Modul 1

Transformasi Laplace Bagian 1

Prof. S.M. Nababan, Ph.D

PENDAHULUAN

Metode matematika adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan masalah-masalah fisis yang dimodelkan oleh persamaan diferensial biasa atau parsial.

Salah satu metode yang digunakan ialah transformasi Laplace. Transformasi Laplace adalah suatu transformasi dari fungsi yang menggunakan integral tak wajar. Konsep integral tak wajar dan kekonvergenannya dibutuhkan untuk mempelajari transformasi Laplace. Transformasi Laplace banyak digunakan dalam meyelesaikan masalah nilai awal suatu persamaan diferensial biasa dan masalah-masalah syarat batas khususnya transformasi Laplace sangat ampuh untuk menyelesaikan persamaan gelombang dan persamaan panas dimensi satu.

Dalam modul ini Anda akan mempelajari sebagian dari transformasi Laplace yang menyangkut konsep transformasi Laplace, eksistensi transformasi Laplace dan transformasi Laplace dari turunan dan integral suatu fungsi. Contoh-contoh akan diberikan untuk mematangkan pengertian dan penguasaan Anda.

Dalam Kegiatan Belajar 1 Anda akan mempelajari konsep transformasi Laplace, sifat kelinearan transformasi Laplace dan inversnya beserta eksistensi transformasi Laplace. Kegiatan Belajar 2 akan membahas transformasi Laplace turunan dan integral suatu fungsi beserta aplikasinya dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat memahami konsep transformasi Laplace dan terampil menggunakannya untuk menentukan transformasi Laplace suatu fungsi serta untuk menyelesaikan PD linear sebarang.

Secara khusus, setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

a. menentukan rumus transformasi Laplace dan menggunakannya secara langsung untuk menentukan transformasi Laplace fungsi-fungsi sederhana,
b. menentukan rumus invers transformasi Laplace fungsi-fungsi tertentu;
c. menerangkan sifat kelinearan transformasi Laplace dan menggunakannya untuk menentukan transformasi Laplace suatu fungsi yang merupakan kombinasi dari fungsi-fungsi yang diketahui transformasi Laplacenya,
d. menerangkan sifat kelinearan invers transformasi Laplace dan menggunakannya untuk menentukan invers transformasi Laplace suatu fungsi yang dapat dipisah atas fungsi-fungsi yang diketahui invers transformasi Laplacenya,
e. memeriksa apakah suatu fungsi mempunyai transformasi Laplace atau tidak,
f. menentukan rumus transformasi Laplace turunan dan integral suatu fungsi dan menggunakannya untuk menentukan transformasi Laplace fungsi-fungsi tertentu,
g. menggunakan transformasi Laplace dari turunan fungsi untuk menentukan solusi PD linear homogen dengan koefisien konstanta yang disertai syarat awal (masalah nilai awal PD),
h. menentukan invers transformasi Laplace dengan menggunakan sifat-sifat yang diketahui dan bantuan tabel yang sederhana.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian Transformasi Laplace dan Invers Transformasi Laplace

Dalam Kegiatan Belajar 1 ini akan dibahas konsep transformasi Laplace, invers transformasi Laplace, sifat kelinieran transformasi Laplace dan inversnya beserta eksistensi transformasi Laplace. Juga diberikan tabel dari transformasi Laplace dan inversnya untuk fungsi-fungsi yang penting.

Definisi 1.1

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi yang didefinisikan untuk $t \geq 0$. Bila integral tak wajar $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ konvergen ke suatu fungsi $F(s)$, maka $F(s)$ disebut transformasi Laplace dari $F(t)$ dan dinyatakan dengan $\mathrm{L}\{f(t)\}$.

Jadi transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt .$$

Selanjutnya $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$ dan dinyatakan dengan $\mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Jadi

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} .$$

Contoh 1.1

Tentukan $\mathrm{L}\{f(t)\}$ apabila $f(t)=1,\ \ t \geq 0$.

Penyelesaian:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \mathrm{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}.1dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(e^{-bs}-1\right)$$

Karena $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-bs} = 0$ untuk $s > 0$, maka $\mathrm{L}\{1\} = -\frac{1}{s}(-1) = \frac{1}{s}$ untuk $s > 0$.

Jadi

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0\,.$$

Contoh 1.2

Tentukan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ apabila $f(t) = t^{\alpha},\ \ \alpha > 0,\ \ t > 0$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^{\alpha}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-st} (st)^{\alpha+1-1} d(st)\ , \text{ substitusi } u = st \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha+1-1} du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Di sini $\Gamma(\alpha)$ memenuhi sifat $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$. Khususnya untuk $\alpha = n,\ \ n$ bilangan asli, didapat $\Gamma(n+1) = n!$

Jadi

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Kesimpulan

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\ \ , \alpha > 0} \quad \text{dan} \quad \boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ s > 0}$$

Contoh 1.3

Bila diketahui $f(t) = e^{at},\ t \geq 0,$ maka tentukan $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Penyelesaian:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-t(s-a)} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s-a}\ e^{-t(s-a)}\right)\Bigg|_{t=0}^{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{s-a}\ \left(e^{-b(s-a)} - 1\right).$$

Untuk $s - a > 0$ atau $s > a$, maka $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b(s-a)} = 0$.

