

Induksi Matematik dan Teorema Binomial

Sukirman



PENDAHULUAN

Induksi matematik merupakan salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam Teori Bilangan maupun dalam mata kuliah matematika lainnya. Sedangkan Teorema Binomial, selain sebagai dasar, banyak digunakan dalam penurunan beberapa teorema dan pemecahan masalah dalam matematika.

Oleh karena itu, dalam mempelajari mata kuliah ini Anda diharapkan dapat menerapkan induksi matematik dan teorema binomial dalam pembuktian dan dalam pemecahan soal-soal matematika. Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menentukan langkah-langkah yang harus ditempuh dalam pembuktian dengan induksi matematik;
2. menentukan basis induksi dalam pembuktiannya;
3. menentukan langkah induksi dalam pembuktiannya;
4. terampil menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematik;
5. menghitung koefisien binomial;
6. menentukan sifat-sifat koefisien binomial;
7. menerapkan sifat-sifat koefisien binomial dalam pemecahan masalah terkait.

Penguasaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematika karena banyak mata kuliah matematika yang menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk menurunkan teorema atau untuk pemecahan masalah. Hampir setiap modul berikutnya.

nanti menggunakan dua prinsip tersebut, baik untuk membuktikan teorema maupun untuk memecahkan soal-soalnya.

Untuk membantu Anda dalam menguasai kemampuan tersebut, dalam modul ini disajikan uraian materi dan contoh-contohnya, latihan memecahkan soal dan tes pada tiap kegiatan belajar. Modul ini terdiri dari 2 kegiatan belajar, yaitu sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1 : Induksi Matematik.

Kegiatan Belajar 2 : Teorema Binomial.

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajari modul ini, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah dengan cermat Pendahuluan ini sehingga Anda memahami gambaran secara global isi modul, untuk apa dipelajari, dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah dengan saksama uraian materi dan contoh-contohnya jika perlu carilah contoh lain. Berilah tanda-tanda pada bagian-bagian yang Anda anggap penting.
3. Kunci utama agar berhasil dalam belajar matematika adalah kesanggupan untuk berlatih memecahkan soal-soal. Oleh karena itu, kerjakanlah soal-soal latihan baik secara individual, dalam kelompok kecil atau dalam tutorial, untuk pemantapan.

KEGIATAN BELAJAR 1

Induksi Matematik

Induksi Matematik merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli. Perhatikan contoh pernyataan-pernyataan matematik berikut ini.

Contoh 1:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1), \text{ untuk setiap bilangan asli } n.$$

Benarkah pernyataan ini? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat mencoba dengan mensubstitusikan n dalam pernyataan itu dengan sembarang bilangan asli.

Apabila $n = 1$ maka pernyataan itu menjadi $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1 + 1)$, atau $1 = 1$, yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar.

Apabila $n = 2$ maka pernyataan itu menjadi $1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2(2 + 1)$, atau $3 = 3$, yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar.

Apabila $n = 3$ maka pernyataan itu menjadi

$$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3(3 + 1), \text{ atau } 6 = 6, \text{ yaitu}$$

suatu pernyataan yang benar pula.

Anda dapat melanjutkannya untuk $n = 4$; 5 ; atau bilangan asli lainnya dan akan selalu memperoleh pernyataan yang bernilai benar. Apakah dengan memberikan beberapa contoh dengan substitusi n pada pernyataan semula dan diperoleh pernyataan-pernyataan yang benar, sudah memberikan bukti tentang kebenaran pernyataan tersebut? Dalam matematika, pemberian beberapa contoh seperti itu bukan merupakan bukti dari kebenaran suatu pernyataan yang berlaku dalam himpunan semestanya. Pernyataan pada contoh di atas, himpunan semestanya ialah himpunan semua bilangan asli. Apabila kita dapat memberikan contoh untuk tiap bilangan asli n pada

pernyataan tersebut dan masing-masing memperoleh pernyataan yang benar maka hal tersebut dapat merupakan bukti kebenaran dari pernyataan itu. Akan tetapi, hal ini tidak efisien dan tidak mungkin kita lakukan karena banyaknya himpunan bilangan asli ada tak berhingga.

Lalu bagaimana cara membuktikan pernyataan tersebut? Salah satu caranya ialah memandang ruas pertama dari pernyataan itu sebagai deret aritmetika dengan suku pertama $a = 1$, bedanya $b = 1$, suku terakhirnya ialah $U_n = n$ dan memiliki n buah suku. Maka, jumlah deret itu adalah

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n (a + U_n) \\ &= \frac{1}{2} n (1 + n) \\ &= \frac{1}{2} n (n + 1), \text{ yaitu ruas kedua dari pernyataan yang} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{dibuktikan.} \end{aligned}$$

Cara lain untuk membuktikan pernyataan itu adalah dengan induksi matematik. Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematik adalah sebagai berikut.

Misalkan, $p(n)$ adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n . Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematik sebagai berikut:

Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar.

Jika langkah-langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan kebenarannya maka selanjutnya disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n . Mengapa demikian? Langkah (1), yaitu $p(1)$ benar, dan karena langkah (2) maka $p(2)$ benar pula. Selanjutnya karena $p(2)$ benar, menurut langkah (2) maka $p(3)$ benar pula. Dan menurut langkah (2) lagi maka $p(4)$ benar pula, dan seterusnya sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n . Langkah (1) di atas sering disebut **basis (dasar) induksi**, dan langkah (2) disebut **langkah induksi**.

Kita sekarang akan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematik itu untuk membuktikan pernyataan pada Contoh 1 di atas.

Contoh 2:

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$, untuk setiap bilangan asli n .

Bukti:

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

(1) $p(1)$ adalah $1 = \frac{1}{2} 1 (1 + 1)$, yaitu $1 = 1$, jelas benar.

(2) Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2} k (k + 1) \text{ benar.}$$

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{1}{2} (k + 1)(k + 2)$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) \\ &= \frac{1}{2} k (k + 1) + (k + 1) \quad (\text{karena diasumsikan}) \\ &= (k + 1) \left(\frac{1}{2} k + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Jadi, $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{1}{2} (k + 1)(k + 2)$, berarti $p(k+1)$ benar.

Sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Jika kedua ruas pada contoh 2 tersebut dikalikan 2 maka diperoleh:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

Coba buktikan dengan menggunakan induksi matematik bahwa pernyataan ini benar untuk setiap bilangan asli n .

Contoh 3:

Hitunglah $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Jawab:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ sebagai deret aritmetika dengan suku pertama $a = 1$, beda $b = 2$ dan banyaknya suku adalah n serta suku terakhirnya $U_n = (2n - 1)$. Maka, jumlahan tersebut dapat dihitung dengan rumus jumlahan deret aritmetika, yaitu:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(1 + 2n - 1) = n^2$$

$$\text{Jadi } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Akan tetapi, apabila kita lupa atau belum mengerti rumus deret tersebut maka hal tersebut tidak dapat kita lakukan. Kita dapat membuat dugaan dengan mencoba jumlah beberapa suku sebagai berikut

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

dan seterusnya.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = ?$$

Tampak bahwa jumlahan-jumlahan ini merupakan bilangan kuadrat sempurna. Sehingga kita bisa menduga bahwa:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Akan tetapi, dugaan ini baru merupakan jawaban sementara sehingga harus dibuktikan kebenarannya. Pembuktiannya dapat dilakukan dengan induksi matematik sebagai berikut.

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(1) $p(1)$ adalah $1 = 1^2$, jelas benar.

(2) Dimisalkan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$, dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Sehingga $p(k + 1)$ benar.

Jadi, $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Contoh 4:

Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bukti:

Misalkan, $p(n)$ adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) $p(1)$ adalah $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

$$1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3$$

$$1 = 1$$

Jadi, $p(1)$ benar.

(2) Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

Dan harus ditunjukkan bahwa

$p(k + 1)$ benar, yaitu ditunjukkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3).$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
 &= (k+1) \left\{ \frac{1}{6}k(2k+1) + (k+1) \right\} \\
 &= (k+1) \left\{ \frac{1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \right\} \\
 &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
 &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).
 \end{aligned}$$

Jadi, $p(k+1)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah-langkah (1) dan (2) disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Notasi Σ (sigma)

Jumlahan untuk bilangan-bilangan yang teratur dapat ditulis lebih singkat dengan menggunakan notasi Σ (sigma). Berikut ini konsep, prinsip dan contoh-contoh penggunaan notasi Σ .

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n k(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n ck = c \sum_{k=1}^n k \text{ dengan suatu konstanta}$$

$$(4) \quad \sum_{l=1}^n a_l + \sum_{l=1}^n b_l = \sum_{l=1}^n (a_l + b_l)$$

$$(5) \quad \sum_{l=1}^n d = d + d + d + \dots + d = nd$$

|---- n suku ----|

Contoh 5:

$$(1) \sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$(2) \sum_{i=1}^7 6i = 6 \sum_{i=1}^7 i = 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 168$$

$$(3) \sum_{t=1}^6 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$$

$$(4) \sum_{k=1}^3 3k + 2^k = 3 \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 2^k = 3(1 + 2 + 3) + (2^1 + 2^2 + 2^3) = 32$$

Contoh 6:

Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$ untuk setiap bilangan asli n .

Bukti:

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $\sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$

$$(1) p(1) \text{ adalah } \sum_{k=1}^1 (3.k - 2) = \frac{1}{2}(3.1^2 - 1)$$

$$3.1 - 2 = \frac{1}{2}(3.1^2 - 1)$$

$$1 = 1$$

Jadi, $p(1)$ benar.

(2) Diasumsikan $p(t)$ benar untuk suatu bilangan asli t , yaitu:

$\sum_{k=1}^t (3k - 2) = \frac{1}{2}(3t^2 - t)$ dan ditunjukkan bahwa $p(t+1)$ benar, yaitu:

$$\sum_{k=1}^{t+1} (3k - 2) = \frac{1}{2} \{3(t+1)^2 - (t+1)\} = \frac{1}{2}(3t^2 + 5t + 2)$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{t+1} (3k-2) &= \sum_{k=1}^t (3k-2) + 3(t+1) - 2 \\
 &= \frac{1}{2} (3t^2 - t) + 3t + 1 \\
 &= \frac{1}{2} (3t^2 - t + 6t + 2) \\
 &= \frac{1}{2} (3t^2 + 5t + 2)
 \end{aligned}$$

Jadi, $p(t+1)$ benar sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Contoh 6 ini dapat dibuktikan menggunakan sifat-sifat notasi Σ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (3k-2) &= \sum_{k=1}^n 3k - \sum_{k=1}^n 2 \\
 &= 3 \sum_{k=1}^n k - 2n, \text{ menggunakan contoh 2, maka} \\
 &= 3 \left(\frac{1}{2} n(n+1) \right) - 2n \\
 &= \frac{1}{2} (3n^2 + 3n - 4n) \\
 &= \frac{1}{2} (3n^2 - n)
 \end{aligned}$$

Ingat Contoh 2 bahwa $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

Contoh 7:

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n , $7^n - 2^n$ selalu terbagi habis oleh 5.

Bukti:

Misalkan $p(n)$ menyatakan $7^n - 2^n$ terbagi habis oleh 5,

(1) $p(1)$ adalah $7^1 - 2^1$ terbagi habis oleh 5, yaitu 5 terbagi habis oleh 5.

Jadi, $p(1)$ benar.

(2) Diasumsikan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu $7^k - 2^k$ terbagi habis oleh 5. Dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu $7^{k+1} - 2^{k+1}$ terbagi habis oleh 5. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7^k \cdot 7 - 2^k \cdot 2 \\
&= 7^k \cdot 7 - 2^k \cdot 7 + 2^k \cdot 7 - 2^k \cdot 2 \\
&= 7(7^k - 2^k) + 2^k(7 - 2) \\
&= 7(7^k - 2^k) + 2^k \cdot 5
\end{aligned}$$

Telah diasumsikan bahwa $(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5. Maka $7(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5 pula. $(2^k \cdot 5)$ jelas terbagi habis oleh 5, sebab mempunyai faktor 5. Sehingga $7(7^k - 2^k) + 2^k \cdot 5$ terbagi habis oleh 5. Jadi $7^{k+1} - 2^{k+1}$ terbagi habis oleh 5. Maka $p(k + 1)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah-langkah (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $7^n - 2^n$ terbagi habis oleh 5 untuk setiap bilangan asli n .

