.

Berapa banyak kendaraan dari tiap jenis harus ditampung supaya pendapatan yang diperoleh maksimal.

1) Kalau variabel aktivitas x_1 untuk sedan dan x_2 untuk bus maka pembatas dengan syarat non-negatif adalah ….
   A. $x_1 + 5x_2 \leq 100$
      $x_1 + x_2 \leq 60$
   B. $5x_1 + x_2 \leq 60$
      $x_1 + x_2 \leq 100$
   C. $x_1 + x_2 \leq 60$
      $5x_1 + x_2 \leq 100$
   D. $x_1 + x_2 \leq 100$
      $x_1 + 5x_2 \leq 60$

2) Pasangan berurutan (x_1, x_2) yang terdapat dalam daerah hasil layak pemecahan sistem pertidaksamaan pembatas adalah alternatif yang terjual, *kecuali* ….
   A. (60,0)
   B. (10,50)
   C. (0,20)
   D. (50,10)

3) Nilai maksimum fungsi tujuan adalah ….
   A. Rp100.000,00
   B. Rp200.000,00
   C. Rp225.000,00
   D. Rp272.500,00

Untuk nomor 4 dan 5.
Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persediaan. Harga sepeda biasa Rp60.000,00/buah dan sepeda balap Rp80.000,00/buah. Ia merencanakan untuk tidak mengeluarkan lebih dari Rp1.680.000,00 dengan mengharapkan keuntungan Rp10.000,00 dari tiap sepeda biasa dan Rp12.000,00 dari tiap sepeda balap.

4) Kalau variabel x_1 = banyak sepeda balap; x_2 = banyak sepeda biasa maka fungsi tujuan adalah ….
   A. $Z = 10.000\ x_1 + 12.000\ x_2$
   B. $Z = 60.000\ x_1 + 80.000\ x_2$
   C. $Z = 12.000\ x_1 + 10.000\ x_2$
   D. $Z = 80.000\ x_1 + 60.000\ x_2$

5) Pembatas dengan syarat x_1 dan x_2 non-negatif adalah ….
   A. $x_1 + x_2 \leq 25$
      $6x_1 + 8x_2 \leq 168$
   B. $x_1 + x_2 \leq 25$
      $10x_1 + 12x_2 \leq 1680$
   C. $x_1 + x_2 \leq 25$
      $8x_1 + 6x_2 \leq 168$
   D. $x_1 + x_2 \leq 25$
      $12x_1 + 10x_2 \leq 1680$

Untuk nomor 6 sampai dengan 8.
Seorang pengusaha di bidang tempat kos/sewa rumah merencanakan membangun untuk disewakan kepada 540 orang pelajar/mahasiswa. Supaya tersedia tanah untuk sarana olahraga, pengusaha menetapkan untuk membangun tidak lebih dari 120 rumah yang terbesar menjadi dua tipe. Tipe I (untuk 4 orang) disewakan Rp90.000,00 sebulan tiap rumah, dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp107.000,00. Variabel aktivitas x_1 untuk rumah tipe I dan x_2 untuk rumah tipe II.

6) Pembatas adalah
   A. $x_1 + x_2 \leq 120$
      $2x_1 + 3x_2 \leq 270$
   B. $x_1 + x_2 \leq 540$
      $2x_1 + 3x_2 \leq 120$
   C. $x_1 + x_2 \leq 120$
      $3x_1 + 2x_2 \leq 270$
   D. $x_1 + x_2 \leq 540$
      $3x_1 + 2x_2 \leq 270$

7) Pasangan berurutan (x_1, x_2) yang merupakan titik sudut daerah pemecahan pembatas persoalan itu adalah alternatif yang tersedia, *kecuali* ….
   A. (120,0)
   B. (115,15)
   C. (90,30)
   D. (100,20)

8) Nilai terbesar fungsi tujuan Z adalah ….
   A. 10.800.000
   B. 10.885.000
   C. 11.310.000
   D. 11.140.000

9) Perhatikan $Z = 6x_1 + 2x_2$ Maks
   $4x_1 + 5x_2 \leq 20$
   $3x_1 + x_2 \leq 6$
   $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

   Optimal ganda Z dicapai di titik ….
   A. (0,12)
   B. (5,0)

C. (2,0)
D. (0,4)

10) Titik yang terdapat dalam daerah pemecahan sistem pertidaksamaan yang merupakan pembatas program linear
$Z = 2x_1 + 6x_2$ Maks
$7x_1 + 4x_2 \leq 28$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$5x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$
adalah ….
A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
B. (2, 0)
C. $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
D. (0, 2)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C Terdapat satu matriks 2 x 2 partisi matriks A_b dan determinan matriks itu tidak sama dengan nol.
2) C Ada determinan matriks 3 x 3 yang tidak sama dengan nol.
3) B Banyak maksimum penyelesaian ialah 10 namun terdapat satu sistem persamaan yang tidak konsisten sehingga hanya ada 9 penyelesaian dasar.
4) C Untuk $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 3$.
5) B Substitusikan nilai x yang diperoleh ke dalam persamaan 1 dan 2, kemudian perhatikan hubungan yang nampak dari persamaan.
6) D Nilai det (A) = - 6 $\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -8 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
7) A $M_{43} = -144$
8) B Cari minor tiap unsur matriks A ingat.
   $K_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$
9) B det (A) = -1, cari matriks kofaktor dan adjoint.

