MODUL 1

Logika Matematika

Prof. Dr. Wahyudin

PENDAHULUAN

Matematika adalah suatu bidang studi yang hasil-hasilnya memberikan bantuan bersifat pasti dan teliti dalam alur pikiran yang jelas. Namun demikian, sesuatu adakalanya terjadi dan tampak melanggar anggapan-anggapan tersebut. Perhatikan bukti berikut ini bahwa 1 + 1 = 1.

Misalkan $x = 1$ dan $y = 1$. Maka

$$\begin{aligned} y &= x \\ -y^2 &= -xy \\ x^2 - y^2 &= x^2 - xy \\ (x+y)(x-y) &= x(x-y) \\ x + y &= x \end{aligned}$$

Substitusikan kembali:

$$1 + 1 = 1$$

Barangkali ada sesuatu yang salah atau matematika telah gagal dalam hal ini! Pencarian sebab dari masalah seperti ini memerlukan kajian argumen-argumen dan logika matematis.

Memperbedakan konklusi yang valid dari yang tidak valid memerlukan analisis logika yang teliti. Dari pernyataan

Terdapat resiko kecelakaan jika tenaga nuklir digunakan.

benarlah kita berkesimpulan

Agar tidak ada resiko, Anda jangan menggunakan tenaga nuklir.

tetapi tidak benar kita berkesimpulan

Tidak ada resiko jika Anda menggunakan sumber tenaga yang lainnya.

Pada bagian logika ini, Anda akan mempelajari banyak komponen berpikir matematis: penggunaan bahasa yang teliti, makna dari generalisasi, dan kriteria untuk suatu bukti yang valid. Anda pun akan melihat bagaimana cara berpikir ini diterapkan dalam jaringan-jaringan logika komputer dan penalaran sehari-hari.

Setelah menyelesaikan modul ini, diharapkan Anda dapat:

1. menjelaskan tentang logika;
2. menentukan bentuk-bentuk dari pernyataan logis;
3. menuliskan bentuk-bentuk dari pernyataan yang ekuivalen logis;
4. menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan;
5. menentukan sifat-sifat dari pernyataan logis;
6. menggunakan substitusi untuk memverifikasi pernyataan-pernyataan tertentu;
7. menggunakan logika untuk membuktikan atau menyangkal pernyataan-pernyataan;
8. menentukan kebenaran dari pernyataan-pernyataan berkuantor di luar matematika;
9. menuliskan negasi dari suatu pernyataan logis;
10. menuliskan nilai kebenaran dari suatu pernyataan;
11. menuliskan tabel-tabel kebenaran untuk bentuk logis;
12. menterjemahkan jaringan-jaringan logika ke dalam bentuk-bentuk logis dan tabel-tabel input-output dan menentukan sinyal-sinyal output;
13. menentukan apakah suatu argumen valid atau tidak valid;
14. menentukan apakah suatu argumen logis di luar matematika adalah valid atau tidak valid; dan
15. mengetahui jenis-jenis penalaran di dalam dan di luar matematika.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pernyataan, Negasi, *DAN*, *ATAU*, dan Hukum De Morgan

1.1. Pernyataan

Logika dari *pernyataan-pernyataan* sangat membantu untuk mencari dan dalam menjelaskan masalah matematis yang dikemukakan pada bagian pendahuluan. Di dalam logika dan matematika, suatu **pernyataan** adalah suatu kalimat yang benar atau salah tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

Kalimat $1 + 1 = 2$ adalah sebuah pernyataan karena kalimat itu benar.

Kalimat $1 + 1 = 1$ adalah sebuah pernyataan karena kalimat itu salah.

Kalimat $x + 1 = 5x$ bukan sebuah pernyataan karena kalimat itu benar untuk beberapa nilai x, tetapi salah untuk nilai-nilai x yang lainnya.

Di dalam bagian ini, jika suatu kalimat sedang dibahas tentang sifat-sifat logisnya, maka kalimat itu dicetak miring. Sebarang kalimat dapat diwakili oleh sebuah huruf saja, misalnya p. Jika kalimat itu memuat sebuah variabel, misalnya x, maka kalimat itu dapat diwakili oleh sebuah simbol, misalnya $p(x)$. Sebagai contoh, misalkan $p(x)$ kalimat $x + 1$ *adalah bilangan bulat*. Perhatikan bahwa $p(x)$ bukan suatu pernyataan karena

$p(3)$: $3 + 1$ *adalah bilangan bulat*

adalah benar sedangkan

$p(0{,}5)$: $0{,}5 + 1$ *adalah bilangan bulat*

adalah salah.

Jika kata-kata untuk semua bilangan bulat x diletakkan di awal kalimat $p(x)$, maka hasilnya

Untuk semua bilangan bulat x, $x + 1$ *adalah bilangan bulat*

adalah suatu pernyataan karena kalimat itu memiliki sebuah nilai kebenaran (benar). Frasa "untuk semua" disebut **kuantor** dan diwakili dalam logika oleh simbol $\forall$. Dengan simbol ini, pernyataan tadi dapat ditulis

$\forall$ *bilangan bulat x,* $x + 1$ *adalah bilangan bulat.*

Jika kita menetapkan I untuk mewakili himpunan bilangan bulat, maka pernyataan di atas dapat ditulis lebih ringkas lagi.

$\forall$ *x dalam* I, $x + 1$ *adalah bilangan bulat.*

Pernyataan di atas ini benar.

Pernyataan-pernyataan yang menyebutkan bahwa suatu sifat tertentu berlaku untuk semua anggota dalam suatu himpunan—misalnya himpunan semua bilangan bulat atau himpunan semua segitiga—disebut *pernyataan-pernyataan universal*.

Definisi 1.1

Misalkan S suatu himpunan dan $p(x)$ suatu sifat yang mungkin berlaku atau tidak berlaku untuk sebarang anggota x dari S. Suatu **pernyataan universal** adalah pernyataan berbentuk

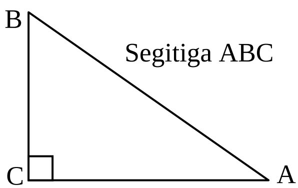
$$\textit{Untuk semua } x \textit{ dalam } S,\ p(x)$$

atau secara simbolis

$$\forall\, x \textit{ dalam } S,\ p(x).$$

Suatu pernyataan universal adalah benar jika dan hanya jika $p(x)$ benar untuk setiap anggota x dalam S; kalau tidak demikian, pernyataan itu **salah**.

Pernyataan-pernyataan universal bersifat kuat karena pernyataan-pernyataan itu menyebutkan bahwa suatu sifat tertentu berlaku untuk *setiap* anggota dalam sebuah himpunan. Dengan demikian, jika Anda diberikan sebarang anggota tertentu dari himpunan itu, Anda dapat mendeduksi bahwa sifat tersebut berlaku untuk anggota itu. Di dalam logika formal, ini dikenal sebagai **Hukum Substitusi**. Misalnya, karena hasil jumlah dari besarnya sudut-sudut dari *sebarang* segitiga sama dengan 180°, maka hasil jumlah besarnya sudut-sudut dari segitiga ABC tertentu yang ditunjukkan oleh gambar berikut ini adalah 180°.



Dengan gagasan-gagasan tersebut, kesalahan dalam "bukti" bahwa 1 + 1 = 1 dapat dijelaskan. Argumen itu dimulai dengan pernyataan-pernyataan yang diasumsikan sebagai benar: $x = 1$ dan $y = 1$. Dari pernyataan-pernyataan ini, empat pernyataan selanjutnya dapat dideduksi:

$$\begin{aligned} y &= x \\ -y^2 &= -xy \\ x^2 - y^2 &= x^2 - xy \\ (x + y)(x - y) &= x(x - y) \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah di mana kesalahan itu terjadi. Langkah ini menyaratkan justifikasi: $\forall$ *bilangan real d, jika kedua ruas dari suatu persamaan dibagi oleh d, maka hasilbagi-hasilbaginya adalah sama*. Tetapi pernyataan universal ini tidak benar untuk semua bilangan real, karena pernyataan ini tidak benar apabila $d = 0$. Saat kedua ruas dibagi oleh $x - y$, itu tidak tampak seperti pembagian oleh 0, tetapi $x - y = 1 - 1 = 0$. Hasilnya

$$x + y = x$$

dipandang sebagai salah apabila bilangan 1 disubstitusikan kembali untuk x dan y.

Suatu pernyataan universal dapat melibatkan lebih dari satu variabel. Sebagai contoh, misalkan $p(a, b)$ adalah kalimat $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ dan misalkan R himpunan bilangan real. Maka pernyataan universal

Untuk semua bilangan real a dan b, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

dapat ditulis secara simbolis sebagai

$\forall$ *a dan b dalam R*, $p(a, b)$.

Dengan menggunakan hukum substitusi, Anda dapat menetapkan $p(100, 3)$, yang adalah

$(100 - 3)(100 + 3) = 100^2 - 3^2$.

Anda dapat juga menetapkan $p(x, y)$, yang adalah

$\forall$ *x dan y dalam R*, $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

Anda pun dapat mendeduksi pernyataan-pernyataan lainnya.

Contoh 1.1

Misalkan $k \geq 0$. Gunakan substitusi untuk menunjukkan bahwa

$((\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = 1$

Jawab

Kalimat $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ berlaku untuk untuk semua bilangan real a dan b. Dengan demikian, pada khususnya, kalimat itu berlaku apabila $a = \sqrt{k+1}$ dan $b = \sqrt{k}$ karena bila $k \geq 0$, baik $\sqrt{k}$ maupun $\sqrt{k+1}$ adalah bilangan-bilangan real. Dengan menyubstitusikan untuk a dan b kita memperoleh

$$
\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2. \\
(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) &= (\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2 \\
&= (k+1) - k
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) = 1$.

Di dalam matematika, sebuah pengecualian saja, atau kontracontoh (*counterexample*), bagi suatu pernyataan universal telah dapat membuktikan bahwa pernyataan universal itu salah.

Definisi 1.2

> Berdasarkan suatu pernyataan universal
>
> $\forall x$ *dalam S*, $p(x)$.
>
> Suatu nilai x dalam S untuk mana $p(x)$ salah disebut kontracontoh bagi pernyataan itu.

Contoh 1.2
Apakah pernyataan berikut benar atau salah?

Untuk semua bilangan real x, $x^4 \geq 1$.

Jawab
Di sini $p(x)$ adalah kalimat $x^4 \geq 1$ dan S merupakan himpunan bilangan real.
Sebagai kontracontoh, misalkan $x = \frac{1}{2}$.

$p(\frac{1}{2})$ adalah pernyataan $(\frac{1}{2})^4 \geq 1$. Karena $\frac{1}{16} < 1$, $p(\frac{1}{2})$ adalah salah, sehingga pernyataan yang diberikan itu salah.

Contoh 1.2 mengilustrasikan: mengatakan bahwa pernyataan universal:

$\forall$ *bilangan real x*, $x^4 \geq 1$

adalah ekuivalen dengan mengatakan bahwa:

Terdapat sedikitnya satu bilangan real x sedemikian hingga $x^4 < 1$

adalah benar.

Frase "terdapat" atau "ada" adalah satu kuantor lainnya dan diwakili oleh simbol $\exists$, dibaca "ada." Pernyataan terakhir di atas dapat ditulis

$\exists$ *suatu bilangan real x sedemikian hingga* $x^4 < 1$.

Pernyataan-pernyataan yang menegaskan bahwa ada sedikitnya satu anggota dari sebuah himpunan untuk mana suatu sifat tertentu berlaku disebut *pernyataan-pernyataan eksistensial*.

Definisi 1.3

Misalkan S suatu himpunan dan bahwa $p(x)$ adalah sebuah sifat yang mungkin berlaku atau tidak berlaku untuk anggota-anggota dari S. Pernyataan eksistensial adalah suatu pernyataan berbentuk

Terdapat x dalam S sedemikian hingga p(x).

atau, secara simbolis,

$\exists$ *x dalam S sedemikian hingga p*(x).

Suatu pernyataan eksistensial adalah benar jika dan hanya jika $p(x)$ benar untuk sedikitnya satu anggota x dalam S; jika tidak demikian, maka pernyataan itu salah.

Contoh 1.3
Apakah pernyataan ini benar atau salah?

$\exists$ *sebuah bilangan bulat sedemikian hingga* $n^2 = 2$.

Jawab
Satu-satunya bilangan yang hasil kuadratnya 2 adalah $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$. Keduanya bukan bilangan bulat. Dengan demikian tidak ada bilangan bulat n sedemikian hingga $n^2 = 2$. Jadi pernyataan tersebut salah.

Untuk membuktikan kebenaran dari sebuah pernyataan universal, Anda harus menunjukkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua anggota dari himpunan S yang sesuai. Namun, untuk membuktikan kebenaran dari sebuah pernyataan eksistensial, Anda hanya perlu menemukan satu anggota dari himpunan S yang sesuai, yang membuat pernyataan itu benar. Misalnya, pernyataan $\exists$ *sebuah bilangan real sedemikian hingga* $n^2 = 2$ adalah benar karena $\sqrt{2}$ adalah bilangan real. (Tentu saja, demikian juga dengan $-\sqrt{2}$).

Berikut ini ringkasan sifat-sifat dari pernyataan universal dan pernyataan eksistensial.

pernyataan	universal	eksistensial
bentuk	*Untuk semua x dalam S, $p(x)$.*	*Terdapat suatu x dalam S sedemikian hingga $p(x)$.*
kuantor	untuk semua	terdapat (ada)
simbol	$\forall$	$\exists$
benar	Jika benar untuk semua nilai-nilai x dalam S	Jika benar untuk paling sedikit satu nilai x dalam S.

Di dalam bahasa Indonesia, kita mungkin mengatakan satu hal yang sama dalam beberapa cara. Jika Anda misalkan S himpunan semua segitiga dan $p(x)$ kalimat *hasil jumlah besarnya sudut-sudut x adalah* 180°, maka pernyataan universal

$$\forall x \text{ dalam } S,\ p(x)$$

dapat diungkapkan dalam banyak cara, antara lain:

Untuk semua segitiga x, hasil jumlah besarnya sudut-sudut x adalah 180°.

Untuk setiap segitiga x, hasil jumlah besarnya sudut-sudut x adalah 180°.

Hasil jumlah besarnya sudut-sudut dari sebarang segitiga adalah 180°.
Jika x, y, dan z adalah besarnya sudut-sudut dari sebuah segitiga, *maka* $x + y + z = 180°$.

Seringkali, saat sebuah kalimat berbentuk *Jika* $p(x)$ *maka* $q(x)$ memuat sebuah variabel x, kalimat itu dianggap sebagai pernyataan tentang semua nilai x dalam suatu himpunan S (yang ditentukan oleh konteks situasi). Misalnya sebuah kalimat seperti

Jika $\frac{x}{3} > 5$, *maka* $x > 15$.

biasanya dimaksudkan dengan arti

Untuk semua bilangan real, jika, $\frac{x}{3} > 5$, *maka* $x > 15$.

Pernyataan-pernyataan eksistensial dapat juga ditulis dalam beraneka ragam cara. Misalkan S himpunan semua bilangan real dan $p(x)$ kalimat $x^2 = x$. Pernyataan eksistensial $\exists$ *x dalam S sedemikian hinga* $p(x)$ dapat ditulis dalam cara-cara yang ekuivalen berikut ini.

Terdapat sebuah bilangan real x sedemikian hingga $x^2 = x$.

Terdapat paling sedikit satu bilangan real x untuk mana $x^2 = x$.

Untuk suatu bilangan real x, $x^2 = x$.

Untuk beberapa bilangan real x, $x^2 = x$.

Terdapat sebuah bilangan real yang sama dengan hasil kuadratnya.

Beberapa pernyataan memuat “untuk semua” dan “terdapat” sekaligus. Misalnya, Sifat Identitas Penjumlahan Nol dapat dituliskan

$\exists$ *suatu bilangan real n sedemikian hingga* $\forall$ *bilangan real x*, $x + n = x$.

Bilangan n, tentu saja, adalah 0. Eksistensi invers-invers penjumlahan mengunakan kuantor-kuantor tersebut dalam urutan terbalik.

$\forall$ *bilangan real x*, $\exists$ *suatu bilangan real y sedemikian hingga* $x + y = 0$.

Anda mengetahui bahwa $y = -x$.

1.2. Negasi

Anda mengetahui bahwa sebuah pernyataan mestilah benar atau salah. Setiap pernyataan memiliki negasi (sangkalan) yang juga merupakan pernyataan.

Definisi 1.4

Negasi dari suatu pernyataan *p* adalah suatu pernyataan, disebut **tidak** *p*, yang jika benar, secara tepat menyebutkan apa yang salah bagi *p*.

Tabel kebenaran berikut ini memberikan nilai-nilai untuk **tidak** *p* yang berkorespondensi dengan dua nilai kebenaran yang mungkin untuk *p*. Pada tabel ini, B mewakili benar dan S mewakili salah. Simbol ~*p* digunakan untuk **tidak** *p*. Tabel tersebut menunjukkan: bila *p* benar, ~*p* salah; bila *p* salah, ~*p* benar.