Jadi

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s > a}$$

Contoh 1.4

Untuk $f(t) = \cos\ at, \quad t \geq 0,$ tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.

Penyelesaian:

$$\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} \cos at\, dt$$

Dengan melakukan integrasi parsial dua kali, didapat

$$\int e^{-st} \cos\ at\ dt = \frac{1}{a}\int e^{-st} d(\sin at) = \frac{1}{a}\left[e^{-st} \sin at + s\int e^{-st} \sin at\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[e^{-st} \sin at - \frac{s}{a}\int e^{-st} d(\cos at)\right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{-st} \sin at - \frac{s}{a^2}\left[e^{-st} \cos at + s\int e^{-st} \cos at\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{-st} \sin at - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos at - \frac{s^2}{a^2}\int e^{-st} \cos at\, dt$$

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)\int e^{-st} \cos at\, dt = \frac{1}{a} e^{-st} \sin\ at - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos\ at + c$$

$$\int e^{-st} \cos at\, dt = \frac{1}{s^2 + a^2}\left[a\ e^{-st} \sin\ at - s\ e^{-st} \cos\ at\right] + c.$$

Selanjutnya karena $|\sin at| \leq 1$, $|\cos at| \leq 1$ maka dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa untuk $s > 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\sin at = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-st}\cos at = 0 .$$

Jadi

$$\mathrm{L}\{\cos\ at\} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2+a^2}\left(a\ e^{-st}\sin at - s\,e^{-st}\cos at\right)\Big|_{t=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2+a^2}\left[\left(a\ e^{-sb}\sin ab - s\ e^{-sb}\cos ab\right) + s\right] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

untuk $s > 0$.

Dengan demikian diperoleh rumus:

$$\boxed{\mathrm{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2},\ \ s > 0}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$$\boxed{\mathrm{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2},\ \ s > 0}$$

Sifat Kelinearan Transformasi Laplace

Teorema 1.1

Bila $F(s) = \mathrm{L}\left\{f(t)\right\}$ dan $G(s) = \mathrm{L}\left\{g(t)\right\}$ maka untuk setiap konstanta-konstanta α, β berlaku

$$\mathrm{L}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha F(s) + \beta G(s) = \alpha \mathrm{L}\left\{f(t)\right\} + \beta \mathrm{L}\left\{g(t)\right\}.$$

Bukti:

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f(t)+\beta g(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt$$

$$=\alpha\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt+\beta\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$=\alpha\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}+\beta\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$=\alpha F(s)+\beta G(s).$$

Contoh 1.5

Untuk $f(t)=\cosh at$, tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.

Penyelesaian:

Kita telah mengetahui bahwa $\cosh at=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$.

Jadi dari Teorema 1.1 dan Contoh1. 3 didapat

$$\mathcal{L}\left\{\cosh at\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}.$$

untuk $s > a$ dan $s > -a$ atau $s>|a|$.

Jadi

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\cosh at\right\}=\frac{s}{s^2-a^2},\ s>|a|}$$

Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\sinh at\right\}=\frac{a}{s^2-a^2},\quad s>|a|}$$

Contoh 1.6

Tentukan $\mathcal{L}\left\{3\cos 4t + 6t^2\right\}$.

Penyelesaian: Dari Teorema 1.1 dan hasil-hasil di atas, didapat

$$\mathcal{L}\left\{3\cos 4t + 6t^2\right\} = 3\mathcal{L}\left\{\cos 4t\right\} + 6\mathcal{L}\left\{t^2\right\}$$

$$= 3.\frac{s}{s^2+16} + 6.\frac{2!}{s^3} = \frac{3s}{s^2+16} + \frac{12}{S^3}$$

Dari rumus-rumus yang dihasilkan dalam contoh-contoh di atas, diperoleh tabel transformasi berikut

TABEL TRANSFORMASI LAPLACE

$f(t)$	$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
$t^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$t^\alpha,\ \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $s > a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a\rvert$

TABEL INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
$\dfrac{1}{s}$	1
$\dfrac{1}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^n}{n!}$
$\dfrac{1}{s^{\alpha+1}}$, $n = \alpha > 0$	$e^{at} \dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$, $a \neq 0$	$\dfrac{\sin at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$, $a \neq 0$	$\dfrac{\sinh at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$, $a \neq 0$	$\cosh at$

Sifat Kelinearan Invers Transformasi Laplace

Teorema 1.2
Bila $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, maka untuk setiap konstanta-konstanta α dan β,
$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t)$.

Bukti:
Dari Teorema 1.1 telah diketahui bahwa

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) .$$

Jadi

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\}$$

atau

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha f(t)+\beta g(t).$$

Contoh 1.7

Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{2s-7}-\frac{4s+6}{s^2+9}+\frac{12}{s^5}\right\}$.