Contoh 8:

Misalkan, banyaknya elemen himpunan S_n adalah n (suatu bilangan asli). Berapakah banyaknya semua himpunan bagian dari S_n .

Jawab:

Misalkan $S_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Jika $S_1 = \{a_1\}$ maka himpunan bagian dari S_1 adalah \emptyset dan $\{a_1\}$. Sehingga banyaknya himpunan bagian dari S_1 adalah 2. Coba periksalah banyaknya himpunan bagian dari himpunan-himpunan berikut ini! Banyaknya himpunan bagian dari $S_2 = \{a_1, a_2\}$ adalah 4. Banyaknya himpunan bagian dari $S_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ adalah 8. Banyaknya himpunan bagian dari $S_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah 16 dan seterusnya. Untuk melihat hal ini dengan lebih jelas perhatikan tabel 1.

Table 1.1

Banyaknya elemen S_n	Himpunan S_n	Himpunan bagian dari S	Banyak himpunan bagian dari S_n
0	\emptyset	\emptyset	$1 = 2^0$
1	$\{a_1\}$	$\emptyset, \{a_1\}$	$2 = 2^1$
2	$\{a_1, a_2\}$	$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$	$4 = 2^2$
3	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$	$8 = 2^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$...	2^n

Tampak dalam kolom terakhir dari Tabel 1.1 tersebut bahwa banyaknya himpunan bagian tersebut merupakan perpangkatan dari 2. Sehingga kita dapat menduga bahwa banyaknya himpunan bagian dari $S_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ adalah 2^n . Akan tetapi, dugaan ini harus dibuktikan kebenarannya. Akan kita buktikan dengan induksi matematik.

Misalkan, $p(n)$ menyatakan "banyaknya himpunan bagian dari $S_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ adalah 2^n untuk setiap bilangan asli n ".

- (1) $p(1)$ adalah banyaknya himpunan bagian dari $S_1 = \{a_1\}$ adalah 2^1 . Hal ini benar, sebab himpunan bagian dari S_1 adalah \emptyset dan $\{a_1\}$. Jadi, $p(1)$ benar.
- (2) Diasumsikan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu banyaknya himpunan bagian dari $S_k = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ adalah 2^k dan harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu banyaknya himpunan bagian dari $S_{k+1} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ adalah 2^{k+1} .

Telah diasumsikan bahwa banyaknya himpunan bagian dari S_k adalah 2^k . Maka, banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} adalah banyaknya himpunan bagian dari S_k ditambah dengan banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} yang bukan merupakan himpunan bagian dari S_k , yaitu himpunan-himpunan bagian dari S_k yang masing-masing dilengkapi dengan elemen a_{k+1} , yaitu sebanyak 2^k pula. Jadi banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} adalah $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Sehingga $p(k+1)$ benar. Selanjutnya, dari langkah-langkah (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Perhatikan lagi contoh-contoh di atas. Pembuktian dengan induksi matematik harus mengikuti dua langkah, yaitu langkah (1) sebagai basis (dasar) induksi, dan langkah (2) merupakan langkah induksi. Kedua langkah ini harus ditaati, apabila menggunakan cara pembuktian dengan induksi matematik.

Kadang-kadang basis/dasar induksi tidak diambil $n = 1$, tetapi diambil $n = r$ untuk $r > 1$, sesuai dengan permasalahan yang dihadapi. Untuk ini perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 9:

Buktikan bahwa $n^2 \leq 2^n$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Bukti:

Misalkan $p(n)$ adalah $n^2 \leq 2^n$.

- (1) $p(4)$ adalah $4^2 \leq 2^4$ maka $p(4)$ benar
- (2) Misalkan, $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k \geq 4$, yaitu $k^2 \leq 2^k$, dan harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 2k^2 \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Jadi, $p(k+1)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah-langkah (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $n^2 \leq 2^n$ benar, untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $4+10+16+\dots+(6n-2) = n(3n+1)$.
- 2) Buktikanlah $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ untuk setiap bilangan asli n .
- 3) Buktikan $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ untuk setiap bilangan asli n .
- 4) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

5) Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

6) Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

7) Buktikan bahwa

- a) $n^2 > n + 1$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$.
- b) $2^n > n^3$, untuk setiap bilangan bulat $n > 9$.

8) Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

- a) $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7
- b) $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3

Petunjuk Jawaban Latihan

Apabila Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal-soal latihan tersebut, Anda dapat mengikuti petunjuk/rambu-rambu penyelesaiannya berikut ini.

1) Misalkan $p(n)$ adalah $4 + 10 + 16 + \dots + (6n-2) = n(3n+1)$.

(1) $p(1)$ adalah $4 = 1(3 \cdot 1 + 1)$.

Jadi $p(1)$ jelas benar.

(2) Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu $4 + 10 + 16 + \dots + (6k-2) = k(3k+1)$. Dan harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu:

$$4 + 10 + 16 + \dots + (6k-2) + (6k+4) = (k+1)(3k+4).$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 4 + 10 + 16 + \dots + (6k-2) + (6k+4) &= k(3k+1) + (6k+4) \\ &= 3k^2 + 7k + 4 \\ &= (k+1)(3k+4). \end{aligned}$$

Jadi, $p(k+1)$ benar.

Dari langkah-langkah (1) dan (2) disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

2) Misalkan, kesamaan tersebut dengan $p(n)$, yaitu:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(1) Periksalah bahwa $p(1)$ benar.

(2) Asumsikanlah bahwa untuk suatu bilangan asli n , $p(n)$ benar, yaitu:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Dan tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Jadi, $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n .