Tabel 1.1

Tabel Kebenaran untuk Negasi

p	~*p*
B	S
S	B

Negasi dari sebuah pernyataan dapat dibuat dengan hanya memasukkan frasa *Tidak benar bahwa* di awal pernyataan itu. Negasi dari

p: *Semua remaja memiliki pekerjaan.*

adalah pernyataan

$\sim p$: *Tidak benar bahwa semua remaja memiliki pekerjaan.*

Beberapa orang berpikiran bahwa cara lebih pendek untuk menuliskan negasi dari pernyataan p di atas adalah *Tidak ada remaja yang memiliki pekerjaan*. Tetapi ini tidak benar. Perhatikan bahwa pernyataan *Semua remaja memiliki pekerjaan* dan pernyataan *Tidak ada remaja yang memiliki pekerjaan* kedua-duanya salah. Jika salah satu pernyataan itu adalah negasi dari satu pernyataan lainnya, maka salah satunya mestilah benar dan satu lainnya salah.

Terdapat cara-cara lain untuk menuliskan negasi $\sim p$. Perhatikan bahwa pernyataan p yang diberikan di atas merupakan pernyataan menyeluruh yang menyebutkan sebuah sifat dari setiap remaja. Jika sifat ini tidak berlaku, meski hanya bagi seorang remaja, maka pernyataan ini secara keseluruhan salah. Oleh karena itu, negasi-negasi yang benar adalah sebagai berikut.

$\sim p$: *Paling sedikit satu remaja tidak memiliki pekerjaan.*
atau $\sim p$: *Seorang remaja tidak memiliki pekerjaan.*
atau $\sim p$: $\exists$ *seorang remaja yang tidak memiliki pekerjaan.*

Dengan menggunakan definisi kebenaran dan kesalahan dari pernyataan universal, gagasan di balik contoh ini dapat digeneralisasi untuk menghasilkan teorema berikut.

Teorema 1.1. (Negasi Pernyataan Universal)

Misalkan S sebuah himpunan dan $p(x)$ sebuah sifat yang mungkin berlaku atau tidak berlaku untuk anggota-anggota x dalam S. Negasi dari

$\forall$ *x dalam S*, $p(x)$

adalah

$\exists$ *x dalam S sedemikian hingga tidak* $p(x)$.

Contoh 1.4

Tuliskan negasi dari : *Semua bilangan prima adalah ganjil.*
Anda dapat menggunakan baik pendekatan formal maupun informal untuk menjawab soal ini.

Jawab (formal)
Di dalam cara formal, tuliskan kembali pernyataan itu sebagai

p: $\forall$ *bilangan-bilangan prima x, x adalah ganjil.*
Menurut teorema itu, negasinya adalah
tidak p: $\exists$ *sebuah bilangan prima x sedemikian hingga x tidak ganjil.*

Jawab (informal)
Untuk menemukan negasi dalam cara informal, gunakan penalaran serupa dengan penalaran yang mendahului teorema negasi pernyataan universal di atas. Perhatikan bahwa pernyataan menyeluruh *Semua bilangan prima adalah ganjil* adalah salah sejauh bahwa terdapat satu bilangan prima yang tidak ganjil. Ini membawa Anda untuk menuliskan negasinya sebagai

Paling sedikit satu bilangan prima adalah tidak ganjil.

atau Anda dapat menulis

Sebuah bilangan prima tidak ganjil.

atau

Terdapat sebuah bilangan prima yang tidak ganjil.

Teorema di atas menyebutkan bahwa negasi dari pernyataan *untuk semua* adalah pernyataan *terdapat*. Serupa dengan itu, negasi dari pernyataan *terdapat* adalah pernyataan *untuk semua*. Perhatikan pernyataan

q: *Terdapat sebuah bilangan real x untuk mana* $|x| = -3$.

Agar pernyataan ini benar, haruslah terdapat paling sedikit satu bilangan real yang nilai mutlaknya sama dengan -3. Tetapi tidak ada bilangan seperti itu: $|x| \geq 0$ untuk semua bilangan real x. Jadi pernyataan yang, jika benar, secara tepat menyebutkan apa yang salah bagi pernyataan q di atas adalah

$\sim q$: *Untuk semua bilangan real x*, $|x| \neq -3$.

Negasi $\sim q$ ini adalah benar; pernyataan asli q dengan demikian salah. Secara umum, dari definisi kebenaran dan kesalahan dari suatu pernyataan eksistensial, timbul teorema berikut ini.

Teorema 1.2. (Negasi Pernyataan Eksistensial)

Misalkan S sebuah himpunan dan $p(x)$ sebuah sifat yang mungkin benar atau tidak benar untuk anggota-anggota x dalam S. Negasi dari

$\exists$ *x dalam S sedemikian bahwa p*(*x*)

adalah

$\forall$*x dalam S, tidak p*(*x*).

Contoh 1.5
Tuliskan negasi dari *p*: *Beberapa segitiga adalah samakaki*.

Jawab

Beberapa orang berpikir bahwa negasi dari pernyataan di atas adalah *Beberapa segitiga tidak samakaki*. Tetapi itu tidak benar, seperti ditunjukkan analisis teliti berikut ini.

p: *Beberapa segitiga adalah samakaki.*

adalah ekuivalen dengan

p: $\exists$ *sebuah segitiga x sedemikian hingga x adalah samakaki.*

Dengan demikian, negasinya adalah

$\sim p$: $\forall$ *segitiga x, x tidak samakaki,*

yang berarti bahwa tidak ada satu pun segitiga yang samakaki. Atau dalam kata-kata lain,

$\sim p$: *Tidak ada segitiga yang samakaki.*

Perhatikan bahwa pernyataan *Beberapa segitiga tidak samakaki* memiliki arti bahwa kita mungkin menemukan paling sedikit satu segitiga yang tidak samakaki, yang sangat berbeda artinya dari *Tidak ada segitiga yang samakaki*.

Sekarang perhatikan masalah penulisan negasi dari pernyataan yang mengandung *untuk semua* dan *terdapat* sekaligus. Misalnya, pikirkan pernyataan

p: $\forall$*bilangan real x,* $\exists$ *sebuah bilangan real y sedemikian hingga* $xy = 1$.

Berdasarkan Teorema Negasi Pernyataan Universal, negasinya adalah

$\sim p$: $\exists$ *sebuah bilangan real x sedemikian hingga tidak* ($\exists$ *sebuah bilangan real y sedemikian hingga* $xy = 1$).

Berdasarkan Teorema Negasi Pernyataan Eksistensial, *tidak* ($\exists$ *sebuah bilangan real y sedemikian hingga* $xy = 1$) adalah ekuivalen dengan $\forall$ *bilangan real y,* $xy \neq 1$. Oleh karena itu, negasi dari p adalah $\sim p$: $\exists$ *sebuah bilangan real x sedemikian hingga* $\forall$ *bilangan real y,* $xy \neq 1$.

Secara umum, jika S dan T adalah himpunan-himpunan dan $p(x, y)$ merupakan sifat yang mungkin benar atau tidak benar untuk anggota-anggota x dalam S dan y dalam T, maka:

negasi dari $\forall$ *x dalam S,* $\exists$ *y dalam T sedemikian hingga* $p(x, y)$
adalah $\exists$ *x dalam S sedemikian hingga* $\forall$ *y dalam T, tidak* $p(x, y)$
dan sebaliknya.

Contoh 1.6
Tuliskanlah negasi dari pernyataan : *Setiap orang mempercayai seseorang*.

Jawab 1
Berikut ini jawabnya dalam kata-kata.

p: *Setiap orang mempercayai seseorang.*
~*p*: *Terdapat seseorang yang tidak mempercayai siapapun.*

Jawab 2
Berikut ini sebuah analis yang lebih formal.

p:∀ *manusia x*, ∃ *seseorang y sedemikian hingga x mempercayai y*.
~*p*:∃ *seseorang x sedemikian hingga* ∀*manusia y, x tidak mempercayai y*.

Perhatikan bahwa, secara umum, negasi dari suatu pernyataan dapat diperoleh dengan membaca pernyataan itu dari kiri ke kanan dan mengubah ∀ menjadi ∃, mengubah ∃ menjadi ∀, dan mengubah $p(x, y)$ menjadi *tidak* $p(x, y)$. Kata-kata *sedemikian hingga* dihilangkan apabila ∃ diubah menjadi ∀ dan ditambahkan apabila ∀ diubah menjadi ∃.

1.3 *Dan* dan *Atau* dan Hukum De Morgan

Di dalam matematika dan di dalam bahasa yang lazim, pernyataan-pernyataan seringkali digabungkan dengan menggunakan kata-kata *dan*, *atau*, *tidak*, *baik* ... *ataupun*, *tidak* ... *ataupun*. Kutipan berikut ini dari instruksi-instruksi untuk Schedule SE (Form 1040) formulir Pajak Pendapatan Federal Amerika Serikat tahun 1989 mengilustrasikan kombinasi-kombinasi semacam itu:

"Secara umum, Anda dapat menggunakan bagian ini hanya jika:

A Pendapatan **kotor** ladang Anda tidak lebih dari $2,400, atau

B Pendapatan **kotor** ladang Anda lebih dari $2,400 dan laba **bersih** ladang Anda kurang dari $1,600, **atau**

C Laba **bersih** non-ladang Anda kurang dari $1,600 dan juga kurang dari dua pertiga (2/3) pendapatan **kotor** ladang Anda."

Misalkan kita menggunakan notasi berikut ini untuk pernyataan-pernyataan sederhana dalam instruksi-instruksi tersebut:

f : *pendapatan kotor ladang Anda lebih dari* $2,400.

p: *laba bersih ladang Anda kurang dari* $1,600.

n: *laba bersih non-ladang Anda kurang dari* \$1,600.

g: *laba bersih non-ladang Anda kurang dari dua pertiga pendapatan kotor ladang Anda*.

Dalam notasi ini, instruksi-instruksi pajak pendapatan itu dapat dituliskan sebagai berikut.

Anda dapat menggunakan bagian ini hanya jika ((*tidak f*) *atau* (*f dan p*) *atau* (*n dan g*)).

Tidaklah mengherankan jika ternyata orang-orang kebingungan oleh formulir pajak! Untunglah, tidak semua kalimat yang mengandung *dan*, *atau*, dan *tidak* serumit instruksi-instruksi tadi.

Contoh 1.7
Tuliskanlah pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut ini dengan menuliskan tiap *dan*, *atau*, dan *tidak* yang tersiratkan pada masing-masingnya.

a. $x \leq 5$ b. $y \not\leq -1$ c. $-3 < z < 4$

Jawab

a. $x < 5$ atau $x = 5$

b. tidak ($y \leq -1$), yang ekuivalen dengan tidak ($y < -1$ atau $y = -1$). Seperti Anda ketahui, satu bentuk lain untuk ini adalah $y > -1$.

c. $-3 < z$ dan $z < 4$. Pertidaksamaan ganda ini berarti bahwa kedua pertidaksamaan tersebut terpenuhi.

Nilai-nilai kebenaran dari kalimat-kalimat yang menggabungkan dua pernyataan dengan *dan* atau *atau* adalah sebagai berikut.

Definisi 1.5

a. Kalimat *p* **dan** *q* adalah benar bila, dan hanya bila, *p* dan *q* kedua-duanya benar.

b. Kalimat *p* **atau** *q* adalah benar dalam semua kasus keculai bila *p* dan *q* kedua-duanya salah.

Nilai-nilai kebenaran dalam definisi *dan* dan *atau* dirangkumkan dalam tabel kebenaran berikut ini.

Tabel Kebenaran untuk *dan*		
p	*q*	*p dan q*
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel Kebenaran untuk *atau*		
p	*q*	*p atau q*
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dalam bahasa yang lazim, kita kadang-kadang menggunakan **atau ekslusif** (salah satu atau satu yang lainnya, tetapi tidak kedua-duanya sekaligus) dan kadang-kadang **atau inklusif** (salah satu atau satu yang lainnya atau kedua-duanya sekaligus). Misalnya, jika sebuah menu kantin menyebutkan "Kopi atau teh gratis untuk pemesanan roti bakar," Anda barangkali sebaiknya menafsirkan itu dengan arti bahwa Anda dapat memperoleh kopi atau teh secara gratis bersama roti bakar yang Anda pesan tetapi Anda akan harus membayar lebih jika Anda menginginkan kedua-duanya. Itu adalah *atau ekslusif*. Di sisi lain, jika pramusaji kantin itu bertanya kepada Anda "Krim atau gula?", Anda biasanya dapat mengartikan bahwa dia sedang menawarkan krim atau gula atau kedua-duanya. Itu adalah *atau inklusif*. Di dalam matematika, *atau* selalu berarti *atau inklusif*.

Suatu **bentuk/ekspresi logis** adalah formula di mana variabel-variabel yang mewakili pernyataan-pernyataan digabungkan dalam suatu cara yang tidak ambigu dengan *dan*, *atau*, *tidak*, atau *jika-maka*. Misalnya

p atau (*q dan r*)   (*p atau q*) *dan r*

adalah bentuk-bentuk logis. Di sisi lain, formula

p atau q dan r

bukan merupakan ekspresi logis karena tidak jelas apakah bentuk itu berarti

p atau (*q dan r*), *atau* (*p atau q*) *dan r*.

Jika dua bentuk logis memiliki nilai-nilai kebenaran yang sama untuk semua substitusi pernyataan untuk variabel-variabel pernyataannya, maka kita katakan bahwa dua bentuk tersebut **ekuivalen logis**. Simbol ≡ kadang-kadang digunakan untuk melambangkan ekuivalensi logis. Sebagai contoh, $\sim(\sim p) \equiv p$.

Contoh 1.8

Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan bahwa *tidak* (*p dan q*) ≡ (*tidak p*) *atau* (*tidak q*).

Jawab
Siapkan sebuah tabel kebenaran di mana dua kolom pertamanya mendaftarkan nilai-nilai kebenaran untuk *p* dan *q* dan kolom-kolom lainnya memberikan nilai-nilai kebenaran untuk *p dan q*, *tidak* (*p dan q*), *tidak p*, *tidak q*, dan (*tidak p*) *atau* (*tidak q*). Perhatikan contoh bagaimana mengisi kolom-kolom tersebut dalam beberapa langkah.

p	*q*	*p dan q*	*tidak (p dan q)*	*tidak p*	*tidak q*	*(tidak p) atau (tidak q)*
B	B					
B	S					
S	B					
S	S					

Sekarang gunakan tabel-tabel kebenaran untuk *dan* dan *tidak* untuk mengisi tiga kolom lain seperti tampak di bawah ini.

p	*q*	*p dan q*	*tidak (p dan q)*	*tidak p*	*tidak q*	*(tidak p) atau (tidak q)*
B	B	B		S	S	
B	S	S		S	B	
S	B	S		B	S	
S	S	S		B	B	

Dari kolom-kolom yang telah diisi seperti di atas, Anda dapat mengisi dua kolom lainnya yang masih tersisa, seperti tampak di bawah ini.

p	*q*	*p dan q*	*tidak (p dan q)*	*tidak p*	*tidak q*	*(tidak p) atau (tidak q)*
B	B	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	S	B	B	S	B
S	S	S	B	B	B	B

Nilai-nilai kebenaran sama

Karena nilai-nilai kebenaran yang berkorespondensi dalam kolom *tidak* (*p dan q*) dan kolom (*tidak p*) *atau* (*tidak q*) dalam tabel di atas adalah sama, maka dua bentuk logis tersebut adalah ekuivalen logis.

Pokok penting tentang bukti tabel kebenaran Contoh 1.8 adalah bahwa bukti tersebut tidak bergantung pada pernyataan-pernyataan spesifik yang digunakan untuk menggantikan *p* dan *q*. Contoh 1.8 membuktikan yang pertama dari dua hasil yang disebut *Hukum-hukum De Morgan*.

Hukum De Morgan

> Untuk semua pernyataan p dan q.
> 1. $\sim(p\ dan\ q) \equiv (\sim p)$ atau $(\sim q)$
> 2. $\sim(p\ atau\ q) \equiv (\sim p)$ dan $(\sim q)$.

Augustus Louis De Morgan (1806-1871) adalah seorang matematikawan dan logikawan terkenal. Pernyataan-pernyataan lisan prinsip-prinsip logika yang disebutkan oleh hukum (1) dan hukum (2) itu telah dikenal setidaknya pada awal abad ke-14. Namun demikian, De Morgan adalah orang pertama yang menyatakannya secara simbolis, dalam bukunya *Formal Logic* yang diterbitkan pada tahun 1847.

Ungkapan sehari-hari *baik a ataupun b* seringkali berarti *atau ekslusif*, yaitu (*a atau b*) *dan tidak* (*a dan b*).

Untuk menghindari ambiguitas (kebergandaan-makna), untuk *atau ekslusif* kita katakan *baik a ataupun b tetapi tidak sekaligus kedua-duanya*. Perhatikan bahwa dalam bahasa yang lazim, frasa "*tidak a ataupun b*" berarti "(*tidak a*) *dan* (*tidak b*)". Ekuivalensi logis ini merupakan yang kedua dari Hukum De Morgan.

Contoh 1.9 berikut ini menggunakan Hukum-hukum De Morgan untuk menganalisis sebuah pertidaksamaan ganda.

Contoh 1.9

Misalkan, kecepatan L yang diperbolehkan oleh hukum (dalam km per jam) di sebuah jalan raya antar provinsi adalah $60 \leq L \leq 80$. Gunakan Hukum De Morgan untuk mendeskripsikan kecepatan-kecepatan yang melanggar hukum.