Penyelesaian: Dari Tabel Invers Transformasi Laplace, didapat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{2s-7}-\frac{4s+6}{s^2+9}+\frac{12}{s^5}\right\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-7}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+6}{s^2+9}\right\}+12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\left(s-\frac{7}{2}\right)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+9}\right\}-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}+12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$$

$$=\frac{4}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{7}{2}}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}+12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$$

$$=2e^{\frac{7}{2}t}-4\cos 3t-6\frac{\sin 3t}{3}+12\frac{t^4}{4!}$$

$$=2e^{\frac{7}{2}t}-4\cos 3t-2\sin 3t+\frac{1}{2}t^4.$$

Contoh 1.8

Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+7}{s^2+3s+2}\right\}$.

Penyelesaian: Kita melakukan pemisahan variabel seperti berikut:

$$\frac{5s+7}{s^2+3s+2}=\frac{5s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$5s+7=A(s+2)+B(s+1)$$

$$\begin{array}{llllllll} \textit{Untuk} & s=-1 & \longrightarrow & 2 & =A(-1+2) & =A & \longrightarrow & A=2 \\ & s=-2 & \longrightarrow & -3 & =B(-2+1) & =-B & \longrightarrow & B=3. \end{array}$$

Jadi

$$\frac{5s+7}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}+\frac{3}{s+2}\text{, dan dari tabel diperoleh}$$

$$\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{5s+7}{s^2+3s+2}\right\}=\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}+\frac{3}{s+2}\right\}$$

$$=2\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+3\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=2e^{-t}+3e^{-2t}.$$

Contoh 1.9

Tentukan $\mathsf{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+3s+14}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$.

Penyelesaian: Kita melakukan pemisahan variabel seperti berikut:

$$\frac{2s^2+3s+14}{(s+2)(s^2+4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s+2)}{(s+2)(s^2+4)}$$

$$2s^2+3s+14=A(s^2+4)+(Bs+C)(s+2)$$

$$=(A+B)s^2+(2B+C)s+(4A+2C).$$

Dari prinsip identitas diperoleh

$$A+B=2$$

$$2B+C=3$$

$$4A+2C=14$$

Penyelesaian ketiga persamaan ini menghasilkan

$A=2,\quad B=0$ dan $C=3$.

Jadi $\dfrac{2s^2+3s+14}{(s+2)(s^2+4)}=\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s^2+4}$

dan dari tabel didapat

$$\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+3s+14}{(s+2)\,(s^2+4)}\right\}=\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s^2+4}\right\}$$

$$=2\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+3\mathsf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=2e^{-2t}+\frac{3}{2}\sin 2t.$$

Eksistensi Transformasi Laplace

Sebelum memberikan syarat cukup agar transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ ada, terlebih dahulu kita memberikan konsep fungsi kontinu bagian demi bagian.

Definisi 1.2
Fungsi $f(t)$, $a \le t \le b$, dikatakan kontinu bagian demi bagian pada selang $[a, b]$, apabila banyaknya titik-titik diskontinuitas dari $f(x)$ adalah berhingga dan limit-limit kiri dan kanan di titik-titik diskontinuitas ada dan berhingga, yaitu f tidak mempunyai titik diskontinuitas tak hingga.

Contoh 1.10
Fungsi-fungsi berikut, yaitu:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ x+1 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

adalah kontinu bagian demi bagian pada selang [0, 2]

(b) $$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

adalah kontinu bagian demi bagian pada selang [0, 4]

(c) $$h(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

tidak kontinu bagian demi bagian pada selang [–1, 1], karena $h(x)$ diskontinu tak hingga di $x = 0$, yaitu $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Catatan: Setiap fungsi yang kontinu bagian demi bagian pada selang $[a, b]$ adalah terintegralkan (dapat diintegralkan)

Sekarang kita memberikan teorema eksistensi transformasi Laplace berikut.

Teorema 1.3

Misalkan $f(t)$, $t \geq 0$, suatu fungsi yang kontinu bagian demi bagian pada selang [0, a] untuk setiap $a > 0$, dan memenuhi

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \ \forall t \geq 0, \tag{1}$$

untuk suatu konstanta $M > 0$ dan γ. Maka transformasi Laplace dari $f(t)$, $F(s)$ ada untuk setiap $s > \gamma$.

Bukti:

Karena $f(t)$ kontinu bagian demi bagian pada selang [0, a], $\forall a > 0$, maka $\int_0^a e^{-st} f(t)\, dt$ ada untuk setiap $a > 0$.

Selanjutnya, dari (1) didapat

$$\begin{aligned}
\left| \mathrm{L}\left(f(t)\right) \right| &= \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty \left| e^{-st} f\left(t\right) \right| dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq \lim_{a\to\infty} \int_0^a Me^{-st} e^{\gamma t} dt \\
&= \lim_{a\to\infty} M \int_0^a e^{-t(s-\gamma)}\, dt = \lim_{a\to\infty} M \left. \frac{e^{-t(s-\gamma)}}{-(s-\gamma)} \right|_{t=0}^{a} \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{M}{\gamma - s} \left[e^{-a(s-\gamma)} - 1 \right] = \frac{M}{s-\gamma}, \ \textit{untuk } s > \gamma
\end{aligned}$$

Jadi $\mathrm{L}\left\{f(t)\right\}$ ada untuk setiap $s > \gamma$.