Selanjutnya dari langkah-langkah (1) dan (2) disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

PERHATIAN: Pada contoh-contoh dalam uraian materi menggunakan simbol k untuk menyatakan suatu bilangan asli tertentu. Pada penyelesaian ini digunakan simbol n . Anda dapat menggunakan simbol lainnya, untuk menunjuk suatu bilangan asli tertentu.

3) Misalkanlah kesamaan itu dengan $p(n)$, yaitu:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

(1) Periksalah bahwa $p(1)$ benar.

(2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar, untuk suatu bilangan asli n , yaitu:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

Tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 8n + 3)$$

Tunjukkanlah kebenaran kesamaan ini, yaitu bahwa $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n . Selanjutnya, tariklah kesimpulan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

4) Misalkanlah kesamaan tersebut dengan $p(n)$, yaitu:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(1) Periksalah bahwa $p(1)$ benar

(2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli n ,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Selanjutnya tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Ini telah menunjukkan bahwa $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n . Selanjutnya, dari dua langkah tersebut disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

5) Misalkanlah kesamaan itu dengan $p(n)$, yaitu:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

(1) Tunjukkanlah bahwa $p(1)$ benar.

(2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar, yaitu:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Cobalah membuktikan kebenaran kesamaan terakhir ini. Selanjutnya, berdasarkan dua langkah tersebut, Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

6) Kita akan membuktikan bahwa $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$. Pada contoh 1, kita

telah mengenal bahwa $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$

Sehingga kita harus menunjukkan bahwa

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

Misalkan kesamaan terakhir ini dengan $p(n)$.

- (1) Tunjukkanlah bahwa $p(1)$ benar.
- (2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli n , dan tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} (n + 1)^2 (n + 2)^2$$

Kesamaan terakhir ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{1}{4} (n + 1)^2 (n^2 + 4(n + 1)) \\ &= \frac{1}{4} (n + 1)^2 (n + 2)^2 \end{aligned}$$

Hal ini kita telah menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar untuk suatu bilangan asli n . Selanjutnya, Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n , berdasarkan dua langkah di atas.

7) a) Kita harus membuktikan bahwa $n^2 > n + 1$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ maka sebagai dasar induksi adalah $n = 2$. Misalkan, ketaksamaan ini dengan $p(n)$.

- (1) Tunjukkanlah bahwa $p(2)$ benar.
- (2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan ash $n \geq 2$, dan Anda harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu:

$$(n + 1)^2 > n + 2$$

Coba tunjukkanlah ketaksamaan terakhir ini! Sehingga $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli $n \geq 2$. Selanjutnya, berdasarkan dua langkah induksi tersebut dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

- 7) b) Kita harus membuktikan bahwa $2^n > n^3$, untuk setiap bilangan bulat $n > 9$ maka sebagai basis induksi adalah $n = 10$. Misalkan, ketaksamaan ini dengan $p(n)$.

(1) Tunjukkanlah kebenaran dari $p(10)$.

(2) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan ash $n > 9$, dan tunjukkanlah bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu:

$$2^{n+1} > (n + 1)^3$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > \left(1 + \frac{1}{9}\right)^3 \cdot 2^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^3 > (n+1)^3$$

Jadi, $p(n+1)$ benar

Selanjutnya berdasarkan dua langkah tersebut dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n > 9$.

- 8) a) Kita akan membuktikan bahwa untuk setiap bilangan ash n berlaku $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7.

Dimisalkan bahwa $p(n)$ menyatakan $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7.

(1) Tunjukkanlah bahwa $p(1)$ benar.

(2) Asumsikanlah bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k , yaitu $11^k - 4^k$ terbagi habis oleh 7.

Dan kita harus menunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar, yaitu:

$$11^{k+1} - 4^{k+1} \text{ terbagi habis oleh 7.}$$

Kebenaran pernyataan ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 4^{k+1} &= 11^k \cdot 11 - 4^k \cdot 4 \\ &= 11^k \cdot 11 - 11^k \cdot 4 + 11^k \cdot 4 - 4^k \cdot 4 \\ &= 11^k \cdot 7 + 4(11^k - 4^k) \end{aligned}$$

Pada kesamaan terakhir ini, berilah alasan bahwa $p(k + 1)$ benar. Sehingga Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

- b) Kita akan membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3

Misalkanlah bahwa $p(n)$ adalah " $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3"

(1) Mudah sekali untuk menunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

(2) Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, yaitu $k^3 - 4k + 6$ terbagi habis oleh 3.

Dan tunjukkanlah bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu

“($k+1$)³ - 4($k+1$) + 6 terbagi habis oleh 3”

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$(k+1)^3 - 4(k+1) + 6 = (k^3 - 4k + 6) + 3(k^2 + k + 2)$$

Memperhatikan kesamaan terakhir ini dan asumsi yang telah diambil mudah untuk memberi alasan bahwa $p(k+1)$ benar. Sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .



RANGKUMAN

Induksi matematik merupakan salah satu metode/cara pembuktian yang absah dalam matematika. Meskipun namanya induksi matematik, namun metode ini merupakan penalaran deduktif. Pembuktian dengan induksi matematik berkenaan dengan pembuktian pada pernyataan-pernyataan yang semestinya adalah himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan semua bilangan asli.

Misalkan, pernyataan: ” $p(n)$ adalah suatu proposisi yang berlaku untuk setiap bilangan asli n ”. Pembuktian kebenaran dari pernyataan ini dengan menggunakan induksi matematik mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah (1): Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

Langkah (2): Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k > 1$, dan ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar.

Apabila kedua langkah tersebut berhasil maka kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n . Langkah (1) disebut *basis (dasar) induksi* dan langkah (2) disebut *langkah induksi*.

Basis induksi tidak mesti diambil $n = 1$, tetapi diambil sesuai dengan permasalahan yang dihadapi atau pernyataan yang ingin dibuktikan. Misalkan, akan dibuktikan bahwa $p(n)$ berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq t$. Maka, langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematik sebagai berikut.

Langkah (1): Ditunjukkan bahwa $p(t)$ benar.

Langkah (2): Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k \geq t$, dan ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar.