Jawab

Kecepatan-kecepatan yang melanggar hukum adalah negasi nilai L yaitu:

$$\sim(60 \leq L \leq 80) \equiv \sim(60 \leq L \text{ dan } L \leq 80)$$

Anggap $60 \leq L$ sebagai p, $L \leq 80$ sebagai q, dan terapkan Hukum De Morgan yang pertama:

$$\equiv \sim(60 \leq L) \text{ atau } \sim(L \leq 80)$$
$$\equiv 60 > L \text{ atau } L > 80$$

Jadi Anda melanggar hukum kecepatan di jalan raya provinsi tersebut jika kecepatan Anda kurang dari 60 atau lebih dari 80 km per jam.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Pernyataan berikut adalah benar:

   $\forall$ *bilangan-bilangan real a dan b*, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   Gunakan substitusi, misalkan $a = \sqrt{75}$ dan $b = \sqrt{12}$ untuk mendeduksi bahwa $(\sqrt{75} + \sqrt{12})^2 = 147$.
2. Sifat Identitas Perkalian dari satu adalah: sebarang bilangan real dikalikan oleh 1 sama dengan bilangan itu. Tuliskanlah sifat ini dengan menggunakan simbol $\forall$ dan $\exists$.
3. *Benar atau Salah*? $\forall$ *bilangan-bilangan real a dan b, persamaan* $ax = b$ *memiliki tepat satu penyelesaian*. Jika salah, berikan sebuah kontra-contoh.
4. Tuliskan negasi dari pernyataan berikut:

   $\exists$ *suatu fungsi f sedemikian hingga* $\forall$*bilangan-bilangan real a dan b*, $f(a+ b) = f(a) + f(b)$.
5. Perhatikan pernyataan : *Setiap orang mencintai seseorang*.
   a. Tuliskan pernyataan tersebut dalam bentuk
      $\forall$ __?__ , $\exists$ __?__ *sedemikian hingga* __?__ .
   b. Tuliskanlah negasi dari pernyataan di atas.
6. Perhatikan pernyataan berikut ini.

   $\forall$ *bilangan real x*, $\exists$ *suatu bilangan real y sedemikian hingga* $\tan x = y$.
   a. Tuliskan negasi dari pernyataan ini.
   b. Manakah yang benar: pernyataan tersebut atau negasinya? Justifikasi jawaban Anda.
7. a. Lengkapilah tabel kebenaran berikut ini.

p	*q*	*p dan q*	*p atau (p dan q)*
B	B		
B	S		
S	B		
S	S		

b. Dalam jawaban Anda untuk soal 1(a) di atas, dua dari kolom-kolom itu mestilah sama. Apakah arti dari kesamaan tersebut?

8. Gunakan salah satu dari Hukum-hukum De Morgan untuk menuliskan negasi dari: *Saya ingin bubur ayam atau saya ingin nasi goreng untuk sarapan pagi.*

9. Gunakanlah salah satu Hukum De Morgan untuk menuliskan negasi dari $3 < x \leq 4$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ berlaku untuk semua bilangan real a dan b. Karena $\sqrt{75}$ dan $\sqrt{12}$ adalah real, maka relasi itu berlaku bila $a = \sqrt{75}$ dan $b = \sqrt{12}$.

   Jadi, $(\sqrt{75} + \sqrt{12})^2 = (\sqrt{75})^2 + 2\sqrt{75} \times \sqrt{12} + (\sqrt{12})^2$
   $= 75 + 60 + 12$
   $= 147$.

2. $\exists$ *suatu bilangan real* 1 *sedemikian hingga* $\forall$ *bilangan real* x, $x \times 1 = x$.

3. Salah; misalnya, jika $a = b = 0$, maka terdapat lebih dari satu penyelesai-an untuk x, jika $a = 0$, $b = 1$, maka tidak terdapat penyelesaian untuk x.

4. $\forall$ *fungsi f*, $\exists$ *bilangan-bilangan real a dan b sedemikian hingga* $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

5. a. *orang x*; *seseorang y*; *x mencintai y*
   b. $\exists$ *seseorang x sedemikian hingga* $\forall$ *orang y*, *x tidak mencintai y*.

6 a. $\exists$ *bilangan real x sedemikian hingga* $\forall$ *bilangan real y*, *tan* $x \neq y$.

7. a.

p	*q*	*p dan q*	*p atau (p dan q)*
B	B	**B**	**B**
B	S	**S**	**B**
S	B	**S**	**S**
S	S	**S**	**S**

   b. $p \equiv p$ *atau* (p *dan* q)

8. *Saya tidak ingin bubur ayam dan saya tidak ingin nasi goreng untuk sarapan pagi.*

9. $\sim(3 < x \leq 4) \equiv \sim(3 < x$ *dan* $x \leq 4) \equiv \sim(3 < x)$ *atau* $\sim(x \leq 4) \equiv 3 \geq x$ *atau* $x > 4$.

RANGKUMAN

1. Pernyataan-pertanyaan universal menyebutkan bahwa semua anggota dari suatu himpunan memiliki suatu sifat tertentu, sedangkan pernyataan-pernyataan eksistensial menyebutkan bahwa sekurang-kurangnya satu anggota dari suatu himpunan memiliki suatu sifat tertentu.
2. Menuliskan negasi dari suatu pernyataan artinya adalah mengungkapkan bentuk salah (kebalikan) dari pernyataan itu. Negasi dari pernyataan universal adalah pernyataan eksistensial, dan negasi dari pernyataan eksistensial adalah pernyataan universal.
3. Kata-kata *dan, atau,* dan *tidak* sangat penting dalam studi logika. Hukum-hukum De Morgan dapat digunakan untuk membuat negasi dari bentuk-bentuk logis yang memuat *dan* dan *atau*.

TES FORMATIF 1

Selesaikan oal-soal tes berikut ini!

1. Temukan sebuah kontracontoh untuk menunjukkan bahwa pernyataan berikut ini salah:
   Untuk semua bilangan real x terdapat suatu bilangan real y sedemikian hingga $x \times y = 1$.

2. Tuliskanlah negasi dari pernyataan berikut:
   $\exists$ *suatu fungsi f sedemikian hingga* $\forall$ *bilangan-bilangan real a dan b,* $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

3. Diketahui pernyataan
   $\exists$ *suatu bilangan real positif x sedemikian hingga* ${}^{10}\log x = 0$.
   Tuliskanlah negasinya, kemudian tentukan apakah pernyataan itu atau negasinya yang benar?

4. Konstruksikanlah sebuah tabel kebenaran untuk menunjukkan semua nilai kebenaran yang mungkin dari bentuk p dan $\sim q$.

5. Apakah *atau ekslusif* atau *atau inklusif* yang dimaksudkan dalam kutipan dari penulis Edith Wharton berikut ini:
Terdapat dua cara menyebarkan cahaya: *menjadi lilin atau cermin yang memantulkannya.*

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. (Tiap soal memiliki total bobot nilai 1. Jika sebuah soal terdiri atas beberapa butir pertanyaan, maka bobot nilai dari satu butir pertanyaan adalah $\dfrac{1}{\text{jumlah butir pertanyaan dalam soal}}$.) Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

<u>Rumus:</u>

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100%	=	Baik sekali
80% - 89%	=	Baik
70% - 79%	=	Cukup
- 69%	=	Kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, maka Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. *Bagus!* Jika tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Jaringan Logika Komputer, Pernyataan *JIKA MAKA*, dan Argumen yang Valid

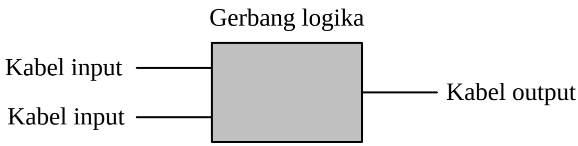
1.4 Jaringan Logika Komputer

Pikirkan tentang lampu di langit-langit sebuah mobil berpintu dua. Kecuali Anda telah mengubah setelan sakelarnya, lampu itu akan menyala saat ada pintu mobil itu yang terbuka dan akan mati saat kedua pintu tertutup. Tabel berikut ini menunjukkan bilamana lampu menyala atau mati berdasarkan posisi dari kedua pintu mobil tersebut.

Pintu 1	*Pintu 2*	*Lampu*
terbuka	terbuka	menyala
terbuka	tertutup	menyala
tertutup	terbuka	menyala
tertutup	tertutup	mati

Tabel ini tentu tidak asing lagi bagi Anda. Barangkali demikian, karena strukturnya sama dengan tabel kebenaran untuk *atau*, dengan kata-kata *terbuka* dan *menyala* menggantikan *B* dan kata-kata *tertutup* dan *mati* menggantikan *S*. Ini menandakan bahwa logika dan elektronika berhubungan sangat dekat, dan memang demikian. Setiap kali Anda menekan tombol pada kalkulator, atau mengetikkan perintah pada komputer, atau menekan sakelar lampu, Anda sedang mengaktifkan *gerbang logika* (*logic gate*) pertama dalam suatu sistem elektronik. Mikroprosesor dapat memiliki jutaan gerbang logika. Gerbang-gerbang ini saling-sambung sehingga dapat mentransmisi-kan arus listrik untuk menghasilkan output-output seperti tampilan yang Anda lihat setelah menginput berbagai kunci pada kalkulator.

Sebagai bagian dari perangkat keras komputer, gerbang-gerbang logika memiliki beraneka ragam bentuk. Anda tidak harus mengetahui bagaimana konstruksi fisik dari gerbang-gerbang ini untuk dapat memahami bagaimana mereka berfungsi, dan Anda dapat memikirkan gerbang-gerbang logika itu sebagai alat-alat listrik dengan kabel-kabel *input* dan *output*. Sebuah model gerbang logika diilustrasikan sebagai berikut.



Kabel-kabel input dan output membawa sinyal-sinyal listrik yang berada dalam salah satu dari dua keadaan yang saling ekslusif. Anda dapat pikirkan dua keadaan itu sebagai *arus ON* atau *arus OFF* atau sebagai *voltase tinggi* atau *voltase rendah*. Demi kemudahan, kita sebut saja keadaan sinyal ini sebagai 1 atau 0. Ini berkorespondensi, berturut-turut, dengan *Benar* dan *Salah* dalam logika. Benar adalah 1 adalah ON; Salah adalah 0 adalah OFF.

Sebuah gerbang logika bertindak pada sinyal-sinyal input yang diterimanya untuk menghasilkan sebuah sinyal input (1 atau 0). Oleh karena itu, Anda akan mengetahui secara tepat bagaimana suatu gerbang logika berfungsi setelah Anda mengetahui keadaan sinyal output yang dihasilkan untuk setiap kombinasi yang mungkin dari keadaan-keadaan sinyal input. Informasi ini dapat dicantumkan dengan mudah dalam **tabel input-output** untuk gerbang logika tersebut. Berikut ini diberikan tabel untuk sebuah gerbang logika yang berbeda dari gerbang logika untuk situasi pintu mobil.

Input		**Output**
p	*q*	
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Tabel di atas memiliki dua kolom input yang diberi nama *p* dan *q*, sehingga Anda dapat menggambarkan gerbang logika itu sebagai

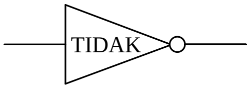
Tabel tadi memberi tahu Anda bahwa gerbang logika akan menghasilkan sebuah sinyal output 0 saat kabel input *p* membawa sinyal 1 dan kabel input *q* membawa sebuah sinyal 1. Untuk sebarang dari tiga kombinasi lainnya yang mungkin dari keadaan-keadaan sinyal input, tabel itu memberi tahu Anda bahwa gerbang logika akan menghasilkan sebuah sinyal output 1.

Dengan demikian, tabel input-output itu memberi tahu Anda secara tepat apa yang akan dilakukan oleh gerbang logika dengan sebarang kombinasi yang mungkin dari sinyal-sinyal input.

Tiga gerbang logika berikut ini sedemikian bersifat mendasar hingga diberi simbol-simbol baku yang khusus.

Nama Gerbang — **Simbol Gerbang** — **Tabel Input-Output**

TIDAK



p	Output
1	0
0	1

DAN

p	*q*	Output
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ATAU

p	*q*	Output
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Perhatikan bahwa

a. sinyal output gerbang TIDAK (atau, *NOT*) adalah 0 jika sinyal inputnya 1, dan bahwa sinyal outputnya 1 jika sinyal inputnya 0;

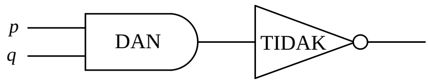
b. sinyal output gerbang DAN (atau, *AND*) adalah 1 jika kabel input *p* dan kabel input *q* membawa sebuah sinyal 1. Jika tidak demikian, maka sinyal outputnya adalah 0; dan

c. sinyal output gerbang ATAU (atau, *OR*) adalah 1 jika kabel input *p* atau kabel input *q* (atau kedua-duanya) membawa sebuah sinyal 1. Jika tidak demikian , maka sinyal outputnya 0.

Jika Anda belum juga menyadari ini, Anda dapat melihat bahwa tabel-tabel input-output untuk gerbang-gerbang logika TIDAK, DAN, dan ATAU pada dasarnya sama dengan tabel-tabel kebenaran untuk *tidak p*, *p dan q*, dan *p atau q*. Satu-satunya perbedaan adalah hal penggunaan notasi: 1 dan 0 digunakan, berturut-turut, sebagai pengganti B dan S, dan kolom terakhir diberi nama dengan kata *output* menggantikan bentuk logis yang sesuai untuknya.

Gerbang-gerbang TIDAK, DAN, dan ATAU biasanya disambungkan sedemikian sehingga sinyal-sinyal output dari beberapa gerbang itu menjadi sinyal-sinyal input bagi gerbang-gerbang lainnya. Ini disebut suatu *jaringan* (*network*) gerbang logika. Hubungan di antara tabel-tabel input-output untuk gerbang-gerbang TIDAK, DAN, dan ATAU dan tabel-tabel kebenaran untuk *tidak p*, *p dan q*, dan *p atau q* berarti bahwa untuk tiap jaringan gerbang-gerbang logika, Anda dapat mengkonstruksi suatu bentuk logis yang berkorespondensi padanya. Selain itu, Anda pun dapat menggunakan logika untuk menentukan tindakan dari jaringan manapun.

Contoh 1.10
Konstruksilah suatu tabel input-output yang berkorespondensi dengan jaringan berikut ini:



Jawab
Karena jaringan ini memiliki dua kabel input yang bernama *p* dan *q*, maka tabel input-output harus mencantumkan semua kombinasi keadaan sinyal yang mungkin untuk *p*, *q*.

p	*q*	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Sinyal-sinyal input terlebih dulu melewati gerbang DAN yang outputnya masuk ke gerbang TIDAK. Penelusuran tiap pasang sinyal input melalui jaringan ini memungkinkan Anda untuk menentukan sinyal output yang tepat. Jika *p* adalah 1 dan *q* adalah 1, maka output dari gerbang DAN adalah juga 1. Gerbang TIDAK membalikkan nilai ini dan memberikan output akhir 0. Baris-baris lainnya pada tabel ini diselesaikan dalam cara serupa itu.

p	*q*	*p DAN q*	*output jaringan TIDAK (p DAN q)*
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Periksa Sirkuit ini mesti mewakili tabel kebenaran untuk *tidak (p dan q)*.

p	*q*	*p dan q*	*tidak (p dan q)*
B	B	B	S
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

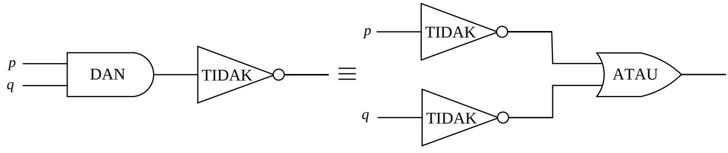
Ingat kembali bahwa dua bentuk logis disebut ekuivalen logis jika nilai-nilai kebenarannya selalu sama. Sama halnya, jika kolom-kolom output dari tabel-tabel input-output untuk dua jaringan adalah identik, maka jaringan-jaringan itu menghasilkan output yang sama untuk tiap kombinasi sinyal-sinyal input, dan dengan demikian jaringan-jaringan itu bersifat ekuivalen fungsional. Simbol ≡ dapat digunakan di antara jaringan-jaringan yang ekuivalen fungsional sebagaimana digunakan di antara bentuk-bentuk yang ekuivalen logis.

Contoh 1.11 mengilustrasikan penggunaan jaringan-jaringan yang ekuivalen fungsional untuk mewakili salah satu Hukum De Morgan dalam kaitannya dengan jaringan:

$$\textit{tidak}\ (p\ \textit{dan}\ q) \equiv (\textit{tidak}\ p)\ \textit{atau}\ (\textit{tidak}\ q).$$

Contoh 1.11

Buktikanlah kebenaran versi jaringan dari salah satu Hukum De Morgan berikut ini:



Jawab

Buatlah tabel input-output untuk tiap ruas ekuivalensi di atas untuk menunjukkan bahwa tiap kombinasi sinyal-sinyal input yang mungkin memberikan output yang sama. Berikut ini tabel untuk ruas kanan.