Contoh 1.11

(a) $\mathrm{L}\{\cosh t\}$ dan $\mathrm{L}(t^n)$ ada karena

$$|\cosh t| = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} < \frac{e^t + e^t}{2} = e^t, \quad \forall t > 0, \text{ dan}$$

$$\left| t^n \right| = t^n < n!\, e^t, \quad \forall t > 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \mathrm{L}$$

(b) $\mathcal{L}\left\{t^{n}\sin\alpha t\right\}$ dan $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}$ ada, karena

$$\left|t^{n}\ \sin\beta t\right| \le \left|t\right|^{n} \le n!\,e^{t},\quad \forall t \ge 0,\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

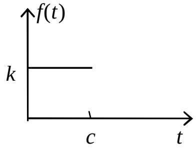
dan $\left|e^{\alpha t}\sin\beta t\right| \le e^{\alpha t},\ \ \forall t \ge 0.$

LATIHAN

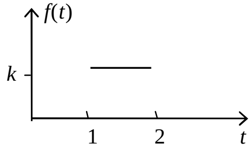
Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi berikut, dimana *k* dan *c* konstanta- konstanta.

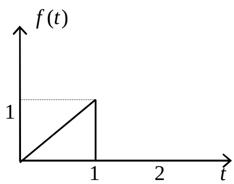
(a)



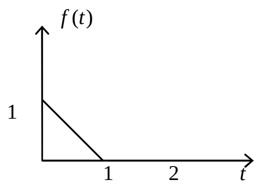
(b)



(c)



(d)



2) Tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ apabila $f(t)$ masing-masing fungsi berikut

(a) $f(t) = at^{2} + bt + c$; a, b, c konstanta-konstanta

(b) $f(t) = 3e^{-2t} + t\sqrt{t}$

(c) $f(t) = \cos(\omega t + \theta)$, θ suatu konstanta

(d) $f(t) = e^{i\omega t}$

3) Tentukan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ apabila $f(t)$ masing-masing fungsi berikut

(a) $f(t) = \cos^2 2t$

(b) $f(t) = 5t^3 - 6\sin 2t + 4e^{-4t}$

(c) $f(t) = 3t^2\sqrt{t} + 4\sinh 4t$

(d) $f(t) = 2\sinh t \cosh 2t + 4e^{3t} - 2\sin^2 t$

4) Tentukan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ apabila $F(s)$ masing-masing fungsi berikut

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s+4} + \dfrac{3s+4}{s^2+4}$

(b) $F(s) = \dfrac{4}{2s+4} - \dfrac{2s+5}{s^2-9} + \dfrac{3}{s^4}$

(c) $F(s) = \dfrac{5s-5}{s^2-s-6} + \dfrac{3s^2+5s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}$

(d) $F(s) = \dfrac{3s^2+2s+15}{s^3-s^2+9s-9} + \dfrac{3s^3+3s^2+9s+6}{s^2(s+1)}$

5) Manakah di antara fungsi-fungsi $f(t)$ berikut yang mempunyai transformasi Laplace dan jelaskan jawab Anda?

(a) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

(b) $f(t) = e^{t^2}$

(c) $f(t) = t^2 e^{2t}$

(d) $f(t) = e^t \ln(t+1)$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) (a) $\dfrac{k}{s}(1 - e^{-cs})$ (b) $\dfrac{k}{s}(e^{-s} - e^{-2s})$

(c) $-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$ (d) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}(e^{-s}-1)$

2) (a) $\frac{1}{s^3}(2a+bs+cs^2)$ (b) $\frac{3}{s+2}+\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}$

(c) $\frac{1}{s^2+\omega^2}(s\cos\theta-\omega\sin\theta)$ (d) $\frac{1}{s^2+\omega^2}(s+i\omega)$

3) (a) Tulis $\cos^2 2t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t$; $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+16}\right)$

(b) $\frac{30}{s^4}-\frac{12}{s^2+4}+\frac{4}{s+4}$

(c) $3\,\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{\frac{7}{2}}}+\frac{16}{s^2-16}$

(d) $\frac{3}{s^2-9}-\frac{1}{s^2-1}+\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}$

4) (a) $2\,e^{-4t}+3\cos 2t+2\sin 2t$

(b) $2\,e^{\frac{5}{2}t}-2\cosh 3t-\frac{5}{3}\sinh 3t+\frac{1}{2}\,t^3$

(c) $2\,e^{3t}+3\,e^{-2t}+2+3t+e^{-t}$

(d) $2\,e^{t}+\cos 3t+\sin 3t+2\cos t+\sin t+\cos 2t+\sin 2t$

5) (a) $\left|\frac{\sin t}{t}\right|\le M\,e^{t}$, untuk suatu M, $t>0$. Jadi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada.

(b) $e^{t^2}>e^{\gamma t}$, untuk setiap $\gamma>0$ berapapun besarnya untuk $t>\gamma$, karena $t^2>\gamma t$ untuk $t>\gamma$. Jadi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ tidak ada.