Apabila kedua langkah ini berhasil maka kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq t$.


TES FORMATIF 1 _____

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Misalkan, kita akan membuktikan pernyataan: " $3n < n^2 - 1$ untuk setiap n pada suatu himpunan bagian dari himpunan semua bilangan asli" dengan metode induksi matematik maka basis induksi yang diambil adalah $n = \dots$
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4

- 2) Basis induksi dalam membuktikan bahwa $p(n)$, yaitu $n! > n^2$ untuk setiap n dari suatu himpunan bagian dari himpunan semua bilangan asli adalah
 - A. $p(1)$
 - B. $p(2)$
 - C. $p(3)$
 - D. $p(4)$

- 3) Suku ke n dari deret $4 + 10 + 16 + 22 + \dots$ adalah
 - A. $4n$
 - B. $5n - 1$
 - C. $6n - 2$
 - D. $8n - 4$

- 4) Jumlah n suku pertama dari deret $4 + 10 + 16 + 22 + \dots$ adalah
 - A. $n(3n + 1) + 4$
 - B. $2n(n - 2) + 4$
 - C. $3n(n - 1) + 4$
 - D. $n(2n + 2) + 4$

- 5) Misalkan, $p(n)$ adalah $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$ untuk setiap bilangan asli n maka $p(n + 1)$ adalah
 - A. $\sum_{k=1}^n (2k + 1)^2 = \frac{1}{3}(n + 1)(4n^2 + 8n + 3)$

- B. $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 8n + 3)$
 C. $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 3)$
 D. $\sum_{k=1}^{n+1} (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 3)$

- 6) Apabila $p(n)$ adalah $(n+1)! > n^2 + 1$ maka $p(n+1)$ adalah
 A. $(n+2)! > n^2 + 2n + 2$
 B. $(n+2)! > n^2 + 2$
 C. $n!(n+2) > (n+1)^2 + 1$
 D. $(n+1)!(n+2) > n^2 + 2$

- 7) Jika $t \neq 1$ maka jumlah n suku pertama dari deret $a + at + at^2 + \dots$ adalah

- A. $\frac{a(t^n - 1)}{t - 1}$
 B. $\frac{a(1 + t^n)}{1 + t}$
 C. $\frac{a(1 - t^{n+1})}{1 - t}$
 D. $\frac{a(1 + t^{n+1})}{1 - t}$

- 8) Apabila $p(n)$ adalah $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$ maka $p(1)$ adalah

- A. $2 = 2$
 B. $1 = 1$
 C. $1 = \frac{3}{2}$
 D. $2 = \frac{3}{2}$

- 9) Jumlah n suku pertama dari deret $3 + 5 + 7 + \dots$ adalah
 A. $(n+1)^2 + 3$
 B. $n^2 - n + 3$

- C. $n(n+1)+3$
 D. $n(n+2)+3$

10) Apabila $p(n)$ adalah $\sum_{t=1}^n t^3 = \sum_{i=1}^n (i+1)^2$ maka $p(n+1)$ adalah

- A. $\sum_{t=1}^n (t+1)^3 = \sum_{i=1}^n (i+2)^2$
 B. $\sum_{t=1}^{n+1} t^3 = \sum_{i=1}^{n+1} (i+1)^2$
 C. $(t+1)\sum_{t=1}^n t^3 = (i+2)\sum_{i=1}^n (i+1)^2$
 D. $\sum_{t=1}^n t^3 + 1 = \sum_{i=1}^n (i+1)^2 + 1$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
 80 - 89% = baik
 70 - 79% = cukup
 < 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Teorema Binomial

Kita akan mengingat kembali pengertian kombinasi dari sejumlah r objek yang diambil dari n objek. Banyaknya kombinasi dari r objek yang diambil dari n objek ($r \leq n$) adalah:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Contoh:

1. Misalkan, ada 5 objek, yaitu a, b, c, d dan e. Apabila dari 5 objek ini diambil 3 objek maka banyaknya cara pengambilan 3 objek tersebut adalah

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1.2.3.4.5}{(1.2)(1.2.3)} = 10 \text{ cara.}$$

Sepuluh cara pengambilan itu adalah abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, dan cde.

2. Misalkan, dalam suatu kotak terdapat 3 kelereng merah dan 4 kelereng putih. Apabila kita mengambil 3 kelereng merah dari dalam kotak tersebut maka banyaknya cara pengambilan ada

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{0!3!} = \frac{1.2.3}{1.1.2.3} = 1 \text{ cara.}$$

Akan tetapi, apabila kita mengambil 3 kelereng dari dalam kotak itu maka banyaknya cara pengambilan ada

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35 \text{ cara.}$$

Jika kita mengambil 4 kelereng dari dalam kotak tersebut maka banyaknya cara pengambilan ada

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35 \text{ cara.}$$

3. Misalkan, ada tiga kotak yang masing-masing berisi satu bola merah dan satu bola putih. Dari tiap-tiap kotak diambil satu bola sehingga terambil tiga bola. Banyaknya cara pengambilan 3 bola tersebut, agar terambil bola merah semua ada $\binom{3}{3} = 1$ cara. Banyaknya cara pengambilan 3 bola tersebut, agar terambil dua bola merah ada $\binom{3}{2} = 3$ cara. Banyaknya cara pengambilan 3 bola itu, agar terambil satu bola merah ada $\binom{3}{1} = 3$ cara. Banyaknya cara pengambilan 3 bola itu, agar tak terambil bola merah ada $\binom{3}{0} = 1$ cara.