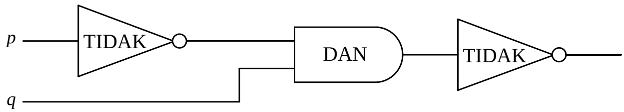
p	*q*	*TIDAK p*	*TIDAK q*	*(TIDAK p) ATAU (TIDAK q)*
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Nilai-nilai di kolom paling kanan adalah identik dengan nilai-nilai yang diselesaikan dalam Contoh 1.10 untuk jaringan di sebelah kiri.

Pada Contoh 1.10 dan Contoh 1.11, kita mulai dengan sebuah jaringan dan mengkonstruksi tabel input-output yang berkorespondensi dengannya. Kita juga mungkin memulai dengan sebuah jaringan dan menemukan bentuk logis yang berkorespondesi dengannya. Sebagian orang melakukan ini dengan menelusuri jaringan dari output menuju ke input daripada dengan bekerja dari input ke output.

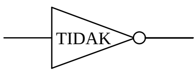
Contoh 1.12

Tentukanlah bentuk logis yang berkorespondensi dengan jaringan berikut ini.



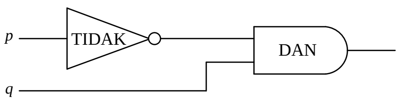
Jawab 1

Bacalah jaringan itu dari kanan ke kiri dan buatlah bentuk logisnya berdasarkan penelusuran Anda. Gerbang TIDAK membalikkan output dari bagian sebelumnya. Dengan demikian,



berkorespondensi dengan *tidak* ( ).

Juga



berkorespondensi dengan (*tidak p*) *dan q*.

Jadi keseluruhan jaringan itu berkorespondensi dengan ((*tidak p*) *dan q*).

Jawab 2

Bacalah jaringan itu dari kiri ke kanan, dengan menyimpan tiap langkah yang lebih awal dalam tanda kurung.

Komponen pertamanya adalah	*tidak p*
Komponen keduanya adalah	(*tidak p*) *dan q*
Komponen terakhirnya adalah	*tidak* ((*tidak p*) *dan q*)

Sifat-sifat aljabar dari *dan*, *atau*, dan *tidak* pertama kali disebutkan dan dikaji oleh George Boole (1815-1864) dalam bukunya *An Investigation of the Laws of Thought*, yang dipublikasikan pada tahun 1853. Meski Boole berasal dari keluarga miskin dan hanya memperoleh pendidikan formal selama tiga tahun, tetapi dia berhasil menjadi cendikiawan brilian yang tidak saja menyumbang pengetahuan baru ke dalam beberapa bidang matematika tetapi juga mengajarkan bahasa Latin dan Yunani.

Boole mengungkap bahwa operasi-operasi logis *dan*, *atau*, dan *tidak* dapat membentuk suatu sistem aljabar. Penemuan ini telah diterapkan pada situasi-situasi lain yang melibatkan dua nilai seperti ON-OFF, YES-NO, 1-0. Jika nilai-nilai itu dapat digabungkan dengan menggunakan operasi-operasi yang serupa dengan *dan*, *atau*, dan *tidak*, maka sistemnya disebut **aljabar Boole**.

Saat ini, aljabar Boole dalam elektronika merupakan aplikasi penting dari matematika. Aljabar ini digunakan untuk merancang sistem-sistem mikroprosesor. Aplikasi-aplikasi pertama aljabar Boole ke dalam analisis jaringan-jaringan dilakukan oleh A. Nakashima pada tahun 1937 dan Claude Shannon pada 1938. Bidang ini terus menjadi fokus dari penelitian aktif oleh para insinyur, ilmuwan komputer, dan matematikawan.

1.5 Pernyataan *Jika-maka*

Pernyataan jika-maka dapat ditemukan di mana-mana. Baik di dalam maupun di luar matematika, pernyataan *jika-maka* hadir apabila sebuah pernyataan dipandang muncul dari satu pernyataan lainnya. Di dalam matematika, pernyataan *jika-maka* membentuk landasan bagi bahasa deduksi dan bukti. Di dalam bagian ini, kita meninjau kembali bahasa pernyataan *jika-maka* yang telah pernah Anda pelajari dan menerapkan logika formal dari bagian-bagian sebelum ini ke dalam pernyataan semacam itu.

Suatu pernyataan berbentuk *Jika p maka q* disebut **pernyataan kondisional/bersyarat**, dilambangkan dengan "$p \Rightarrow q$", dan dibaca "*p menyimpulkan q*." Pernyataan p disebut **hipotesis** atau **anteseden**, dan pernyataan q disebut **konklusi** atau **konsekuen**, seperti dalam contoh ini.

$$\underbrace{\textit{Jika suatu segiempat adalah persegipanjang,}}_{\text{Hipotesis atau anteseden}}\ \underbrace{\textit{maka diagonal-diagonalnya saling membagi dua sama panjang.}}_{\text{Konklusi atau konsekuen}}$$

Bagaimanakah nilai kebenaran $p \Rightarrow q$ ditentukan oleh nilai-nilai kebenaran dari p dan q? Contoh berikut ini akan membantu Anda untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Misalkan $p(x) \Rightarrow q(x)$ adalah pernyataan kondisional *Jika* $x \geq 8$, *maka* $x^2 \geq 64$. Di sini, $p(x)$: $x \geq 8$ dan $q(x)$: $x^2 \geq 64$. Untuk semua bilangan real x, pernyataan kondisional ini benar. Sekarang kita lihat nilai-nilai kebenaran apa saja yang mungkin untuk $p(x)$ dan $q(x)$.

Jika $x \geq 8$, maka baik anteseden maupun konsekuennya benar. Misalnya, bila $x = 9$, $p(x)$ adalah $9 \geq 8$ dan $q(x)$ adalah $9^2 \geq 64$.

Jika $x \leq -8$, maka antesedennya salah dan konsekuennya benar. Misalnya, bila $x = -10$, $p(x)$ adalah $-10 \geq 8$ dan $q(x)$ adalah $-10^2 \geq 64$.

Jika $-8 < x < 8$, maka baik anteseden maupun konsekuennya salah. Misalnya, bila $x = 7$, maka $p(x)$ adalah $7 \geq 8$ dan $q(x)$ adalah $7^2 \geq 64$.

Jadi, dalam sebuah pernyataan kondisional yang benar, kita mungkin mendapatkan nilai-nilai kebenaran berikut ini untuk anteseden dan konsekuen:

anteseden	konsekuen
B	B
S	B
S	S

Perhatikan bahwa sebuah pernyataan kondisional yang benar dapat memiliki sebuah anteseden yang salah. Penalaran ini menunjukkan bahwa satu-satunya kombinasi nilai-nilai kebenaran yang tidak dapat dimiliki oleh pernyataan kondisional yang benar adalah anteseden yang benar dan konsekuen yang salah.

Sekarang perhatikan pernyataan kondisional berikut

$$\textit{Jika } x \geq 8, \textit{ maka } x^2 \geq 100.$$

Apakah terdapat nilai x yang membuat bentuk kondisional ini merupakan pernyataan yang salah? Tentu saja, jawabannya ya. Misalnya, jika $x = 9$, maka antesedennya adalah $9 \geq 8$, adalah benar, dan konsekuennya $9^2 \geq 100$, adalah salah.

Hasil dari analisis tersebut memberika definisi sebagai berikut.

Definisi 1.8

Misalkan p dan q mewakili pernyataan-pernyataan. Pernyataan kondisional $p \Rightarrow q$ adalah

salah bilamana p benar dan q salah

benar dalam semua kasus lainnya.

Seperti halnya dengan *tidak*, *dan*, dan *atau*, definisi ini dapat dirangkum dalam sebuah tabel kebenaran yang menunjukkan nilai-nilai kebenaran untuk *jika p maka q* yang berkorespondensi dengan semua pemberian nilai-nilai kebenaran yang mungkin untuk p dan q.

Tabel Kebenaran untuk Pernyataan Kondisional		
p	q	*jika p maka q* $p \Longrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh 1.13
Dosen Anda menjanjikan yang berikut ini di awal perkuliahan, "Jika total skor-skor tes Anda lebih dari 500, maka Anda akan mendapatkan nilai A untuk mata kuliah ini." Pada akhir masa perkuliahan, total skor Anda adalah 485 dan dosen Anda memberi Anda nilai A. Apakah dosen tersebut telah memenuhi janjinya?

Jawab
Janji adalah suatu pernyataan kondisional. Anteseden pada contoh di atas ternyata salah (485 tidak lebih dari 500) dan konsekuennya benar (Anda mendapatkan A). Dengan kombinasi ini, pernyataan kondisional tersebut benar. Jadi, kita akan katakan bahwa dosen Anda tersebut tidak mengingkari janjinya dan, dengan demikian, kita dapat katakan bahwa dia memenuhi janjinya.

Negasi dari sebuah pernyataan kondisional mestilah benar bila pernyataan kondisional itu salah. Hanya dalam baris kedua dari tabel kebenaran itu $p \Rightarrow q$ adalah salah. Ini terjadi bila p benar dan q salah. Namun demikian, q adalah salah bila *tidak* q adalah benar. Oleh karena itu, kita memperoleh teorema berikut ini.

Teorema 1.3 (Negasi Pernyataan Kondisional Sederhana):

Negasi dari pernyataan kondisional *jika p maka q* adalah *p dan* (*tidak q*).

Dituliskan secara simbolis: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p$ dan $(\sim q)$

Perhatian! Negasi dari suatu pernyataan kondisional *bukan* merupakan suatu pernyataan kondisional lainnya, melainkan suatu pernyataan-*dan*.

Contoh 1.14
Tulislah negasi dari pernyataan kondisional,

Jika Tino tinggal di Bandung, maka Tino tinggal di Jawa Barat.

Jawab
Misalkan p: *Tino tinggal di Bandung*, dan q: *Tino tinggal di Jawa Barat*. Pernyataan yang diberikan itu adalah pernyataan kondisional berbentuk *jika p maka q*. Oleh karena itu, negasinya berbentuk *p dan (tidak q)*, atau *Tino tinggal di Bandung dan Tino tidak tinggal di Jawa Barat*.

Salah satu jenis pernyataan yang paling penting dalam matematika adalah bersifat kondisional dan universal. Bentuk dari jenis pernyataan tersebut adalah

$\forall$ *x dalam S, jika p*(x)*, maka q*(x).

Misalnya, pernyataan kondisional universal berikut ini adalah benar.

$\forall$ *bilangan real positif x, jika* $x^2 > 9$*, maka* $x > 3$.

Tetapi perluasan domain x menjadi himpunan semua bilangan real menjadikan pernyataan tersebut salah.

$\forall$ *bilangan real x, jika* $x^2 > 9$*, maka* $x > 3$.

Alasan mengapa pernyataan yang kedua di atas salah adalah bahwa terdapat nilai-nilai x (misalnya, $x = -4$) untuk mana anteseden benar ($(-4)^2 > 9$ adalah benar) dan konsekuennya salah ($-4 > 3$ adalah salah). Karena definisi dari kebenaran dan kesalahan pernyataan kondisional, maka pernyataan kondisional tersebut salah untuk nilai-nilai ini, dan oleh karena itu, pernyataan kondisional tersebut tidak benar $\forall$ bilangan real x. Berkenaan dengan pernyataan-pernyataan universal yang lebih sederhana, -4 disebut sebuah **kontracontoh** (*counterexample*).

Teorema berikut menyebutkan gagasan ini secara simbolis: suatu pernyataan kondisional universal adalah salah jika dan hanya jika terdapat suatu kontracontoh.

Teorema 1.4 (Negasi Pernyataan Kondisional Universal)

> Misalkan S suatu himpunan dan misalkan $p(x)$ dan $q(x)$ pernyataan-pernyataan yang mungkin berlaku atau tidak berlaku untuk elemen-elemen x dalam S. Negasi dari
>
> $\forall$ *x dalam S, jika p*(x) *maka q*(x)
>
> adalah $\exists$ *x dalam S sedemikian hingga p*(x) *dan tidak q*(x)

Contoh 1.15

Perhatikan pernyataan berikut: $\forall$ *bilangan-bilangan real a dan b, jika a < b maka* cos *a* < cos *b.*

a. Tuliskan negasi dari pernyataan tersebut.

b. Apakah pernyataan tersebut benar atau salah? Jika salah, berikan sebuah kontracontoh.

Jawab

a. Negasi dari pernyataan tersebut adalah

$\exists$ *bilangan real a dan b sedemikian hingga a < b dan* cos *a* $\nless$ cos *b.*

b. Pernyataan tersebut salah. Sebagai kontracontoh, misalkan a=0 dan $b=\frac{\pi}{2}$ maka $a < b$ karena $0<\frac{\pi}{2}$, tetapi cos $a \nless$ cos b karena cos a = cos 0 = 1 dan cos b = cos $\frac{\pi}{2}$ = 0, sehingga $1 \nless 0$.

Kadang-kadang, pernyataan kondisional dibuktikan dengan menetapkan kontrapositifnya.

Definisi 1.9

> **Kontrapositif** dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$.
>
> **Kontrapositif** dari $\forall$ *x dalam S, jika p*(x) *maka q*(x) adalah $\forall$ *x dalam S, jika* $\sim q(x)$ *maka* $\sim p(x)$.

Tabel di bawah ini menunjukkan bahwa nilai-nilai kebenaran dari pernyataan kondisional $p \Rightarrow q$ dan kontrapositifnya $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ adalah sama.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$
B	B	B	S	S	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Nilai-nilai kebenaran sama

Tabel kebenaran di atas membuktikan teorema berikut ini.

Teorema 1.5 Kontrapositif

> Suatu pernyataan kondisional dan kontrapositifnya adalah ekuivalen logis. Yaitu, keduanya selalu memiliki nilai kebenaran yang sama.

Contoh 1.16
Tuliskan kontrapositif dari pernyataan berikut dan tentukan apakah kontrapositif itu benar atau salah: $\forall$ *bilangan real a, jika* $a^2 = 10$*, maka* $a^6 = 1000$.

Jawab
Kontrapositifnya adalah $\forall$ *bilangan real a, jika* $a^6 \neq 1000$*, maka* $a^2 \neq 10$.
Karena pernyataan aslinya benar, maka kontrapositifnya pun benar.

Dengan mengambil negasi atau menukarkan anteseden dan konsekuen dari suatu pernyataan kondisional, tetapi *bukan* melakukan kedua-duanya sekaligus, dua pernyataan kondisional lainnya dapat dimunculkan.

Definisi 1.10

> **Konvers** dari $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$.
>
> **Konvers** dari $\forall$ *x dalam S, jika p*(x) *maka q*(x) adalah $\forall$ *x dalam S, jika q*(x) *maka p*(x)
>
> **Invers** dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$.
>
> **Invers** dari $\forall$ *x dalam S, jika p*(x)*maka q*(x)adalah $\forall$ *x dalam S, jika* $\sim p(x)$*maka* $\sim q(x)$

Konvers dan invers mungkin tampak mirip dengan kontrapositif, tetapi, tidak seperti kontrapositif, baik konvers maupun invers tidak mesti memiliki nilai kebenaran yang sama dengan nilai kebenaran dari pernyataan aslinya.

Contoh 1.17

Tentukanlah konvers dan invers dari pernyataan kondisional universal

$\forall$ *fungsi-fungsi f, jika f adalah fungsi kosinus, maka f*(0) = 1.

Jawab

Konversnya adalah $\forall$ *fungsi-fungsi f, jika f*(0) = 1*, maka f adalah fungsi kosinus.*
Inversnya adalah $\forall$ *fungsi-fungsi f, jika f bukan fungsi kosinus, maka f*(0) $\neq$ 1.

Pernyataan kondisional asli di atas adalah benar karena cos 0 = 1. Tetapi konversnya tidak benar. Terdapat banyak fungsi f dengan $f(0) = 1$ yang bukan fungsi kosinus. Salah satunya adalah fungsi f yang diberikan oleh $f(x) = 3x + 1$ untuk semua bilangan real x. Fungsi tersebut juga merupakan kontracontoh yang menunjukkan bahwa invers dari pernyataan kondisional asli di atas pun tidak benar.

Saat diketahui pernyataan-pernyataan p dan q,

	p jika dan hanya jika q
berarti bahwa	(*jika p maka q*) *dan* (*jika q maka p*)
atau, secara simbolis,	$p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$.
Ini biasanya ditulis	$p \Leftrightarrow q$

dan disebut pernyataan **bikondisional**. Semua definisi adalah pernyataan-pernyataan bikondisional.

Contoh 1.18

Berikut ini adalah definisi logaritma dengan bilangan pokok 2. Uraikan pernyataan bikondisional ini menjadi dua pernyataan kondisionalnya.

$\forall$ *bilangan real positif* x, ${}^{2}\log x = y$ *jika dan hanya jika* $2^y = x$.

Jawab

$\forall$ *bilangan real positif* x, *jika* ${}^{2}\log x = y$ *maka* $2^y = x$.
$\forall$ *bilangan real positif* x, *jika* $2^y = x$ *maka* ${}^{2}\log x = y$.