(c) $|f(t)|=t^2\,e^{2t}\le 2e^{t}\,.\,e^{2t}=2e^{3t},\ t\ge 0$. Jadi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada.

$|f(t)|=e^{t}\ln(t+1)\le e^{t}\ .\ 2t\le 4e^{2t},\ t\ge 0$. Jadi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada.

RANGKUMAN

Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$, $t \geq 0$ adalah

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt\,,$$

dan invers transformasi Laplace dari $F(s)$ adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = f(t)\,.$$

Transformasi Laplace dan inversnya memenuhi sifat kelinearan:

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + \beta \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

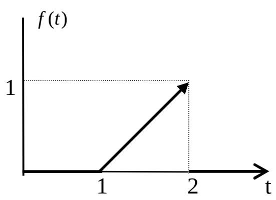
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\alpha F(s) + \beta G(s)\right\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$$

Selanjutnya $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ada apabila $f(t)$ kontinu bagian demi bagian pada selang [0, a], $\forall a > 0 \left|f(t)\right| \leq Me^{\gamma t}$ untuk suatu M dan γ. $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = F(s)$ terdefinisi untuk $s > \gamma$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ berikut



adalah ….

A. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}\left[e^{-s} + (s+1)e^{-2s}\right]$

B. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}\left[e^{-s} - (s+1)e^{-2s}\right]$

C. $F(s)=\frac{1}{s^2}\left[e^{-s}-(s-1)e^{-2s}\right]$

D. $F(s)=\frac{1}{s^2}\left[e^{-s}+(s-1)e^{-2s}\right]$

2) $\mathrm{L}\left\{2t^2+4\sin^2 t\right\}$ adalah ….

A. $\frac{12s^2+16}{s^3(s^2+4)}$

B. $\frac{12s^2-16}{s^3(s^2+4)}$

C. $\frac{-12s^2+16}{s^3(s^2+4)}$

D. $\frac{-12s^2-16}{s^3(s^2+4)}$

3) $\mathrm{L}\left\{4e^{-2t}+7\cosh 2t-8\sinh 3t\right\}$ adalah ….

A. $\frac{11s+8}{s^2-4}-\frac{32}{s^2-9}$

B. $\frac{11s+8}{s^2-4}-\frac{32}{s^2+9}$

C. $\frac{11s-8}{s^2-4}-\frac{32}{s^2-9}$

D. $\frac{11s-8}{s^2-4}-\frac{32}{s^2+9}$

4) $\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+4s+12}{(s+2)\,(s^2+12)}\right\}$ adalah ….

A. $f(t)=2e^{-2t}+2\cos 2t+2\sin 2t$

B. $f(t)=2e^{-2t}+\cos 2t+2\sin 2t$

C. $f(t)=2e^{-2t}+2\cos 2t+\sin 2t$

D. $f(t)=2e^{-2t}+\cos 2t+\sin 2t$

5) Fungsi $f(t)$ yang tidak mempunyai transformasi Laplace ialah ….

A. $f(t) = 2e^{-2t} \sin 3t, \quad t \geq 0$

B. $f(t) = 2t^4 \cos 2t, \quad t \geq 0$

C. $f(t) = 5 \sin t \, \cosh 2t, \quad t \geq 0$

D. $f(t) = 2e^{t^3}, \quad t \geq 0$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Transformasi Laplace Turunan dan Integral Suatu Fungsi

Dalam Kegiatan Belajar 2 ini akan dibahas transformasi Laplace turunan dan integral suatu fungsi. Hasil ini banyak digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial.

Teorema 1.4 [Turunan $f(t)$]

Misalkan $f(t)$ kontinu untuk setiap $t \geq 0$ dan memenuhi (1) (di Kegiatan Belajar 1) untuk suatu konstanta γ dan M. Misalkan pula $f'(t)$ kontinu bagian demi bagian demi bagian pada selang [0, a], $\forall a >$ 0. Maka transformasi Laplace dari $f'(t)$ ada untuk $s > \gamma$ dan berlaku

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) \tag{2}$$

Bukti: Kita meninjau kasus $f'(t)$ kontinu untuk $t \geq 0$. Dari definisi transformasi Laplace dan pengintegralan parsial, didapat

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\Big|_0^b + s\int_0^b e^{-st}\, f(t)dt\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-bt} f(b) - f(0)\right] + \lim_{b\to\infty} s\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt \\
&= -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)
\end{aligned}$$

untuk $s > \gamma$.

Untuk kasus $f'(t)$ kontinu bagian demi bagian, pembuktian seperti di atas, hanya pengintegralan dipecah atas selang-selang dimana $f'(t)$ diskontinu.

Perhatikan bahwa Teorema 1.4 dapat digunakan untuk $f''(t)$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} - f'(0) \\ &= s\left\{s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right\} - f'(0) \qquad (3) \\ &= s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, didapat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} - f''(0) \\ &= s\left\{s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\right\} - f''(0) \qquad (4) \\ &= s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \end{aligned}$$

asalkan $f''(t)$, $f'''(t)$ memenuhi persyaratan seperti di Teorema 1.4.