Contoh terakhir ini akan digunakan untuk menyatakan suku banyak yang merupakan penjabaran dari $(m + p)^3$. Perpangkatan ini dapat dinyatakan sebagai perkalian berulang dengan 3 faktor sama, yaitu:

$$(m + p)(m + p)(m + p) = mmm + mmp + mpm + pmm + ppm + pmp + mpp + ppp$$

Setiap suku dari ruas kanan kesamaan ini terdiri dari 3 faktor dan masing-masing faktor berturut-turut diambil dari faktor pertama, faktor kedua dan faktor ketiga dari ruas pertama. Memperhatikan Contoh 3 di atas maka

banyaknya suku dengan tiga m adalah $\binom{3}{3} = 1$,

banyaknya suku dengan dua m ada $\binom{3}{2} = 3$,

banyaknya suku dengan satu m ada $\binom{3}{1} = 3$, dan

banyaknya suku tanpa m ada $\binom{3}{0} = 1$

Pada kesamaan terakhir itu jika suku-suku sejenisnya dijumlahkan maka akan diperoleh

$$(m + p)^3 = m^3 + 3m^2p + 3mp^2 + p^3$$

Koefisien-koefisien suku-suku dari ruas kanan dari kesamaan terakhir ini dapat dinyatakan dengan kombinasi-kombinasi banyaknya m dalam tiap sukunya sehingga kesamaan itu dapat ditulis sebagai berikut.

$$(p + m)^3 = \binom{3}{0} p^3 + \binom{3}{1} mp^2 + \binom{3}{2} m^2 p + \binom{3}{3} m^3$$

Dengan argumentasi yang mirip dengan ilustrasi di atas, kita dapat menuliskan kesamaan-kesamaan berikut ini. Coba periksalah kebenarannya!

$$(a + x)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} x$$

$$(a + x)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ax + \binom{2}{2} x^2$$

$$(a + x)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 x + \binom{3}{2} ax^2 + \binom{3}{3} x^3$$

$$(a + x)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 x + \binom{4}{2} a^2 x^2 + \binom{4}{3} ax^3 + \binom{4}{4} x^4$$

$$(a + x)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} x^k + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

Kesamaan-kesamaan tersebut baru merupakan dugaan karena kesamaan-kesamaan itu, khususnya kesamaan terakhir diperoleh dengan penalaran induktif. Maka, kesamaan itu perlu dibuktikan kebenarannya. Kita akan membuktikan kebenaran kesamaan tersebut, tetapi kita perlu beberapa persiapan berikut ini.

Dari rumus kombinasi di atas, yaitu:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Kita dapat memahami bahwa:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\text{Jadi, } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Teorema 1.1

$$\text{Jika } r \leq n \text{ maka } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Teorema ini sering disebut *sifat simetrik* dari koefisien binomial. Sifat ini membantu kita untuk menghitung lebih mudah nilai suatu kombinasi.

Contoh:

$$1) \quad \binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

$$2) \quad \binom{30}{27} = \binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$$

Teorema 1.2

Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$ maka

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } \quad \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} &= \frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!} + \frac{k!}{(k-r)!r!} \\ &= \frac{k!r + k!(k-r+1)}{(k+1-r)!r!} \\ &= \frac{k!(r+k-r+1)}{(k+1-r)!r!} \\ &= \frac{k!(k+1)}{(k+1-r)!r!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!} \end{aligned}$$

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Sekarang kita siap untuk membuktikan kebenaran penjabaran suku dua berpangkat n di atas dengan mengambil $a = 1$ dan $x = a$, yang selanjutnya disebut Teorema Binomial.

Teorema 1.3 (Teorema Binomial)

$(1 + a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \dots + \binom{n}{k}a^k + \dots + \binom{n}{n}a^n$ untuk setiap bilangan asli n .

Bukti: Kita buktikan dengan induksi matematik.

(1) Untuk $n = 1$ maka $(1 + a)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}a = 1 + a$, benar.

(2) Diasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu:

$$(1 + a)^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}a + \binom{k}{2}a^2 + \dots + \binom{k}{r}a^r + \dots + \binom{k}{k}a^k$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &= (1 + a)^k (1 + a) \\ &= \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}a + \binom{k}{2}a^2 + \dots + \binom{k}{k}a^k \right] (1 + a) \\ &= \binom{k}{0} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right]a + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right]a^2 + \dots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right]a^k + \binom{k}{k}a^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1}a + \binom{k+1}{2}a^2 + \dots + \binom{k+1}{k}a^k + \binom{k+1}{k+1}a^{k+1} \end{aligned}$$

Dari langkah-langkah (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa teorema terbukti benar untuk setiap bilangan asli n .

Koefisien-koefisien a pada ruas kanan pada Teorema 1.3 disebut *koefisien binomial*.

Contoh:

1) Koefisien x^9 dari penjabaran $(1 + x)^{12}$ adalah $\binom{12}{9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 660$

2) Koefisien x^8 dari uraian $(x + 1)^{11}$ adalah $\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$

Apabila pada teorema binomial tersebut $a = 1$ maka diperoleh kesamaan

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}$$

Kesamaan terakhir ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.4

Jika n suatu bilangan asli maka

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Selanjutnya perhatikan penurunan rumus berikut ini.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m-k+m)!(k-m)!} \\ &= \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} \end{aligned}$$

Rumus yang diperoleh ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.5

Jika n , m dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k > m$ maka

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

Untuk memperjelas makna dari teorema ini, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh:

Suatu perkumpulan terdiri dan 15 orang. Akan dibentuk suatu pengurus dari perkumpulan tersebut yang terdiri 5 orang dan 2 orang di antaranya sebagai pengurus inti.

Maka, banyaknya pilihan pengurus itu adalah:

$$\binom{15}{5} \binom{5}{2} = \frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{5.4}{1.2} = 30030.$$

Pemilihan tersebut dapat pula dilakukan dengan memilih 2 orang pengurus inti dan 15 orang dan selanjutnya untuk melengkapi pengurus itu dipilih 3 orang dan 13 orang (yang 2 orang telah terpilih sebagai pengurus inti).