1.6 Argumen yang Valid

Penguasaan logika dapat membantu Anda dalam membuat inferensi atau induksi yang benar serta dalam menentukan bilamana orang lain telah membuat deduksi yang tepat atau keliru. Lewis Carroll (psedonim dari Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898, seorang matematikawan, ahli logika, dan negarawan berkebangsaan Inggris), yang paling terkenal sebagai penulis buku dongeng *Alice in Worderland*, juga menuliskan dua buah buku teka-teki logika. Persoalan berikut ini diambil dan diterjemahkan dari salah satu buku tersebut.

Pikirkan kalimat-kalimat berikut:

(1) *Saat saya mengerjakan sebuah contoh logika tanpa mengeluh, Anda boleh yakin bahwa contoh itu dapat saya pahami.*

(2) *Contoh ini tidak tersusun dalam urutan lazim seperti yang biasa saya temukan.*

(3) *Tidak ada contoh mudah yang membuat saya pusing kepala.*

(4) *Saya tidak memahami contoh yang tidak tersusun dalam urutan lazim seperti yang biasa saya temukan.*

(5) *Saya mengeluh saat saya mengerjakan sebuah contoh hanya jika saya jadi pusing kepala.*

Anggaplah bahwa masing-masing kalimat (1)-(5) adalah benar. Apakah kesimpulan berikut ini juga benar?

(6) *Contoh ini tidak mudah.*

Kita akan memberikan jawaban untuk teka-teki di atas di akhir bagian ini. Sekarang, kita terlebih dulu mengembangkan metode-metode umum untuk memecahkannya.

Di dalam logika dan matematika, argumen tidak berarti perdebatan. Suatu **argumen** adalah serangkaian pernyataan-pernyataan di mana seluruh pernyataannya, kecuali yang terakhir, disebut **premis-premis**, sedangkan pernyataan akhirnya itu disebut **konklusi** (kesimpulan). Pada umumnya, kata-kata *dengan demikian*, atau sinonimnya, atau simbol ringkas $\therefore$ (dibaca "dengan demikian"), ditulis tepat sebelum konklusi.

Perhatikan dua argumen berikut ini.

(a) *Jika Yahya menyelesaikan soal itu dengan benar, maka Yahya mendapatkan jawaban* 10.

Yahya menyelesaikan soal itu dengan benar.

$\therefore$ *Yahya mendapatkan jawaban* 10.

(b) *Untuk semua bilangan real* x, *jika* $x > 3$, *maka* $2x^2 - x - 15 > 0$.

$\pi > 3$

$\therefore\ 2\pi^2 - \pi - 15 > 0$.

Meski pokok bahasan dari argumen (a) dan argumen (b) sangat berbeda, namun bentuk-bentuk dari argumen-argumennya sangat mirip. Premis-premisnya adalah sebuah pernyataan kondisional dan antesedennya. Konklusinya adalah konsekuennya. Berikut ini adalah dua versi yang dimaksudkan di atas.

Versi (a)	Versi (b)
Bentuk sederhana	Bentuk universal
Jika p maka q	$\forall$ *x, jika p*(*x*), *maka q*(*x*)
p	*p*(*c*), *untuk suatu c tertentu*
$\therefore$ *q*.	$\therefore$ *q*(*c*).

Bentuk sederhana di atas memiliki sebuah sifat yang sangat penting: tidak masalah pernyataan-pernyataan apa saja yang ditempatkan untuk menggantikan *p* dan *q* dalam premis-premis, nilai kebenaran dari bentuk itu adalah benar. Bentuk universal memiliki sifat serupa: tidak masalah kondisi-kondisi apa yang ditempatkan untuk menggantikan $p(x)$ dan $q(x)$ dalam premis-premis, nilai kebenaran dari bentuk itu benar. Setiap argumen yang memiliki sifat demikian disebut **valid**. Fakta bahwa versi (a) dan versi (b) tadi adalah valid disebut *Hukum Ketidakberpihakan*, atau *Law of Detachment* (karena antesedennya terpisahkan dari pernyataan kondisionalnya) atau *modus ponens* (yaitu istilah Latin untuk "metode pengukuhan").

Kita buktikan validitas untuk bentuk sederhana dari Hukum Ketidakberpihakan di bawah ini, sedangkan pembuktian validitas bentuk universal memerlukan suatu teknik yang berada di luar cakupan bahasan kita saat ini.

Teorema 1.6 (Modus Ponens atau Hukum Ketidakberpihakan)

Berikut ini adalah bentuk-bentuk argumen yang valid:

Jika p maka q	$\forall$ *x, jika p*(*x*), *maka q*(*x*)
p	*p*(*c*), *untuk suatu c tertentu*
$\therefore$ *q*.	$\therefore$ *q*(*c*).

Bukti

Premis-premisnya adalah $(p \Rightarrow q)$ dan *p*. Untuk membuktikan Hukum Ketidakberpihakan, kita harus menunjukkan bahwa pernyataan kondisional

$$((p \Rightarrow q) \text{ dan } p) \Rightarrow q$$

adalah selalu benar. Oleh karena itu, kita konstruksi sebuah tabel kebenaran yang menunjukkan semua nilai kebenaran yang mungkin untuk *p* dan *q*. Selanjutnya kita berikan nilai-nilai kebenaran untuk premis-premis, konklusi, dan bentuk argumennya. Karena semua baris dalam kolom bentuk itu benar, maka argumen tersebut adalah valid.

premis-premis: $p \Rightarrow q$, p; konklusi: q; bentuk: $((p \Rightarrow q)\ dan\ p) \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	p	$(p \Rightarrow q)\ dan\ p$	q	$((p \Rightarrow q)\ dan\ p) \Rightarrow q$
B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	S	S	S	B

Perhatikan bahwa isian pada kolom bentuk hanya akan salah jika semua premisnya benar dan konklusinya salah. Dengan demikian, Anda dapat memandang sebuah argumen yang valid dalam cara berikut: Sebuah argumen adalah valid jika dan hanya jika saat semua premisnya benar, maka konklusinya benar.

Konklusi dari argumen yang valid disebut **konklusi yang valid**. Di dalam suatu argumen yang valid, kebenaran premis-premis menjamin kebenaran konklusinya. Namun demikian, jika salah satu dari premis-premis itu salah, maka konklusinya, meski valid, mungkin saja salah. Jadi, sebuah konklusi yang valid tidak niscaya merupakan suatu konklusi yang benar.

Perhatikan argumen berikut ini:

Jika sebuah negara berpenduduk lebih dari 200 *juta, maka negara itu mengimpor lebih daripada mengekspor.*

Jepang berpenduduk lebih dari 200 *juta.*

$\therefore$ *Jepang mengimpor lebih daripada mengekspor.*

Argumen di atas valid (oleh Hukum Ketidakberpihakan), tetapi konklusi-nya salah. Pada kasus tersebut, tidak ada satu pun premisnya yang benar. Secara umum, bahkan cara berpikir yang jernih dari premis-premis yang salah memiliki resiko. Jangan percayai konklusi-konklusi, kecuali Anda yakin tentang premis-premis dari mana kesimpulan itu diambil.

Hukum Ketidakberpihakan memungkinkan Anda untuk membuat deduksi tunggal. Bentuk yang kedua dari argumen yang valid memungkinkan Anda untuk membangun rantai-rantai deduksi. Dari premis-premis:

Jika sebuah bangun adalah persegi, maka bangun itu adalah jajargenjang.

Jika sebuah bangun adalah jajargenjang, maka diagonal-diagonal itu saling membagi-dua sama panjang.

Anda dapat mendeduksi

Jika sebuah bangun adalah persegi, maka diagonal-diagonalnya saling membagi-dua sama panjang.

Fakta ini mencontohkan Hukum Transitifitas. Hukum Transitifitas memungkinkan Anda untuk mendeduksi suatu pernyataan *jika-maka*.

Teorema 1. 7 (Hukum Transitifitas)

Berikut ini adalah bentuk-bentuk argumen yang valid:

<u>Bentuk sederhana</u>	<u>Bentuk universal</u>
jika p maka q	$\forall$ *x, jika p*(*x*), *maka q*(*x*)
jika q maka r	$\forall$ *x, jika q*(*x*), *maka r*(*x*)
$\therefore$ *jika p maka r.*	$\therefore$ $\forall$ *x, jika p*(*x*), *maka r*(*x*).

Bukti dari teorema ini diberikan berikut ini untuk bentuk sederhana.

Bukti

Terlebih dulu tulislah bentuk argumen tersebut sebagai pernyataan kondisional.

$$((p \Rightarrow q) \text{ dan } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Selanjutnya, konstruksilah sebuah tabel kebenaran dan tunjukkan bahwa pernyataan kondisional ini selalu benar. Karena terdapat tiga pernyataan *p*, *q*, dan *r*, maka tabel ini memiliki 8 baris. Coba lengkapi tabel di bawah ini dan selesaikanlah bukti tersebut.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)$ dan $(q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q)$ dan $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B					
B	B	S					
B	S	B	S	B	S	B	B
B	S	S					
S	B	B					
S	B	S					
S	S	B					
S	S	S					

Mengenali bentuk dari suatu argumen adalah langkah penting dalam menentukan valid atau tidak validnya suatu argumen.

Contoh 1.18

Tulislah bentuk dari argumen berikut ini:

> $\forall$ *segibanyak x, jika x adalah suatu segienam, maka hasiljumlah besarnya sudut-sudut dalam x adalah* 720°.
>
> *Sebuah segibanyak tertentu c memiliki hasiljumlah besarnya sudut-sudut* 540°.
>
> $\therefore$ *c bukan sebuah segienam*.

Jawab

Misalkan $p(x)$ dan $q(x)$ mewakili pernyataan-pernyataan berikut ini:

$p(x)$: *x adalah sebuah segienam.*

$q(x)$: *hasiljumlah besarnya sudut-sudut dalam dari x adalah* 720°.

Maka argumen di atas memiliki bentuk berikut ini.

$\forall$ *x, jika* $p(x)$ *maka* $q(x)$

tidak q(c) untuk sebuah c tertentu

$\therefore$ *tidak* $p(c)$.

Hukum yang menyatakan bahwa bentuk dari argumen dalam Contoh 1.18 adalah valid disebut *modus tollens* (yaitu, istilah Latin untuk "metode penyangkalan") atau *Hukum Penalaran Tidak-langsung*, seperti dirumuskan berikut ini.

Teorema 1.8 (Modus Tollens atau Hukum Penalaran Tidak-langsung)

Berikut ini adalah bentuk argumen yang valid:

Bentuk sederhana	Bentuk universal
Jika p maka q	$\forall$ *x, jika* $p(x)$ *maka* $q(x)$
tidak q	*tidak* $q(c)$ *untuk sebuah c tertentu.*
$\therefore$ *tidak p.*	$\therefore$ *tidak* $p(c)$ *untuk c itu.*

Contoh 1.19

Misalkan premis (1) dan premis (2) adalah kedua-duanya benar.

(1) Jika Lisa sakit, maka dia demam.

(2) Lisa tidak demam.

Konklusi benar apakah yang dapat Anda deduksi?

Jawab

Premis-premis di atas sesuai dengan bentuk premis-premis dari *modus tollens*. Konklusi benar yang dapat Anda deduksi adalah adalah *Lisa tidak sakit*.

Kita sekarang telah siap untuk membahas kembali teka-teki Lewis Carroll. Kita ingin memutuskan apakah konklusi *Contoh ini tidak mudah* diperoleh dari premis-premisnya. Agar kita dapat menerapkan teorema-teorema yang telah dipelajari, kita tuliskan premis-premis dalam teki-teki tersebut menjadi bentuk *jika-maka*.

(1) *Jika saya mengerjakan sebuah contoh logika tanpa mengeluh, maka Anda boleh yakin bahwa contoh itu dapat saya pahami.*

(3) *Jika contohnya mudah, maka contoh itu tidak membuat saya pusing kepala.*

(4) *Jika sebuah contoh tidak tersusun dalam urutan lazim seperti yang biasa saya temukan, maka saya tidak dapat memahami contoh itu.*

(5) *Jika saya mengeluh saat saya mengerjakan sebuah contoh, maka contoh itu membuat saya pusing kepala.*

(Ingat kembali definisi hanya jika dari Bagian 1-5.)

Satu premis lainnya adalah pernyataan sederhana

(2) *Contoh ini tidak tersusun dalam urutan lazim seperti yang biasa saya temukan.*

dan konklusinya adalah pernyataan sederhana

(6) *Contoh ini tidak mudah.*

Untuk menerapkan tiga bentuk argumen yang valid, kita sebaiknya menampilkan pernyataan-pernyataan tersebut secara simbolis seperti berikut:

$\sim k$: *Saya mengerjakan contoh logika ini tanpa mengeluh.*

p : *Contoh logika ini adalah contoh yang dapat saya pahami.*

m : *Contoh ini mudah.*

$\sim h$: *Contoh ini tidak membuat saya pusing kepala.*

$\sim l$: *Contoh ini tidak tersusun dalam urutan lazim seperti yang biasa saya temukan.*

Dengan simbol-simbol ini, premis-premis yang diberikan memberitahukan kepada kita bahwa

(1) *Jika ~k maka p.*

(2) *~l*

(3) *Jika m maka ~h.*

(4) *Jika ~l maka ~p.*

(5) *Jika k maka h.*

Kita harus menyimpulkan

(6) *~m*

Sekarang kita susun kembali premis-premisnya: dimulai dengan (2) (satu-satunya premis yang tidak dapat diubah ke dalam bentuk *jika-maka*), kita membangun suatu rantai pernyataan-pernyataan *jika-maka* di mana konsekuen dari tiap pernyataan *jika-maka* itu adalah anteseden dari pernyataan selanjutnya; diakhiri dengan (6) (konklusinya). Untuk melakukan hal tersebut, kita menggunakan Teorema Kontrapositif dari Bagian 1-5 untuk mengubah pernyataan (1) dan pernyataan (3) ke dalam bentuk-bentuk kontrapositif yang ekuivalen, yaitu (1′) dan (3′).

(2) *~l*

(4) *Jika ~l maka ~p.*

(1′) *Jika ~p maka k.* bentuk kontrapositif

(5) *Jika k maka h.*

(3′) *Jika h maka ~m.* bentuk kontrapositif

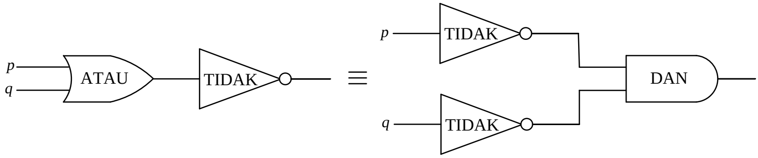
Sekarang, dengan diterapkannya Hukum Ketidakberpihakan sebanyak empat kali kita mendapatkan bahwa konklusinya adalah *~m*, atau *Contoh ini tidak mudah*. Dengan demikian, jawaban untuk pertanyaan di awal bagian ini adalah ya: konklusi *Contoh ini tidak mudah* diperoleh dari premis-premisnya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Gunakan versi jaringan untuk Hukum De Morgan di bawah ini.

tidak (*p atau q*) ≡ (*tidak p*) *dan* (*tidak q*)



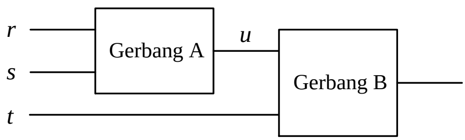
a. Tuliskan tabel input-output untuk ruas kiri dari tanda ≡ .
b. Tuliskan tabel input-output untuk ruas kanan dari tanda ≡ .
c. Mengapa jawaban Anda untuk bagian (a) dan (b) mengukuhkan bahwa dua jaringan itu ekuivalen fungsional.

2. Dua gerbang logika, Gerbang A dan Gerbang B, memiliki tabel-tabel input-output:

Gerbang A		
input *r*	input *s*	output *u*
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Gerbang B		
input *t*	input *u*	output
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	0

Gerbang-gerbang ini dipasangkan ke dalam jaringan berikut ini.



Lengkapilah tabel input-output di sebelah kanan ini untuk jaringan di atas.

r	*s*	*t*	*u*	*output jaringan*
1	1	1		
1	1	0		
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

3. Misalkan x suatu bilangan real. Perhatikan pernyataan:

$$\textit{Jika } x > 1 \textit{ maka } 2x^2 + 3x^3 > 1.$$

   a. Tentukan anteseden, konklusi, konsekuen, dan hipotesisnya.
   b. Apakah pernyataan kondisional di atas benar atau salah?

4. Perhatikan tiap keterangan berikut ini dan jawablah pertanyaannya.

   a. Pernyataan p ***hanya jika*** q adalah ekuivalen logis dengan *jika p maka q*. Tuliskan kembali pernyataan berikut dalam bentuk *jika-maka*:
   Sebuah satelit adalah dalam orbit hanya jika satelit itu berada pada ketinggian paling tidak 200 *mil di atas permukaan Bumi.*
   b. "*p adalah **syarat cukup** untuk q*" adalah satu cara lain untuk mengatakan bahwa $p \Rightarrow q$. Tuliskan pernyataan berikut dalam bentuk *jika-maka*:
   Memiliki bentuk 2*k untuk suatu bilangan bulat k adalah syarat cukup untuk suatu bilangan bulat disebut genap.*
   c. "*p adalah **syarat mesti** untuk q*" adalah satu cara lain untuk mengatakan bahwa $q \Rightarrow p$. Tuliskanlah pernyataan berikut dalam bentuk *jika-maka*:
   Memiliki IPK 3,5 *adalah syarat mesti untuk dipilih menjadi anggota civitas kehormatan.*

5. Tuliskan kontrapositif dari pernyataan berikut ini, kemudian tentukan apakah kontrapositif itu benar atau salah.
   Jika sebuah segiempat memiliki dua sisi yang sama panjang, maka segiempat itu memiliki dua sudut yang sama besar.