Dengan proses induksi akan diperoleh teorema berikut.

Teorema 1.5 [Turunan ke-*n*]

Misalkan $f(t)$ dan turunan-turunannya $f'(t)$, $f''(t)$,L , $f^{(n-1)}(t)$ kontinu untuk $t \geq 0$ dan memenuhi kondisi (1) di kegiatan belajar 1 untuk suatu konstanta γ dan *M*. Misalkan pula turunan $f^{(n)}(t)$ kontinu bagian demi bagian pada selang [0, *a*], $\forall a$ > 0, maka transformasi Laplace dari $f^{(n)}(t)$ ada untuk $s > \gamma$ berlaku

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1}f'(0) - \text{L} \ - f^{(n-1)}(0)} \qquad (5)$$

Contoh 1.12

Tentukan $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}$

Penyelesaian: Ambil $f(t)=t^2$ dan gunakan rumus (3). Jelas bahwa $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(t)=2$ dan $\mathcal{L}\{2\}=2\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{2}{s}$. Jadi dari rumus (3) didapat $\mathcal{L}\{f''(t)\}=\mathcal{L}\{2\}=\dfrac{2}{s}=s^2\mathcal{L}\{f(t)\}=s^2\mathcal{L}\{t^2\}$.

Ini memberikan $\mathcal{L}\{t^2\}=\dfrac{2}{s^3}$, sesuai dengan tabel transformasi Laplace.

Contoh 1.13

Tentukan $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}$.

Penyelesaian: Ambil $f(t)=\sin^2 t$, maka $f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$;

$$f(0)=0 \text{ dan } \mathcal{L}\{f'(t)\}=\mathcal{L}\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+4}.$$

Dari rumus (2), didapat

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$$

$$\frac{2}{s^2+4}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-0.$$

Jadi

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin^2 t\}=\frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Contoh 1.14

Tentukan $\mathcal{L}\{t\sin\omega t\}$.

Penyelesaian: Ambil $f(t)=t\sin\omega t$, maka $f'(0)=0$ dan

$$f'(t)=\sin\omega t+\omega t\cos\omega t;\ f'(0)=0$$

$$f''(t)=\omega\cos\omega t+\omega\cos\omega t-\omega^2 t\sin\omega t=2\omega\cos\omega t-\omega^2 f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=2\omega\mathcal{L}\{\cos\omega t\}-\omega^2\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$=\frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}-\omega^2\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Dari rumus (3) didapat

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$\frac{2\omega s}{s^2+\omega^2} - \omega^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$\left(\omega^2+s^2\right)\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

Jadi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\ \sin \omega t\} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Contoh 1.15

Tentukan solusi Masalah Nilai Awal

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Penyelesaian: Dengan mengambil transformasi Laplace dari PD dan dengan menggunakan rumus (2)–(3) maka didapat

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 4y' + 3y\right\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} + 4\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = 0$$

$$s^2\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} - s\,y(0) - y'(0) + 4\left(s\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} - y(0)\right) + 3\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = 0$$

$$\left(s^2+4s+3\right)\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = s\,y(0) + y'(0) + 4y(0) = 3s+1+12 = 3s+13$$

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{3s+13}{(s+3)\ (s+1)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}.$$

Jadi

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= -2\ e^{-3} + 5\ e^{-t}.$$

Solusi masalah nilai awal di atas adalah

$$y(t) = 5\ e^{-t} - 2\ e^{-3t}.$$

Sekarang kita memberikan teorema tentang pengintegralan.

***Teorema* 1.6 [Pengintegralan $f(t)$]**

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi kontinu bagian demi bagian yang memenuhi ketidaksamaan (1) di Kegiatan Belajar 1, untuk semua γ dan M, maka

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathrm{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s), \qquad s > 0,\ s > \gamma \tag{6}$$

atau

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u) \tag{7}$$

Bukti: Sebut $g\{t\} = \int_0^t f(u)du, \quad t \geq 0$.

Karena $f(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk $t > 0$, Maka $g(t)$ kontinu untuk $t \geq 0$ Selanjutnya $g'(t) = f(t)$, kecuali dititik-titik diskontinuitas dari $f(t)$ yang banyaknya berhingga. Jadi $g'(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk selang $[0, a]$, $\forall a > 0$.

Karena $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$, untuk suatu γ dan M, maka untuk γ yang diambil positif berlaku

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(u)|\, du \leq M\int_0^t e^{\gamma u} du = \frac{M}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) \leq \frac{2M}{\gamma}e^{\gamma t}\ .$$

Jadi fungsi $g(t)$ memenuhi semua persyaratan di Teorema 1.1 dan berdasarkan Teorema 1.1 tersebut, $\mathrm{L}\left\{g(t)\right\}$ ada dan berlaku

$$\mathrm{L}\left\{g'(t)\right\} = s\,\mathrm{L}\left\{g(t)\right\} - g(0)$$

$$\mathrm{L}\left\{f(t)\right\} = s\,\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} - 0$$

atau

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Contoh 1.16

Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin\,2u\;du\right\}$.