   $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{\det(A)}$; Adj(A) adalah transpos matriks Kofaktor.
10) D Semua sistem persamaan konsisten.

Tes Formatif 2

1) B Persamaan garis $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ adalah 2x + y = 80 dan 6x + 11y = 480.
2) A Dengan bantuan grafik garis dan arsiran daerah hasil layak ternyata (50,0) pada garis 2x + 5y = 100 tetapi di luar daerah pemecahan sistem pertidaksamaan.
3) C Di antara titik sudut dalam daerah hasil layak, P(25,30) memberi hasil T = 140.
4) C P(30,40) memberi hasil T = 310.
5) D Titik yang bukan titik sudut dalam daerah pemecahan akan terlihat setelah menggambar garis 8x + 5y = 40 dan x + 2y = 8 dan arsir daerah hasil layak.
6) D Gambar bidang I melalui (10,0,0); (0,6,0) dan (0,0,5) Gambar bidang II melalui (5,0,0); (0,10,0) dan (0,0,15), dan arsir, akan diketahui titik dalam daerah hasil layak.

7) D Analog dengan cara pada nomor 6 dan substitusi koordinat titik dalam daerah hasil ke $T = 4x + 3y + 3z$.
8) D Proses kerja seperti soal nomor 5.
9) A Ingat pemecahan dasar; bila non-basis x maka y dan z diperoleh dari pemecahan sistem $2y + z = 4$ & $y + 5z = 5$.
10) B Ternyata entri pada matriks kolom variabel y dan z sebanding sehingga det $(A_k) = 0$.

Tes Formatif 3

1) A Luas ruangan 600 m^2 dan tidak lebih dari 60 kendaraan sehingga pembatas $6x_1 + 30x_2 \leq 600$ & $x_1 + x_2 \leq 60$.
2) B Substitusi (10, 50) ternyata tidak memenuhi.
3) A Rp37.500,00 + Rp62.500,00 = Rp100.000,00.
4) C x_1 adalah sepeda balap dan x_2 sepeda biasa sehingga $T = 12.000\, x_1 + 10.000\, x_2$.
5) C Ingat x_1 untuk banyak sepeda balap dan x_2 untuk banyak sepeda biasa jangan sampai tertukar waktu menuliskan pembatas.
6) A Ingat rumah tipe I untuk 4 orang dan tipe II untuk 6 orang (urutan x_1 dan x_2 diperhatikan).
7) B Substitusilah (x_1, x_2) dari tiap titik ke dalam sistem pertidaksamaan.
8) C Rp8.100.000,00 + Rp3.210.000,00 = Rp11.310.000,00.
9) C Optimal ganda bila substitusi tiap titik pada garis pembatas $3x_1 + 2x_2 = 6$ ke dalam $Z = 6x_1 + 2x_2$; ternyata yang memenuhi adalah (2,0).
10) A $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ada dalam daerah hasil layak; kalau kita substitusi ke dalam sistem pertidaksamaan maka titik tersebut memenuhi atau kalau digambar daerah hasil layak akan lebih jelas titik mana di antara 4 alternatif yang memenuhi.

Daftar Pustaka

____________. (1979). *Matematika 9 untuk SMA*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan RI.

Bazaraa S Mokhtar. (1977). *Linear Programming and Network Flows*. New York-Toronto-London- Sidney: John Wiley & Sons.

Bunarso T. (1976). *Program Linear (diktat Terbatas),* Bandung: Jurusan Matematika, IKIP Bandung.

Bunday D Brian. (1984). *Basic Linear Programming*. Baltimore: Arnold.

Howard Anton, (Pantur Silaban). (1984). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Nasendi B & A. Affendi. (1985). *Program Linear*. Jakarta: Gramedia.

Siagian P. (1987). *Penelitian Operasional*. Jakarta: UI-PRESS.

Supranto J. (1984). *Pengantar Matriks*. Jakarta: LPFE-UI.

Supranto J. (1984). *Linear Programming*. Jakarta: LPFE-UNI.

Wainright Martin E. (1969). *Linear Programming*. USA: Richard D Irvin.

Walsh G.R. (1985). *Linear Programming*. New York - Brisbane - Toronto Singapore: John Willey & Sons.