6. Perhatikan argumen berikut:

   Untuk semua bilangan bulat n, jika n habis dibagi 3 maka hasilkuadratnya habis dibagi 9.
   10 *habis dibagi oleh* 3.
   $\therefore$ 10^2 *habis dibagi oleh* 9.

   a. Tentukan premis-premis dari argumen di atas.
   b. Tentukan konklusi dari argumen tersebut.
   c. Tuliskan bentuk dari argumen tesebut.
   d. Apakah konklusinya benar?
   e. Apakah konklusinya valid?

7. a. Tuliskan Hukum Penalaran Tidak-langsung dengan memakai simbol-simbol ~ dan ⇒.
   b. Buktikanlah bentuk sederhana dari Hukum Penalaran Tidak-langsung.

8. Perhatikan pernyataan-pernyataan dalam adaptasi teka-teki Lewis Carroll berikut ini.
   (1) Jika suatu aksi akrobatik adalah mungkin, maka aksi akrobatik itu tidak melibatkan gerakan jungkir balik empat kali.
   (2) Jika suatu aksi akrobatik adalah tidak mungkin, maka aksi akrobatik itu tidak dicantumkan dalam jadwal sirkus.
   (3) Jika suatu aksi akrobatik tidak dicantumkan dalam jadwal sirkus, maka aksi akrobatik itu tidak dilakukan oleh para akrobat sirkus.

   Deduksilah sebuah konklusi yang valid. (*Petunjuk:* Anda barangkali perlu menuliskan kontrapositif dari beberapa pernyataan di atas.)

Petunjuk Jawab Latihan

1. a.

p	*q*	*p ATAU q*	*TIDAK (p ATAU q)*
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

   b.

p	*q*	*TIDAK p*	*TIDAK q*	*(TIDAK p) DAN (TIDAK q)*
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

   c. Asalkan diberikan input-input yang sama, kedua jaringan itu menghasilkan output yang sama

2.

r	*s*	*t*	*u*	*output jaringan*
1	1	1	**0**	**0**
1	1	0	**0**	**0**
1	0	1	**1**	**1**
1	0	0	**1**	**1**
0	1	1	**0**	**0**
0	1	0	**0**	**0**
0	0	1	**0**	**0**
0	0	0	**0**	**0**

3. a. Anteseden, hipotesis: $x > 1$; konklusi, konsekuen: $2x^2 + 3x^3 > 1$.
   b. Benar

4. a. *Jika suatu satelit adalah dalam orbit, maka satelit itu berada pada ketinggian paling sedikit* 200 *mil di atas permukaan Bumi.*
   b. *Jika suatu bilangan bulat berbentuk* 2*k untuk suatu bilangan bulat k, maka bilangan bulat itu adalah genap.*
   c. *Jika seseorang dipilih menjadi anggota civitas kehormatan, maka dia mesti memiliki IPK paling sedikit* 3,5.

5. Jika *suatu segiempat tidak memiliki dua sudut yang sama besar, maka segiempat itu tidak memiliki dua sisi yang sama panjang.* Kontrapositif ini salah.

6. a. *Untuk semua bilangan bulat n, jika n terbagi habis oleh* 3*, maka hasilkuadratnya terbagi habis oleh* 9.
   10 *terbagi habis oleh* 3.
   b. 10^2 terbagi habis oleh 9.
   c. $\forall$ *bilangan bulat n, jika* $p(n)$*, maka* $q(n)$*;* $p(c)$*, untuk suatu c tertentu*; $\therefore\ q(c)$.
   d. Tidak
   e. Ya

7. a. $P \Rightarrow q$
   $\sim p$
   $\therefore \sim p$

   b. Buktikan dengan menggunakan tabel kebenaran. Tunjukkan bahwa $((p \Rightarrow q)\ dan\ {\sim q}) \Rightarrow {\sim p}$ adalah benar.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$((p \Rightarrow q)\ dan \sim q)$	$\sim p$	$((p \Rightarrow q)\ dan \sim q) \Rightarrow \sim p$
B	B	B	B	S	S	S	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	S	S	B	B
S	B	S	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

8. Jika suatu aksi akrobatik melibatkan gerakan jungkir balik empat kali, maka aksi akrobatik itu tidak dilakukan oleh para akrobat sirkus.

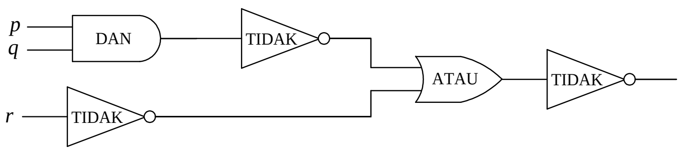
RANGKUMAN

1. Kata-kata *dan*, *atau*, dan *tidak* memiliki aplikasi-aplikasi bagi bidang desain dan evaluasi jaringan-jaringan logika komputer.
2. Pernyataan-pernyataan kondisional, dilambangkan dengan $p \Rightarrow q$, adalah salah hanya pada sehimpunan keadaan: bila anteseden benar dan konsekuennya salah. Seperti halnya pernyataan eksistensial dan pernyataan universal, pernyataan-pernyataan kondisional dapat dituliskan dalam beragam bentuk. Suatu pernyataan kondisional dan kontrapositifnya adalah ekuivalen logis, artinya, mereka memiliki nilai-nilai kebenaran yang sama. Namun demikian, pernyataan kondisional dan konversnya mungkin memiliki nilai-nilai kebenaran yang berbeda, seperti juga halnya pernyataan kondisional dan inversnya.
3. Suatu argumen terdiri atas premis-premis dan sebuah konklusi. Suatu argumen dikatakan valid jika sebarang argumen dengan bentuk sepertinya yang memiliki premis-premis benar ternyata memiliki konklusi yang benar. Hukum-hukum Ketidakberpihakan (modus ponens), Penalaran Tidak-langsung (*modus tollens*), dan Transitifitas adalah bentuk-bentuk argumen yang valid.

TES FORMATIF 2

Selesaikan soal-soal tes berikut ini!

1. Tuliskan suatu ekspresi logis untuk mendeskripsikan jaringan berikut ini.



2. Tuliskan invers dan konvers dari
   Jika hujan turun hari ini, maka hujan akan turun besok.
3. Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa $p \Rightarrow q$ tidak ekuivalen logis dengan $q \Rightarrow p$.
4. Tentukan apakah argumen di bawah ini valid, kemudian sebutkan bentuk argumen validnya.

$\forall$ *bilangan real x, jika* $x > 2$, *maka* $x^2 > 4$.
$\forall$ *bilangan real x, jika* $x^2 > 4$, *maka* $3x^2 - 9 > 3$.
$\therefore$ $\forall$ *bilangan real x, jika* $x > 2$, *maka* $3x^2 - 9 > 3$.

5. Deduksilah suatu konklusi yang valid dari tiga premis yang benar berikut ini.
   (1) *Diagonal-diagonal dari suatu jajargenjang saling membagi dua.*
   (2) *Semua belahketupat adalah jajargenjang.*
   (3) *ABCD adalah suatu belahketupat.*

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada akhir modul ini . Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. (Tiap soal memiliki total bobot nilai 1. Jika sebuah soal terdiri atas beberapa butir pertanyaan, maka bobot nilai dari satu butir pertanyaan adalah $\frac{1}{\text{jumlah butir pertanyaan dalam soal}}$.) Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100%	=	Baik sekali
80% - 89%	=	Baik
70% - 79%	=	Cukup
- 69%	=	Kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, maka Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. *Bagus!* Jika tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Bukti tentang Bilangan Bulat, Argumen yang Tidak Valid, dan Ragam Penalaran

1.7. Bukti-bukti tentang Bilangan Bulat

Di bagian ini, prinsip-prinsip logis dari bagian-bagian sebelum-nya diterapkan pada bukti-bukti sederhana. Di sini sengaja dikedepan-kan muatan yang telah tidak asing lagi bagi Anda, sehingga Anda dapat berkonsentrasi pada logikanya. Untuk itu Anda harus mengetahui postulat-postulat tentang penjumlahan dan perkalian bilangan-bilangan bulat: ketertutupan, asosiativitas, komutativitas, dan disitributivitas, serta sifat-sifat penjumlahan dan perkalian persamaan.

Suatu **konjektur** (dugaan) adalah pernyataan yang kita yakini benar tetapi belum terbuktikan. Perhatikan konjektur berikut ini:

Jika m dan n sebarang bilangan genap, maka $m + n$ adalah sebuah bilangan genap.

Anda tentu mengetahui bahwa terdapat bilangan-bilangan genap m dan n sedemikian hingga $m + n$ adalah genap. Tetapi bagaimana tentang semua hasiljumlah dari bilangan-bilangan genap? Apakah Anda yakin bahwa hasiljumlahnya selalu genap?

Untuk membuktikan konjektur itu, sangat pentinglah Anda mengetahui makna yang tepat untuk semua istilah yang digunakan di dalamnya. Apakah makna dari istilah *bilangan bulat genap*? Apakah 0 genap? Apakah –554 genap? Apakah $\frac{8}{6}$ genap? Beberapa orang mungkin berpikir bahwa 6, 8, –2, dan –10 adalah bilangan bulat genap sedangkan 1, 5, –1, –17 bukan bilangan bulat genap. Ini memang benar, tetapi ini bukanlah sebuah definisi bilangan bulat genap karena gagasan tersebut tidak memberikan kriteria pasti untuk memutuskan apakah suatu bilangan selain yang dicantumkan di sana adalah genap. Pernyataan di bawah ini adalah sebuah definisi biasa, yang menyebut-kan bahwa suatu bilangan genap adalah bilangan yang dua kali dari suatu bilangan bulat lainnya.

Definisi 1.11

> Bilangan bulat n adalah genap jika dan hanya jika $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k.

Serupa dengan itu, kita dapat mendefinisikan konsep untuk bilangan bulat ganjil. Sebuah bilangan bulat ganjil adalah bilangan yang lebih 1 dari sebuah bilangan bulat genap.

Definisi 1.12

> Bilangan bulat n adalah ganjil jika dan hanya jika $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k.

Perhatikan contoh-contoh berikut ini.
0 adalah bilangan bulat genap karena $0 = 2 \times 0$. Di sini $n = 0$ dan $k = 0$.

–554 adalah bilangan bulat genap karena $-554 = 2 \times (-227)$ dan –277 adalah suatu bilangan bulat. Di sini, $n = -554$ dan $k = -277$.

–177 adalah bilangan bulat ganjil karena $-177 = 2 \times (-89) + 1$ dan –89 adalah suatu bilangan bulat. Di sini, $n = -177$ dan $k = -89$.

$\frac{8}{6}$ adalah tidak genap maupun ganjil, karena $\frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ dan sebagainya bukanlah bilangan bulat.

Gagasan serupa dapat digunakan dengan bentuk-bentuk aljabar.

Contoh 1.20
Misalkan a, b, x, dan y adalah bilangan-bilangan bulat. Tunjukkan bahwa:

a. $6x^2y$ adalah genap.
b. $14a + 4b + 3$ adalah ganjil.

Jawab

a. $6x^2y = 2 \times (3x^2y)$ dan $3x^2y$ adalah bilangan bulat karena himpunan bilangan-bilangan bulat itu tertutup dalam perkalian. Jadi, dengan definisi *genap*, $6x^2y$ adalah genap.

b. $14a + 4b + 3 = 2(7a + 2b + 1) + 1$. Sekarang, $7a + 2b + 1$ adalah bilangan bulat karena himpunan bilangan-bilangan bulat itu tertutup dalam penjumlahan dan perkalian. Jadi, dengan definisi *ganjil*, $14a + 4b + 3$ adalah ganjil.

Berikut ini sebuah bukti dari konjektur bahwa hasil jumlah dari dua bilangan bulat genap adalah genap. Setelah bukti tersebut, perhatikan analisis logisnya.

Bukti
Misalkan bahwa m **dan** n **adalah sebarang bilangan bulat genap. Berdasarkan definisi** ***genap*****, terdapat bilangan-bilangan bulat** r **dan** s **sedemikian hingga** $m = 2r$ **dan** $n = 2s$**.**
Dengan subtitusi, $m + n = 2 \times r + 2 \times s$
$= 2 \times (r + s)$
dengan Sifat Distributif. Karena $r + s$ **adalah suatu bilangan bulat, maka berdasarkan definisi** ***genap*** **diperoleh bahwa** $m + n$ **adalah genap**.

Bukti ini mengukuhkan konjektur tersebut sebagai suatu teorema.

Teorema 1.9 (Hasil jumlah Dua Bilangan Genap)

> Jika m dan n adalah bilangan-bilangan bulat genap, maka $m + n$ adalah bilangan bulat genap.

Setelah memperhatikan sebuah bukti dengan cetak tebal, Anda diharapkan mampu menuliskan bukti seperti itu. Berikut ini disajikan cara bagaimana Anda dapat menelaah sendiri bukti tersebut.

Amati bahwa teorema itu dapat ditulis dalam bentuk pernyataan kondisional universal:

$\forall$ *bilangan bulat m dan n, jika m dan n genap, maka m + n juga genap.*

Buktinya dimulai dengan memisalkan m dan n sebagai bilangan-bilangan bulat genap. Kata *sebarang* (atau, *mana saja*) digunakan karena teorema itu harus dibuktikan untuk *setiap* pasang bilangan bulat genap, bukan untuk beberapa contoh saja.

Di dalam bukti itu, kedua arah dari bentuk *jika-dan-hanya-jika* dari definisi genap digunakan. Di bagian awal, fakta bahwa

Jika t genap maka t = 2*k untuk suatu bilangan bulat k*

digunakan untuk mendeduksi bahwa $m = 2 \times r$ dan $n = 2 \times s$ untuk bilangan bulat r dan s. Kita menambahkan $2r$ dan $2s$ karena konsekuennya berkenaan dengan $m + n$. Fakta bahwa

Jika t = 2*k untuk suatu bilangan bulat k, maka t adalah genap*

digunakan untuk mendeduksi bahwa $m + n$ adalah genap karena bentuknya suatu bilangan bulat genap. Dan bukti tersebut selesai.

Perhatikan juga bahwa dua huruf berbeda, yaitu r dan s, digunakan dalam menuliskan m dan n. Alasannya yaitu bahwa m dan n diasumsikan sebagai *sebarang* bilangan bulat genap. Meski pun masuk akal bahwa m dan

n mungkin sama, tetapi kemungkinannya yaitu bahwa m dan n tidak sama. Jika huruf yang sama, misalkan r, telah digunakan untuk mewakili m dan n sekaligus, maka kita akan mesti mendapatkan

$m = 2 \times r$ *dan* $n = 2 \times r$ *dan dengan demikian* $m = n$,

yang barangkali tidak demikian kejadiannya.

Metode bukti ini dikenal sebagai bukti langsung karena Anda bergerak secara langsung dari hipotesis ke konklusinya. Kebanyakan bukti dalam matematika adalah bukti langsung. Karena nilai pentingnya, metode ini dirangkumkan di bawah ini.

Metode Bukti Langsung untuk Pernyataan Kondisional Universal

1. Tuliskan pernyataan yang akan dibuktikan dalam bentuk x *dalam* S, *jika* $p(x)$ *maka* $q(x)$. (Langkah ini seringkali dilakukan secara mental/dalam pikiran.)
2. Mulailah bukti dengan memisalkan bahwa x adalah sebarang anggota dalam S untuk mana anteseden $p(x)$ adalah benar.
3. Gunakan definisi-definisi dari istilah-istilah yang muncul dalam $p(x)$ dan $q(x)$ serta sifat-sifat lain yang diketahui untuk membuat suatu rantai deduksi-deduksi yang berakhir dengan $q(x)$.

Sekarang kita telaah logika dari bukti tersebut. Berikut ini adalah langkah-langkahnya, dituliskan dalam bentuk *jika-maka*.

Konklusi-konklusi	*Justifikasi-justifikasi*
1. m dan n adalah sebarang bilangan bulat genap $m = 2r$ dan $n = 2s$ di mana r dan s adalah bilangan- bilangan bulat.	Definisi genap
2. $m = 2r$ dan $n = 2s \Rightarrow m + n = 2r + 2s$	Sifat penjumlahan dari persamaan
3. $m + n = 2r + 2s \Rightarrow m + n = 2(r + s)$ dan $r + s$ adalah suatu bilangan bulat	Sifat distributif; ketertutupan bilangan-bilangan bulat dalam penjumlahan
4. $m + n = 2(r + s)$ dan $r + s$ adalah suatu bilangan bulat $\Rightarrow m + n$ adalah genap	Definisi genap

Masing-masing langkah di atas merupakan contoh dari pernyataan universal yang disebutkan di sebelah kanan. Konklusi *m dan n adalah sebarang* *bilangan bulat genap* $\Rightarrow$ *m* + *n adalah genap* muncul dengan Hukum Transitifitas.