Penyelesaian: Ambil $f(t) = \sin 2t$, maka

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\sin 2t\right\} = \frac{2}{s^2+4}.$$

Dari Teorema 1.3, diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u\;du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\sin 2t\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Contoh 1.17

Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\sin 4u\,du\right\}$.

Penyelesaian: Sebut $f(t) = t\sin 4t$, maka dari Contoh 1.14 dengan mengambil $\omega = 4$, didapat

$$\mathcal{L}\left\{t\sin 4t\right\} = \frac{8s}{(s^2+16)^2}.$$

Selanjutnya dari Teorema 1.3 didapat

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\;\sin 4u\;du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{t\;\sin 4t\} = \frac{8s}{s(s^2+16)^2} = \frac{8}{(s^2+16)^2}$$

Contoh 1.18

Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right\}$.

Penyelesaian:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}.$$

Sebut $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$, maka $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$.

Jadi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \int_0^t e^{-u}\,du = -e^{-u}\Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = \int_0^t \left(1 - e^{-u}\right)du = \left(u + e^{-u}\right)\Big|_0^t = t + e^{-t} - 1.$$

Ini memberikan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = (1 - e^{-t}) - (t + e^{-t} - 1) = 2 - t - 2e^{-t}.$$

Contoh 1.19

Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}\right\}, \omega \neq 0$.

Penyelesaian: Ambil $F(s) = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}$ selanjutnya kita menggunakan dua kali berturut-turut Teorema 1.6, seperti Contoh 1.18 maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

Jadi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega u\; du = -\left.\frac{\cos\omega u}{\omega^2}\right|_0^t = \frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right\} = \int_0^t \frac{1-\cos\omega u}{\omega^2}\; du = \left.\frac{1}{\omega^2}\left(u-\frac{\sin\omega u}{\omega}\right)\right|_0^t$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)\;.$$

Perhatian

Teorema 1.4 dapat diperluas untuk fungsi $f(t)$ yang diskontinu untuk $t > 0$.

Bila $f(t)$ diskontinu loncat di $t = a$, $a > 0$, maka

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f\} - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]\; e^{-as}\,, \qquad (7)$$

di mana $f(a+0)$ adalah limit kanan f di a dan $f(a-0)$ adalah limit kiri $f(t)$ di a.

Pembuktian serupa seperti di Teorema 1.1, hanya berbeda dalam cara mengevaluasi $\left. e^{-st} f(t)\right|_0^{b\to\infty}$, mengingat $f(t)$ diskontinu loncat di $t = a$, yaitu

$$\left. e^{-st} f(t)\right|_0^{a-0} + \left. e^{-st} f(t)\right|_{a+0}^{b\to\infty}$$

Contoh 1.20

Tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ apabila

$$f(t) = \begin{cases} 1 \;, & 0 \le t \le 2 \\ 0 \;, & t > 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$f'(t) = 0,\quad t \ge 0,\quad t \ne 2,\quad f(0) = 1$

$f(2 + 0) = 0$ dan $f(2 - 0) = 1$.

Dari hubungan

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) - [f(2+0) - f(2-0)]\; e^{-2s}$$

didapat

$$0 = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - 1 - [0-1]\,e^{-2s}$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-2s}\right).$$

Contoh 1.21

Tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ apabila $f(t) = \begin{cases} t\ ;\ 0 \le t \le 1 \\ 0;\ t \ge 1 \end{cases}$

Penyelesaian:

$$f'(t) = \begin{cases} 1\ ;\ 0 \le t < 1 \\ 0\ ;\ t > 1 \end{cases}$$

dan

$$f''(t) = \begin{cases} 0\ ;\ 0 \le t < 1 \\ 0\ ;\ t > 1 \end{cases}$$

Dengan menggunakan (8) untuk $f''(t)$, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} - f'(0) - \left[f'(1+0) - f'(1-0)\right] e^{-s}$$

$$0 = s\,\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} - 1 - (0-1)\,e^{-s}$$

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right).$$

Dengan menggunakan (8) kembali untuk $f(t)$, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) - \left[f(1+0) - f(1-0)\right] e^{-s}$$

$$\frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right) = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - 0 + e^{-s}.$$

Jadi

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s}\right) - \frac{1}{s}\,e^{-s}.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan bahwa

(a) $\mathcal{L}\left\{t\cos\omega t\right\}=\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

(b) $\mathcal{L}\left\{t\cosh\omega t\right\}=\dfrac{s^2+\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$

(c) $\mathcal{L}\left\{t\sinh at\right\}=\dfrac{2\ as}{\left(s^2-a^2\right)^2}$

(d) $\mathcal{L}\left\{t\,e^{-at}\right\}=\dfrac{1}{\left(s+a\right)^2}$

2) Tentukan $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ apabila

(a) $f(t)=\begin{cases}1\ ; & 1<t<2\\ 0\ ; & t\le 1,\ t\ge 2\end{cases}$

(b) $f(t)=\begin{cases}t\ ; & 0<t<1\\ 1\ ; & 1<t<2\\ 0\ ; & t\ \text{ lainnya}\end{cases}$

(c) $f(t)=\begin{cases}t-1\ ; & 1<t<2\\ 0\ ; & t\ \text{ lainnya}\end{cases}$

3) Dengan menggunakan transformasi Laplace, tentukan solusi masalah nilai awal berikut.