Maka, banyaknya pilihan pengurus ini adalah:

$$\binom{15}{2} \binom{13}{3} = \frac{15.14}{1.2} \cdot \frac{13.12.11}{1.2.3} = 30030.$$

Tampak di sini bahwa $\binom{15}{2} \binom{5}{2} = \binom{15}{2} \binom{13}{3}$

Pada Teorema 1.5 tersebut, apabila $m = 1$ maka diperoleh:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Hubungan ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

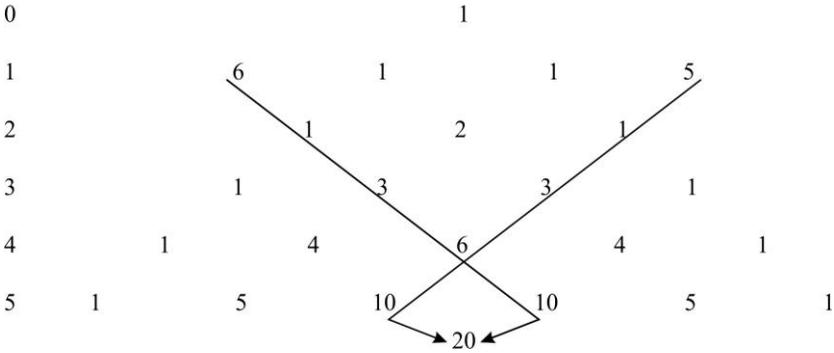
Teorema 1.6

Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$ maka

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Koefisien-koefisien binomial pada teorema binomial di atas dapat kita susun secara rekursif, seperti tampak pada Gambar 1.1, dan sering disebut segitiga Pascal sebagai berikut:

No.

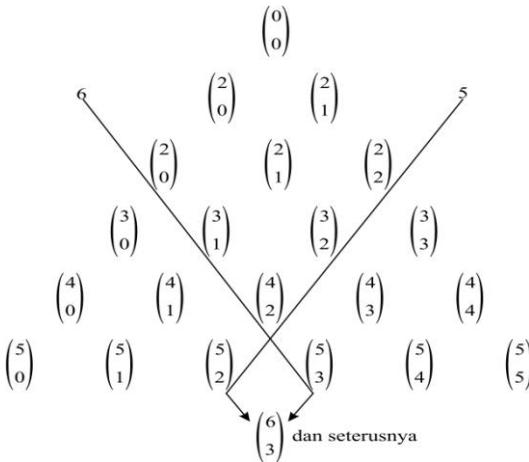


Gambar 1.1

Bilangan-bilangan pada segitiga Pascal tersebut dapat dibangun tanpa proses rekursif dengan notasi kombinatorik seperti tampak pada Gambar 1.2.

Perhatikan anak panah 5 pada Gambar 1.1 dan Gambar 1.2. Anak panah 5 itu menunjukkan bahwa

$$1+3+6+10=20 \text{ atau } \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$$



Gambar 1.2.

Fakta ini secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$

Anak panah 6 pada Gambar 1.1 dan Gambar 1.2 berturut-turut menunjukkan bahwa

$$1+3+6+10=20 \text{ atau } \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

Fakta ini secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \binom{k+3}{3} + \dots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r}$$

Selanjutnya, dua fakta ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini

Teorema 1.7

Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n \leq k$ maka

a)
$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \binom{k+3}{3} + \dots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r}$$

b)
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$

Buktikanlah teorema 7 tersebut, sebagai latihan! (Gunakan induksi matematik)

Contoh:

Buktikanlah bahwa $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1)n = 3! \binom{n+3}{4}$

Jawab: $(k-2)(k-1)k = \frac{k!}{(k-3)!} = \frac{3!k!}{(k-3)!3!} = 3! \binom{k}{3}$

Maka, jumlahan pada ruas kiri dalam soal tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3! \binom{3}{3} + 3! \binom{4}{3} + 3! \binom{5}{3} + \dots + 3! \binom{n}{3} &= 3! \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{n}{3} \right] \\ &= 3! \binom{n+1}{4}, \text{ sesuai teorema 1.7b) di atas.} \end{aligned}$$

Contoh:

Buktikanlah bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$

Jawab: Perhatikan bahwa k^2 dapat ditulis sebagai $k^2 = k(k-1) + k$.

Sehingga ruas kiri dari soal tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} &(1 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 3) + (4 \cdot 3 + 4) + \dots + (n(n-1) + n) \\ &= (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + n(n-1)) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &= \left(2 \binom{2}{2} + 2 \binom{3}{2} + 2 \binom{4}{2} + \dots + 2 \binom{n}{2} \right) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{1} \right) \\ &= 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Contoh:

Buktikanlah bahwa $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$

Jawab: Pada teorema binomial di atas jika $a=1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} &= (1-1)^n \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots \end{aligned}$$

Selanjutnya, mengingat teorema 4 diperoleh

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Tunjukkanlah bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$
- 2) Buktikanlah bahwa $n \binom{n-1}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1}$.
- 3) Buktikan bahwa $\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$
- 4) Hitunglah $\sum_{k=1}^n 12(k-1)k(k+1)$
- 5) Buktikanlah bahwa $\binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \dots + 2^n \binom{n}{n} = 3^n$
- 6) Hitunglah $\binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots$
- 7) Hitunglah deret berikut ini yang hasilnya dinyatakan dalam notasi kombinasi.

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + n(n+1)$$
- 8) Hitunglah $\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) Pada Kegiatan Belajar 1 Contoh 1 dalam modul ini bahwa jumlahan itu adalah

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Ruas kanan dari kesamaan ini, jika dinyatakan dalam notasi kombinasi adalah

$$\binom{n+1}{2}$$

2) $n \binom{n-1}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1}$ sama dengan teorema 1.4.

3) Teorema Binomial diderivatifkan ke a

$$(1+a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \dots + \binom{n}{k}a^k + \dots + \binom{n}{n}a^n$$

$$n(1+a)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}a + 3\binom{n}{3}a^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{k-1} + \dots + n\binom{n}{n}a^{n-1}$$

Pada kesamaan terakhir ini jika $a = 1$ maka diperoleh seperti yang diinginkan.

4) $(k-1)k(k+1) = \frac{(k+1)!3!}{(k-2)!3!} = 3! \binom{k+1}{3}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^n 12(k-1)k(k+1) = 72 \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{3}$$

Selanjutnya, gunakan teorema 1.7 b) dan diperoleh $72 \binom{n+2}{4}$

5) Tulislah teorema Binomial kembali dan substitusi a dengan 2. Apakah Anda memperoleh kesamaan berikut ini?