Misalkan *m* = 2.624.316 dan *n* = 111.778. Sekarang Anda mengetahui bahwa 2.624.316 adalah genap dan 111.778 adalah genap, serta Anda mendapatkan teorema $\forall$ *m dan n, m dan n adalah genap* $\Rightarrow$ *m* + *n adalah genap*. Jadi, dengan substitusi, Anda mendapatkan 2.624.316 *dan* 111.778 *adalah genap* $\Rightarrow$ 2.624.316 + 111.778 *adalah genap*. Anda dapat menyimpulkan 2.624.316 + 111.778 *adalah genap* dengan Hukum Ketidakberpihakan.

Berikut ini satu contoh lain dengan bukti langsung yang sangat serupa.

Contoh 1.21

Buktikan teorema berikut: *Jika m adalah genap dan n ganjil, maka m + n adalah ganjil.*

Jawab

Terlebih dulu tuliskan teorema di atas sebagai

$\forall$ *bilangan bulat m dan n, jika m genap dan n ganjil, maka m + n adalah ganjil.*

Mulailah bukti dengan memisalkan bahwa *m* genap dan *n* ganjil. Gunakan definisi bilangan bulat genap dan bilangan bulat ganjil dari awal bukti sampai ke konklusi bahwa *m* + *n* adalah ganjil.

Misalkan *m* **adalah sebarang bilangan bulat genap dan** *n* **sebarang bilangan bulat ganjil. Berdasarkan definisi suatu bilangan bulat genap,** $m = 2r$**, untuk suatu bilangan bulat** *r***. Dengan definisi bilangan bulat ganjil,** $n = 2s + 1$ **untuk suatu bilangan bulat** *s***. Maka**

$$\begin{aligned} m + n &= 2r + (2s + 1) \\ &= 2r + 2s + 1 \\ &= 2(r + s) + 1 \end{aligned}$$

Karena $r + s$ **adalah bilangan bulat,** $m + n$ **adalah suatu bilangan bulat ganjil.**

1-8 Argumen-argumen Yang Tidak Valid

Pada bagian 1-6, tiga bentuk argumen yang valid telah dikemukakan. Beberapa bentuk argumen lainnya seringkali digunakan oleh orang-orang tetapi ternyata tidak valid. Suatu bentuk argumen adalah **tidak valid** jika dan hanya jika terdapat argumen yang premis-premisnya benar dan konklusinya salah.

Perhatikan argumen di bawah ini

Jika seseorang adalah anggota orkestra, maka orang itu memainkan sebuah alat musik.

Risma memainkan sebuah alat musik.

$\therefore$ *Risma adalah seorang anggota orkestra.*

Argumen ini berbentuk

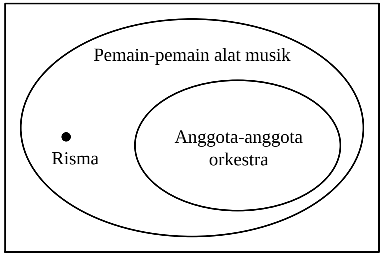
$\forall$ *x*, *jika p*(*x*) *maka q*(*x*).

q(*c*), *untuk suatu c tertentu*.

$\therefore$ *p*(*c*).

di mana *p*(*x*): *x adalah seorang anggota orkestra*;

q(*x*): *x memainkan sebuah alat musik*; dan *c* = *Risma*.



Meski Anda mungkin menerima argumen ini dan menyangkanya valid, tetapi ini sebenarnya tidak valid. Diagram di kanan-atas ini mengilustrasikan situasi di mana semua anggota orkestra memainkan alat-alat musik dan Risma memainkan alat musik, tetapi Risma bukan anggota dari orkestra tersebut. Jadi mungkin saja kedua premisnya benar sedangkan konklusinya salah. Contoh 1.22 menunjukkan bagaimana membuktikan ketidakvalidan dari bentuk sederhana pada argumen ini dengan menggunakan tabel kebenaran.

Contoh 1.22

Tunjukkan bahwa bentuk

jika p, maka q

q

$\therefore$ *p*

adalah tidak valid.

Jawab

Buatlah sebuah tabel kebenaran.

Tabel ini harus selesai dengan bentuk ((*p* $\Rightarrow$ *q dan q*) $\Rightarrow$ *p*.

	premis-premis			premis-premis	bentuk
p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$ *dan* q	p	$((p \Rightarrow q)$ *dan* $q) \Rightarrow p$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	**S**
S	B	B	B	S	S
S	S	B	S	S	B

Amatilah tabel di atas dengan seksama. Perhatikan bahwa bentuk (di kolom kanan) tidak selalu benar. Pada khususnya, baris ketiga mewakili suatu situasi di mana kedua premis benar, tetapi konklusinya salah. Ini berarti bahwa argumennya tidak valid.

Jenis argumen yang tidak valid ini disebut **Kekeliruan Konvers** karena ia dihasilkan dari salah-guna premis $p \Rightarrow q$ dengan konversnya. Seperti Anda ketahui, pernyataan kondisional yang benar dapat memiliki sebuah konvers yang salah.

Contoh 1.23

Seseorang yang dibebaskan dari dakwaan menyebutkan argumen sebagai berikut:

Jika seseorang telah tidak berbuat kejahatan, maka dia dibebaskan dari dakwaan pada akhir persidangan. Saya dibebaskan pada akhir persidangan. Dengan demikian, saya telah tidak berbuat kejahatan.

a. Tuliskanlah bentuk dari argumen ini.
b. Apakah argumen dari orang itu valid atau tidak valid? Berikan justifikasi jawaban Anda.

Jawab

a. Misalkan $p(x)$: *x telah tidak berbuat kejahatan.*
$q(x)$: *x dibebaskan dari dakwaan pada akhir persidangan.*

Misalkan I sebagai seseorang tertentu yang menyebutkan argumen tersebut. Maka
$p(I)$: *Saya telah tidak berbuat kejahatan.*
$q(I)$: *Saya dibebaskan dari dakwaan pada akhir persidangan.*

Dengan demikian, argumen itu memiliki bentuk:

Untuk semua orang x, jika $p(x)$ *maka* $q(x)$.
$q(I)$
$\therefore\ p(I)$.

b. Ini adalah bentuk argumen yang tidak valid, suatu contoh dari **Kekeliruan Konvers**.

Ingat kembali bahwa invers dari suatu pernyataan kondisional *jika p maka q* adalah *jika tidak p maka tidak q*. Argumen berikut ini mengilustrasikan argumen tidak valid jenis kedua, yaitu **Kekeliruan Invers**:

Jika seseorang adalah anggota klub bahasa Inggris, maka orang itu dapat berbicara bahasa Inggris.

Gina bukan anggota klub bahasa Inggris.

$\therefore$ *Gina tidak dapat berbicara bahasa Inggris.*

Argumen di atas berbentuk:

Untuk semua x, jika $p(x)$ *maka* $q(x)$.

tidak $p(c)$, *untuk suatu c tertentu.*

$\therefore\ q(c)$.

Untuk melihat mengapa argumen ini tidak valid, perhatikan bahwa mungkin kedua premisnya benar sedangkan konklusinya salah. Diagram di samping ini menunjukkan situasi di mana semua anggota klub bahasa Inggris dapat berbicara bahasa Inggris, dan Gina bukan anggota dari klub bahasa Inggris, tetapi dia dapat berbicara bahasa Inggris.

Argumen tidak valid jenis ketiga terjadi bila suatu generalisasi dilakukan terlalu dini. Misalnya, pikirkan argumen berikut ini

Untuk $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$,

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$\therefore\ f(n) = n$ *untuk semua bilangan bulat positif n*.

Pertama, hitunglah $f(4)$ dan perhatikan bahwa $f(4) \neq 4$. Oleh karena itu, konklusinya adalah salah. Karena premis-premisnya benar sedangkan konklusinya salah, argumen ini tidak valid. Kekeliruan semacam ini disebut

induksi tidak berterima. Pada argumen tidak valid seperti ini, premis-premis menunjukkan bahwa suatu sifat adalah benar untuk beberapa, tetapi tidak semua, anggota dalam suatu himpunan, dan konklusinya menyatakan bahwa sifat itu benar untuk semua anggota dalam himpunan itu. Meski induksi tidak berterima bukan merupakan metode bukti yang valid, namun metode ini sering digunakan oleh para matematikawan untuk membuat konjektur-konjektur yang kemudian mereka coba buktikan dengan cara-cara lain.

Misalnya, berikut ini premis-premis dan konjektur yang mungkin Anda buat dari premis-premis tersebut.

Premis-premis: $2^3 = 8$

$8^7 = 2097152$

$(-4)^5 = -1024$

Konjektur: *Suatu hasilpangkat ganjil positif dari sebarang bilangan genap adalah genap.*

Pentinglah kita perhatikan bahwa suatu argumen yang tidak valid mungkin memiliki konklusi yang benar. (Konjektur di atas adalah benar.) Tetapi argumen-argumen yang tidak valid akan mengarah kepada konklusi-konklusi yang salah, bahkan saat premis-premisnya benar. Hanya dalam argumen valid dengan premis-premis yang benarlah konklusi dijamin benar.

1. 9 Ragam Penalaran

Bagian-bagian sebelumnya telah membahas bagaimana penalaran digunakan dalam matematika, dan banyak contoh telah menunjukkan bagaimana penalaran matematis dan logika dapat juga dimanfaatkan di luar matematika.

Penalaran yang digunakan dalam bukti matematis disebut **penalaran deduktif**. Penalaran ini mengikuti standar-standar validitas yang lebih ketat daripada standar-standar yang diterapkan dalam kehidupan sehari-hari atau dalam sains atau dunia kedokteran atau bidang-bidang lainnya seperti psikologi. Sifat yang valid secara logika dari penalaran deduktif menjadi alasan utama mengapa orang-orang berupaya menggunakan matematika dalam bidang-bidang lain. Namun demikian, jenis-jenis penalaran lainnya digunakan secara informal dalam matematika. Misalnya, penalaran induktif sering digunakan untuk menangani konjektur-konjektur. Meski demikian, agar suatu konjektur menjadi teorema, konjektur itu harus dibuktikan menggunakan bentuk-bentuk argumen yang valid.

Penalaran yang akan menjadi tidak valid jika digunakan dalam bukti matematis mungkin saja dapat berhasil digunakan di luar matematika. Anda menggunakan **penalaran induktif** bilamana Anda membuat generalisasi berdasarkan evidensi banyak contoh. Misalnya, pada bulan ketiga dalam suatu tahun ajaran yang telah Anda ikuti, Anda barangkali telah berkesimpulan bahwa setiap kali Pak Firman mengatakan "Simpan semua buku dan kertas Anda," dia memberikan sebuah kuis. Penalaran ini tidak valid secara matematis (ini adalah contoh induksi tidak berterima, karena Pak Firman dapat saja mengubah pikirannya), tetapi ini sangat wajar dan seringkali dapat diandalkan.

Para ilmuwan sains menggunakan penalaran induktif saat mereka membuat hipotesis-hipotesis berdasarkan data yang didapatkan dari pengamatan dalam eksperimen. Ilmuwan Italia Galileo Galilei (1564-1642) adalah salah seorang yang pertama kali menerapkan metode ini secara sistematis, dalam kajiannya tentang gerakan benda jatuh. Dia menjatuhkan benda-benda dari sejumlah tempat, termasuk Menara Miring Pisa, dan mengukur waktu yang diperlukan benda-benda itu untuk jatuh dari ketinggian (jarak) tertentu. Dengan mengamati pola bilangan-bilangan yang diperolehnya, Galileo memformulasikan suatu hukum benda-benda jatuh yang sekarang kita tuliskan sebagai

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

di mana d adalah jarak jatuhnya suatu benda dalam t detik dalam pengaruh percepatan karena kerja gravitasi g.

Para ilmuwan sains biasanya tidak lupa mengatakan bahwa tidak satu pun ekperimen atau serangkaian eksperimen dapat *membuktikan* secara pasti bahwa suatu hukum atau teori sains tertentu berlaku secara umum. Albert Einstein pernah menuturkan: "Sebanyak-banyaknya eksperimentasi pun tidak akan pernah dapat membuktikan bahwa saya benar; sebuah eksperimen saja dapat membuktikan saya salah." Namun demikian, sedemikian banyak eksperimen yang menguji banyak konsekuensi berbeda dari hukum atau teori itu menjadikan *lebih mungkin* bahwa hukum atau teori itu benar. Sebuah teori seperti hukum benda-benda jatuh dari Galileo sekarang telah diuji dalam ribuan kejadian tersendiri. Meski kita tidak dapat 100% yakin bahwa teori itu benar, kita menganggapnya sangat mungkin benar sehingga sistem-sistem canggih seperti meriam kapal perang, mekanisme pertahanan peluru kendali, dan satelit buatan dibangun dengan menggunakan teori tersebut. Orang-orang mempercayakan kehidupan mereka kepada teknologi yang berdasarkan teori ini saat mereka terbang dengan pesawat terbang.

Suatu jenis penalaran lain, disebut **penalaran diagnostik**, digunakan dalam diagnosis medis, perbaikan kendaraan, dan dalam berbagai jenis "*trouble shooting*." Dalam pelatihan para dokter mempelajari penyakit dan gejala-gejalanya dalam pernyataan *jika-maka* yang berbentuk

Jika pasien menderita penyakit i, maka dia memperlihatkan gejala-gejala s_1, s_2, ...

Namun demikian, para dokter biasanya tidak mengetahui penyakit pasien dan kemudian dia menentukan gejala-gejalanya. Sebagai gantinya, mereka mulai dengan gejala-gejala yang tampak atau dilaporkan oleh pasien dan mencoba untuk mendiagnosis penyakitnya. Misalnya, jika Pak Arman pergi ke seorang dokter dan menyampaikan keluhannya yaitu hidung mampet, rasa sakit di dada, dan lesu yang menyeluruh, serta jika perawat atau dokter menemukan gejala mata merah dan demam, maka diagnosis yang paling masuk akal yaitu Pak Arman terkena flu. Penalarannya adalah: Jika Pak Arman memperlihatkan gejala-gejala s_1, s_2, ..., maka dia menderita penyakit i. Diagnosis ini berdasarkan pengetahuan bahwa jika seseorang terkena flu, maka dia memperlihatkan gejala-gejala seperti yang dialami Pak Arman dan barangkali beberapa gejala lainnya seperti perut tidak enak dan batuk. Oleh karena itu, personel medis biasanya menerapkan konvers dari pernyataan *jika-maka* yang nilai kebenarannya tidak diketahui di seberang suatu tingkat keyakinan tertentu. Secara matematis, penalaran tersebut tidak reliabel; konvers-konvers itu mungkin benar atau tidak benar. Apa-apa yang dikeluhkan oleh Pak Arman bisa saja merupakan gejala-gejala dari bronkhitis atau alergi. Tetapi seringkali itulah hal terbaik yang dapat dilakukan oleh para personel medis; dan keyakinan kita terhadap para personel medis melalui proses ini didasarkan pada pelatihan dan pengalaman sebelumnya yang telah mereka dapatkan.

Penalaran diagnostik melibatkan penggunaan konvers dari suatu pernyataan yang benar untuk membuat konjektur tentang suatu penyakit, perbaikan yang diperlukan, atau koreksi. Jika digunakan dalam sebuah bukti, ini akan disebut "kekeliruan konvers." Namun demikian, para dokter, montir kendaraan bermotor, dan lain-lain yang menggunakannya jarang mengklaim bahwa diagnosis-diagnosis mereka selalu benar. Mereka tahu bahwa mereka hanya sedang mengajukan dugaan, dan selalu terdapat kemungkinan bahwa diagnosis yang mereka buat itu ternyata tidak tepat.

Misalnya, cobalah tentukan sebab dari masalah yang terjadi pada operasi suatu perekam kaset video. Berikut ini salah satu bagian dari buku petunjuk untuk salah satu versi perangkat VCR.

TROUBLE SHOOTING DAN SOLUSINYA	
SEANDAINYA PERANGKAT INI MENUNJUKKAN GEJALA MASALAH PERIKSALAH YANG BERIKUT INI SEBELUM MELAKUKAN UPAYA PERBAIKAN	
Masalah	**Koreksi**
Tidak ada arus (perangkat tidak menyala)	• Periksa apakah perangkat sudah tersambung dengan sumber arus listrik AC • Pastikan bahwa tombol POWER pada posisi ON dan tombol TIMER pada posisi OFF
Kaset video tidak dapat dimasukkan	• Periksalah bahwa tombol POWER pada ON dan tombol TIMER pada OFF • Masukkan kaset dengan jendela menghadap ke atas dan tab pencegah-hapusan menghadap ke arah Anda • Jika indikator CASSETTE-IN menyala, terdapat kaset di dalam perangkat.
Tidak ada operasi saat tombol-tombol operasi ditekan	• Periksa bahwa tombol POWER pada posisi ON • Periksa apakah tampil indikator DEW, lihat hlm. 9 • Periksa bahwa tombol TIMER pada posisi OFF
Program-program TV tidak dapat direkam	• Periksalah koneksi-koneksi antena eksternal VCR dan TV Anda • Pastikan bahwa saluran penerima dari VCR tersetel dengan benar • Pastikan bahwa tab pencegah-hapusan pada kaset masih utuh
Timer Recording tidak dapat dilakukan	• Periksalah setting timer untuk Timer Recording • Pastikan bahwa tombol TIMER pada posisi ON

Anda mengetahui bahwa jika tombol POWER pada posisi OFF, maka tidak ada arus listrik. Baris pertama bagian *trouble-shooting* dari buku petunjuk ini menggunakan penalaran dari konvers: Jika tidak ada arus listrik, maka mungkin bahwa tombol POWER pada posisi OFF.