(a) $y''+9y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2$

(b) $y''+y'-2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3$

(c) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7$

4) Tentukan:

(a) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 3u\, du\right\}$

(b) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin^2 u \, du\right\}$

(c) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2u} \, du\right\}$

(d) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t u \, e^{2u} \, du\right\}$

5) Gunakan Teorema 1.6 untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, apabila

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-1)}$

(c) $F(s) = \dfrac{54}{s^3(s-3)}$

(d) $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2(s^2+4)}$

(e) $F(s) = \dfrac{2s-\pi}{s^2(s-\pi)}$

(f) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$

(g) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan rumus untuk $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ untuk soal-soal (a), (b), (c) dan (d).

2) (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$

(b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s} - s\, e^{-2s}\right)$

(c) $\mathrm{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) - \frac{1}{s}\, e^{-2s}$

3) (a) $y(t) = \frac{2}{3}\sin 3t$

(b) $y(t) = e^{t} - e^{-2t}$

(c) $y(t) = 2e^{3t} - e^{-t}$

4) (a) $\frac{1}{s^2+9}$

(b) $\frac{2}{s^2(s^2+4)}$

(c) $\frac{1}{s(s-2)}$

(d) $\frac{1}{s(s-2)^2}$

(e) $\frac{2}{s^2(s^2+4)}$

5) (a) $\frac{1}{2}(e^{2t}-1)$

(b) $\cosh t - 1$

(c) $2e^{3t} - 9t^2 - 6t - 2$

(d) $\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}$

(e) $\frac{1}{\pi}(e^{\pi t}-1) + t$

(f) $\frac{1}{2\omega^3}[\sin\omega t - \omega t\,\cos\omega t]$ (*Gunakan Contoh* 1.14)

(g) $\frac{1}{2}\,t\,\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t$. [*<u>Petunjuk</u> : Gunakan Latihan* 1(a) *dan* 5(f)].

RANGKUMAN

Transformasi Laplace dari turunan diberikan oleh

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Khususnya:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2 \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s\ f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} = s^3 \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^2 f(0) - s\ f'(0) - f''(0)$$

Bila $f(t)$ diskontinu loncat di $t = a,\ \ a > 0$, maka

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) - \left[f(a+0) - f(a-0)\right] e^{-as} .$$

Persamaan tersebut dapat diperluas untuk titik diskontinuitas loncat yang banyaknya berhingga.

Transformasi Laplace dari Integral:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

dan inversnya adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\ du .$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $\mathcal{L}\left\{\cos^2 t\right\}$ adalah ….

A. $\dfrac{s^2+4}{s(s^2+4)}$

B. $\dfrac{s^2-4}{s(s^2+4)}$

C. $\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

D. $\dfrac{s^2-2}{s(s^2+4)}$

2) Bila $f(t)=\begin{cases} 2 \; ; & 0 \le t \le 3 \\ 0 \; ; & t > 3 \end{cases}$, maka $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ adalah ….

A. $\dfrac{2}{s}\left(1-e^{-3s}\right)$

B. $\dfrac{2}{s}\left(1-e^{3s}\right)$

C. $\dfrac{2}{s}\left(-1+e^{-3s}\right)$

D. $\dfrac{2}{s}\left(-1-e^{-3s}\right)$

3) Solusi masalah nilai awal: $y''+2y'-8y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=8$ adalah ….

A. $y(t)=-e^{2t}+2e^{-4t}$

B. $y(t)=3e^{2t}-2e^{-4t}$

C. $y(t)=-2e^{2t}+3e^{-4t}$

D. $y(t)=2e^{2t}-e^{-4t}$

4) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 2\,u\ du\right\}$ adalah ….

A. $\dfrac{s}{s^2+4}$

B. $\dfrac{1}{s^2+4}$

C. $\dfrac{s}{s^2+4}$

D. $\dfrac{2s}{s^2+4}$

5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+4}{s^2(s^2+4)}\right\}$ adalah ….

A. $\dfrac{1}{2}(1+2t-\cos 2t-\sin 2t)$

B. $\dfrac{1}{2}\left(1-2t-\cos 2t+\sin 2t\right)$

C. $\dfrac{1}{2}\left(1+2t+\cos 2t-\sin 2t\right)$

D. $\dfrac{1}{2}\left(1-2t+\cos 2t-\sin 2t\right)$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) B
2) A
3) C
4) D
5) D

Tes Formatif 2
1) C
2) A
3) D
4) B
5) A

Daftar Pustaka

Kreyszig E., (1993). *Advanced Engineering Mathematics* , John Willey and Sons, 7th edition.

Willey C.R. and Barret L.C., (1985). *Advanced Engineering Mathematics*, Mc.Graw Hill Co.