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$$

6) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots =$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + 2\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots\right) =$$

$$2^{n-1} + 2.2^{n-1} = 3.2^{n-1}$$

7) Perhatikan bahwa $k(k+1) = \frac{(k+1)!2!}{(k-1)!2!} = 2! \binom{k+1}{2}$ sehingga

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2}, \text{ gunakan teorema 1.7b)}$$

$$= 2 \binom{n+2}{3}$$

8) Ingat bahwa $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = 0$$

(ingat contoh terakhir pada kegiatan belajar ini)



RANGKUMAN

1. Banyaknya kombinasi r objek yang diambil dari n objek adalah:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

2. Jika $r \leq n$ maka $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3. Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$ maka

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

4. Teorema Binomial

$$(1+a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \dots + \binom{n}{k}a^k + \dots + \binom{n}{n}a^n,$$

untuk setiap bilangan asli n.

5. Jika n suatu bilangan asli maka

a. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

b. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$

6. Jika n, m dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k > m$ maka

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

7. Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$ maka

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

8. Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$ maka

a.
$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \binom{k+3}{3} + \dots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r}$$

b.
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$



TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika n dan k bilangan-bilangan asli dan $n > k$ maka $\binom{n}{k} = \dots$

A. $\frac{n!}{(k-n)!k!}$

B. $\frac{n!}{k!}$

C. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

D. $\frac{k!}{(n-k)!n!}$

2) Dengan notasi kombinatorik, $(k-2)(k-1)k(k+1)$ ditulis sebagai

A. $4! \binom{k+2}{4}$

B. $\binom{k+1}{4}$

C. $\binom{k+2}{4}$

D. $4! \binom{k+1}{4}$

3) $\binom{9}{5} + \binom{9}{4} = \dots$

A. $\binom{9}{3}$

B. $\binom{10}{5}$

C. $\binom{9}{6}$

D. $\binom{10}{6}$

4) $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{19}{5} = \dots$

A. $\binom{20}{6}$

B. $\binom{20}{5}$

C. $\binom{19}{6}$

D. $\binom{19}{4}$

5) $\binom{10}{0} + \binom{11}{1} + \binom{12}{2} + \dots + \binom{20}{10} = \dots$

A. $\binom{20}{9}$

B. $\binom{20}{11}$

C. $\binom{19}{10}$

D. $\binom{21}{11}$

6) Koefisien dari suku yang memuat a^9 dari penjabaran $(a + 1)^{15}$ adalah ...

A. $\binom{9}{6}$

B. $\binom{15}{6}$

C. $\binom{14}{9}$

D. $\binom{14}{6}$

7) Apabila $(2a - b)^{11}$ diuraikan maka koefisien dari suku yang memuat ab^{10} adalah

A. 22

B. 11264

C. 1024

D. 110

8) $(n - 1)(n + 1)n = \dots$

A. $3\binom{n}{3}$

B. $3\binom{n-1}{2}$

C. $2\binom{n+1}{3}$

D. $2\binom{n-1}{3}$

9) $10 \binom{9}{6} = \dots$

A. $11 \binom{10}{6}$

B. $9 \binom{10}{6}$

C. $6 \binom{10}{6}$

D. $5 \binom{10}{5}$

10) $\binom{10}{6} \binom{6}{2} =$

A. $\binom{10}{2} \binom{9}{6}$

B. $\binom{10}{6} \binom{10}{2}$

C. $\binom{10}{2} \binom{9}{5}$

D. $\binom{10}{5} \binom{10}{2}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

- 1) D. Jika n disubstitusi dengan 1, 2, dan 3 menghasilkan pernyataan-pernyataan yang salah.
- 2) D. Apabila n disubstitusi dengan 1, 2, dan 3 menghasilkan pernyataan-pernyataan yang salah.
- 3) C. $U_1 = 4$, $U_2 = 4 + 1.6$, $U_3 = 4 + 2.6$, dan seterusnya.
- 4) C. $S_1 = 4$, $S_2 = 4 + 1.6$, $S_3 = 4 + 3.6$, $S_4 = 4 + 6.6, \dots, S_n = 4 + \frac{1}{2}n(n-1)6$.
- 5) B. Pada ruas kanan, batas atas tanda sigma menjadi $n + 1$ dan pada ruas kirinya, n diganti dengan $n + 1$.
- 6) A. Gantilah n dengan $n + 1$ dan diuraikan.
- 7) A. Deret geometri dengan suku awal a dan rasio t .
- 8) B. Substitusi n dengan 1.
- 9) B. Kerjakan seperti petunjuk nomor 4.
- 10) B. Gantilah batas atasnya dengan $n + 1$.

Tes Formatif 2

- 1) C. Ingat rumus kombinasi $C(n,k)$.
- 2) D.
$$\frac{4!(k+1)!}{4!(k-3)!} = 4! \binom{k+1}{4}$$
- 3) B. Ingat Teorema 1.2.
- 4) A. Ingat Teorema 1.7 b)
- 5) D. Ingat Teorema 1.7 a)
- 6) B. Terapkan teorema Binomial dan gunakan sifat simetrik.
- 7) A. Terapkan teorema Binomial.
- 8) C.
$$(n-1)(n+1)n = \frac{1}{3} \frac{3!(n+1)!}{3! (n-2)!}$$
- 9) D. Terapkan Teorema 1.6.
- 10) C. Gunakan Teorema 1.5.

Daftar Pustaka

- Apostol, Tom M. (1983). *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: John Wiley & sons.
- Burton, David M. (1986). *Elementary Number Theory Revised Printing*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Dudley, Underwood. (1969). *Elementary Number Theory*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- Rosen, Kenneth H. (1993). *Elementary Number Theory and Its Applications*, Third Edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Shapiro, Harold N. (1995). *Introduction to the Theory of Numbers*. New York: Springer-Verlag.
- Sukirman. (2001). *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
- _____. *Teori Bilangan*. Jakarta: Proyek Peningkatan Mutu Guru SLTP, 1994/1995.
- Tucker, Alan. (1980). *Applied Combinatorics Second Edition*. New York: John Wiley & Sons.