Serupa demikian, instruksi-instruksi pengoperasian untuk VCR ini (pada halaman lain dalam buku petunjuk tersebut) mengindikasikan bahwa jika (a) tombol POWER pada posisi OFF atau (b) tombol TIMER pada posisi ON atau (c) kaset ditempatkan dengan posisi jendela menghadap ke bawah atau (d) telah terdapat kaset di dalam perangkat VCR, maka sebuah kaset video tidak dapat dimasukkan. Jadi bagian *trouble-shooting* dari buku petunjuk ini menyebutkan konvers: Jika sebuah kaset video tidak dapat dimasukkan, maka barangkali tombol POWER pada posisi OFF atau tombol TIMER pada posisi ON atau kaset telah ditempatkan dengan jendela menghadap ke bawah atau telah terdapat kaset di dalam perangkat VCR.

Menyimpulkan invers dari suatu pernyataan jika-maka adalah suatu kekeliruan invers bila digunakan dalam matematika, tetapi terdapat kesempatan-kesempatan dalam kehidupan sehari-hari di mana Anda diharapkan untuk bernalar seperti demikian. Saat seorang teman berkata, “Jika kamu ingin pergi bersama kami, kamu sudah ada di rumahku pada jam 6 sore.” Bila seseorang berkata, “Jika hari hujan, kita tidak akan pergi berwisata,” inferensinya adalah jika hari tidak hujan, maka acara berwisata akan dilakukan.

Semua ini barangkali membingungkan Anda. Mengapa penalaran yang sama yang tidak valid di dalam matematika mungkin saja valid di luar matematika? Jawabannya adalah bahwa dalam percakapan keseharian, *jika* kadang-kadang memiliki arti *jika dan hanya jika*. Jadi ucapan teman Anda tadi bermakna “Jika (dan hanya jika) kamu ingin pergi bersama kami, kamu sudah ada di rumahku pada jam 6 sore.” Sama halnya, tuturan seseorang tadi bermakna “Jika (dan hanya jika) hari hujan, maka acara berwisata tidak akan dilakukan.”

Penalaran yang digunakan dalam statistika bersifat pasti dalam cara yang sedikit berbeda dari penalaran dalam lahan-lahan matematika lainnya. Statistika menggunakan **penalaran probabilistik**. Jika seorang statistikawan mentos sekeping koin sebanyak 100 kali dan memperoleh 100 muka-atas, maka statistikawan ini cenderung berkesimpulan bahwa koin itu *tidak-adil*: koin itu tidak memiliki peluang sama untuk menghasilkan kejadian muka-atas atau muka-bawahnya. Tentu saja, statistikawan ini mengetahui bahwa *mungkin* saja sebuah koin yang adil ditos 100 kali dan menghasilkan muka-atas tiap kali tos. Tetapi, statistikawan ini pun tahu, dengan menerapkan hukum-hukum probabilitas, bahwa peluang kejadian seperti itu hanyalah $\frac{1}{2^{100}}$, atau sekitar $\frac{1}{1267651000000000000000000000000}$.

Perhitungan ini mengarahkan statistikawan tersebut untuk bernalar sebagai berikut.

Misalkan *p*: *koin itu adil*, dan misalkan *q*: *100 tos berturut-turut menghasilkan muka-atas*.

p dan *q* memiliki peluang sangat kecil untuk terjadi (dengan menerapkan hukum-hukum probabilitas seperti dijelaskan di atas).

Ini berarti bahwa *tidak(p dan q)* memiliki peluang besar untuk terjadi.

Dengan hukum-hukum De Morgan, *tidak (p dan q)* ekuivalen dengan *(tidak p)* atau *(tidak q)*.

Jadi, dengan peluang yang besar, koin itu tidak adil atau 100 kejadian muka-atas berturut-turut itu bukanlah kejadian muka-atas.

Tetapi kejadian 100 muka-atas koin itu secara berturut-turut memang terjadi.

Oleh karena itu, (dengan sedikit sekali keraguan) koin itu tidak adil.

Statistikawan ini tidak dapat berkesimpulan bahwa koin itu tidak adil dengan seyakin tadi seandainya dia baru mentos koin itu sebanyak 5 kali dan memperoleh muka-atas pada tiap tos. Ini karena bila *q* adalah *5 tos berturut-turut menghasilkan muka-atas*, peluang *p dan q* adalah $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, suatu peluang yang jauh lebih besar daripada kejadian 100 muka-atas berturut-turut. Oleh karena itu, statistikawan ini akan mencari evidensi yang lebih kuat dan menggunakan jumlah percobaan yang lebih besar. Dalam kata-kata lain, dengan mentos koin itu semakin banyak, statistikawan ini mengurangi peluang terjadinya kekeliruan, atau konklusi yang salah.

Meski hanya sedikit orang yang menuntut tingkat peluang kekeliruan sekecil itu saat memutuskan keadilan suatu koin, tetapi saat kehidupan orang-oranglah yang dipertaruhkan, maka menghindari suatu konklusi yang salah menjadi sangat penting. Tingkat keyakinan (*level of confidence*) yang dituntutkan pada umumnya ditentukan oleh bagaimana konklusi statistik akan digunakan. Ketepatan diperoleh dengan mengulangi eksperimen berkali-kali (dalam jumlah sangat besar) atau dengan menguji sedemikian banyak sampel. Inilah mengapa model-model pesawat terbang baru diperkenalkan hanya setelah ribuan jam uji-terbang; obat-obatan baru atau bahkan produk-produk kosmetik biasanya diuji secara seksama dalam waktu yang lama sebelum diproduksi secara besar-besaran dan diperdagangkan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Perhatikan konjektur berikut ini:

   Jika c dan d adalah sebarang bilangan bulat genap, maka c – d adalah bilangan bulat genap.

   a. Seandainya Anda akan membuktikan konjektur ini dengan bukti langsung, kalimat apakah yang kiranya tepat untuk memulai bukti Anda?

   b. Pernyataan apakah yang kemudian harus Anda buktikan sebagai benar?

2. Temukan sebuah kontracontoh untuk menyangkal konjektur berikut ini:
   Jika $r \times s$ *adalah bilangan bulat genap, maka r dan s kedua-duanya adalah bilangan bulat genap.*

3. a. Temukan kekeliruan dalam "bukti" untuk konjektur berikut ini.
   Jika m dan n adalah sebarang bilangan-bilangan bulat genap, maka $m + n = 4k$ *untuk suatu bilangan bulat k.*

   Bukti
   Misalkan m dan n adalah sebarang bilangan bulat genap. Karena m genap maka terdapat suatu bilangan bulat k sedemikian hingga $m = 2k$. Juga, karena n genap, $n = 2k$.

   Oleh karena itu diperoleh bahwa $m + n = 2k + 2k = 4k$, seperti yang akan ditunjukkan.

   b. Temukan sebuah kontracontoh untuk menunjukkan bahwa konjektur dalam Soal 3(a) adalah salah.

4. Perhatikan konjektur berikut ini:

   $\forall\, x, x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   $x \neq 3$
   $\therefore\ x^2 \neq 9.$

   a. Tuliskan bentuk dari argumen di atas.

   b. Apakah argumen itu valid atau tidak valid? Jelaskan.

5. Perhatikan argumen berikut ini. Tuliskan bentuk argumennya, dan tentukan apakah argumen ini valid atau tidak valid, dan jika argumen ini tidak valid, tentukan jenis kekeliruan yang dibuat di dalamnya.

   Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 0$. *Jika x adalah bilangan imajiner, maka* $x^2 < 0$. $2i$ *adalah suatu bilangan imajiner. Dengan demikian* $2i$ *bukan bilangan real.*

6. Dengan memperhatikan semua nilai kebenaran yang mungkin dimiliki p dan q:
   a. Tunjukkan bahwa $((p \Rightarrow q)$ dan $\sim p) \Rightarrow \sim q$ tidak selalu benar.
   b. Jenis kekeliruan apakah yang terjadi dalam bentuk tersebut?

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a. Sampel: Misalkan c dan d adalah sebarang bilangan-bilangan bulat genap.
   b. $c - d$ adalah bilangan bulat genap.

2. Kontracontoh: Misalkan $r = 4$ dan $s = 5$. Maka $r \times s = 4 \times 5 = 20$ adalah bilangan bulat genap. Tetapi s bukan bilangan bulat genap.

3. a. m dan n harus sebarang bilangan-bilangan bulat genap dan tidak mesti sama. Dengan menentukan $m = 2k$ dan $n = 2k$, maka m dan n diberikan nilai yang sama.
   b. Kontracontoh: Misalkan $m = 2$ dan $n = 4$.
   $m + n = 2 + 4 = 6 = 4\left(\frac{3}{2}\right)$. Tetapi $\frac{3}{2}$ bukan bilangan bulat.

4. a. Misalkan p: $x = 3$, dan q: $x^2 = 9$.
   $P \Rightarrow q$
   $\sim p$
   $\therefore \sim q$

   b. Tidak valid; kekeliruan invers

5. Misalkan $p(x)$: *x suatu bilangan real*. Misalkan $q(x)$: $x^2 \geq 0$. Misalkan $r(x)$: *x adalah suatu bilangan imajiner*.
   Misalkan c: $x = 2i$.
   $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$
   $\forall x, r(x) \Rightarrow \sim q(x)$
   $r(c)$
   $\therefore \sim p(c)$

   valid; $(r(c) \Rightarrow \sim q(c)$ menurut Hukum Ketidakberpihakan, dan $\sim q(c) \Rightarrow \sim p(c)$ menurut Hukum Penalaran Tidak-Langsung.

6. a.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q)$ dan $\sim p$	$\sim q$	$((p \Rightarrow q)$ dan $\sim p) \Rightarrow \sim q$
B	B	B	S	S	S	B
B	S	S	S	S	B	B
S	B	B	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B

b. kekeliruan invers

RANGKUMAN

1. Metode Bukti Langsung untuk Pernyataan Universal melibatkan penggunaan bentuk-bentuk argumen yang valid untuk membuat rantai deduksi-deduksi yang bekerja dari hipotesis ke konklusi pernyataan kondisional yang hendak dibuktikan.
2. Suatu bentuk argumen adalah tidak valid jika dan hanya jika terdapat argumen-argumen di mana premis-premisnya benar dan konklusinya salah. Kekeliruan Konvers, Kekeliruan Invers, dan Induksi Tidak Berterima adalah bentuk-bentuk argumen yang tidak valid.
3. Terdapat beragam penalaran. Penalaran yang digunakan dalam bukti matematis disebut penalaran deduktif. Penalaran induktif melibatkan penarikan generalisasi berdasarkan evidensi dari banyak contoh. Suatu jenis penalaran lain, disebut penalaran diagnostik, digunakan dalam diagnosis medis, perbaikan kendaraan, dan dalam berbagai jenis "trouble shooting." Penalaran yang digunakan dalam statistika bersifat pasti dalam cara yang sedikit berbeda dari penalaran dalam lahan-lahan matematika lainnya, penalaran dalam statistika ini disebut penalaran probabilistik.

TES FORMATIF 3

Selesaikan soal-soal tes berikut ini!

1. Tuliskan definisi bilangan bulat ganjil dengan menggunakan dua pernyataan *jika-maka*.

2. Buktikan pernyataan berikut ini dengan menggunakan sebuah bukti langsung:

Jika m dan n adalah sebarang bilangan bulat ganjil, maka $m \times n$ *adalah suatu bilangan bulat ganjil.*

3. Asumsikan bahwa Rudi memiliki mesin penjawab yang dipasangkan pada teleponnya. Dia menyalakan mesin itu bilamana dia pergi ke luar rumah. Saat Sarah menelepon, dia mendapatkan jawaban dari mesin penjawab tersebut. Sarah menyimpulkan bahwa Rudi tidak sedang ada di rumah.
   Tuliskan bentuk argumen yang digunakan Sarah untuk menarik kesimpulannya. Apakah argumen itu valid atau tidak valid? Jelaskan.

4. Perhatikan argumen berikut ini. Tuliskan bentuk argumennya, dan tentukan apakah argumen ini valid atau tidak valid, dan jika argumen ini tidak valid, tentukan jenis kekeliruan yang terdapat di dalamnya:
   Jika daratan itu tertutupi es, maka daratan itu adalah Antartika. Jika daratan itu Antartika, maka terdapat stasiun-stasiun penelitian di sana. Jika daratan itu memiliki stasiun-stasiun penelitian, maka studi ilmiah sedang diselenggarakan. Studi ilmiah sedang diselenggarakan di daratan itu. Dengan demikian, daratan itu tertutupi es.

5. Misalkan perahu bermuatan pisang dari sebuah negara di Amerika Selatan tiba di sebuah pelabuhan di Amerika Serikat. Para petugas kesehatan masyarakat di pelabuhan itu memiliki kewenangan berkenaan dengan masuknya hasil pertanian ke negara Amerika Serikat. Mereka melakukan kontrol kualitas dengan mengambil sampel acak dari muatan perahu tadi (barangkali 100 buah pisang) dan memeriksa kematangan serta penyakit dari sampel pisang tersebut. Kriteria mereka yaitu jika lebih dari lima pisang dalam sampel sebesar 100 ternyata memiliki kualitas di bawah standar, maka pengiriman pisang itu ditolak.

   Penalaran jenis apakah yang digunakan oleh para petugas tersebut? Apakah mereka dapat sepenuhnya yakin dengan ketepatan dari keputusan mereka? Jika ya, mengapa? Jika tidak, bagaimana mereka dapat menurunkan peluang kekeliruan?

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. (Tiap soal memiliki total bobot nilai 1. Jika sebuah soal terdiri atas beberapa butir pertanyaan, maka bobot nilai dari satu butir pertanyaan adalah

$\dfrac{1}{\text{jumlah butir pertanyaan dalam soal}}$.) Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% - 100%	=	Baik sekali
80% - 89%	=	Baik
70% - 79%	=	Cukup
- 69%	=	Kurang

Jika Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, maka Anda dapat meneruskan dengan Modul 2. *Bagus!* Jika tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

***Tes Formatif* 1**

1. Misalkan $x = 0$; $\forall\ y$, $0 \times y = 0 \neq 1$.
2. $\forall$ *fungsi f*, $\exists$ *bilangan-bilangan real a dan b sedemikian hingga* $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.
3. $\forall$ *bilangan real positif x*, ${}^{10}\log x \neq 0$; pernyataan yang diberikan.
4.

p	*q*	*~q*	*(p dan ~q)*
B	B	**S**	**S**
B	S	**B**	**B**
S	B	**S**	**S**
S	S	**B**	**S**

5. atau inklusif

***Tes Formatif* 2**

1. *tidak* ((*tidak* (*p dan q*)) *atau* (*tidak r*))
2. Konvers: *Jika hujan akan turun besok, maka hujan akan turun hari ini.*
   Invers: *Jika hujan tidak turun hari ini, maka hujan tidak akan turun besok.*
3.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	B

tidak ekuivalen

4. valid; Hukum Transitifitas
5. *Diagonal-diagonal dari ABCD saling membagi dua.*

***Tes Formatif* 3**

1. *Jika suatu bilangan bulat n adalah ganjil, maka* $n = 2k + 1$ *untuk suatu bilangan bulat k.*
   Jika untuk suatu bilangan bulat k, $n = 2k + 1$*, maka n adalah suatu bilangan bulat ganjil.*

2. Misalkan m dan n adalah sebarang bilangan-bilangan bulat ganjil. Terdapat bilangan-bilangan bulat r dan s sedemikian hingga $m = 2r + 1$ dan $n = 2s + 1$ menurut definisi bilangan bulat ganjil.
   Maka $m \times n = (2r + 1)(2s + 1) = 4rs + 2r + 2s + 1 = 2(2rs + r + s) + 1$.
   Karena $(2rs + r + s)$ adalah suatu bilangan bulat menurut sifat-sifat ketertutupan, maka $m \times n$ adalah suatu bilangan bulat ganjil menurut definisi.
3. Misalkan p: tidak di rumah, dan q: mesin penjawab telepon menyala.

   $p \Rightarrow q$
   q
   $\therefore p$

   Bentuk argumen ini tidak valid; kekeliruan konvers.

4. Misalkan p: *daratan itu tertutupi es*. Misalkan q: *daratan itu adalah Antartika*. Misalkan r: *terdapat stasiun-stasiun penelitian di sana*. Misalkan s: *studi ilmiah sedang diselenggarakan*.

   $p \Rightarrow q$
   $q \Rightarrow r$
   $r \Rightarrow s$
   s
   $\therefore p$

5. Penalaran probabilistik; Tidak, mereka dapat menguji pisang-pisang dalam sampel yang lebih besar lagi.

Daftar Pustaka

Kurtz, David C. 1992. *Foundations of Abstract Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Peressini, Anthony L. et al. 1992. *Precalculus and Discrete Mathematics*. Chicago: Scott, Foresman The University of Chicago School Mathematics Project.

Sollow, Daniel. 1982. *How to Read and Do Proofs*. New York: John Wiley & Sons, Inc.