MODUL 1

Pengukuran Bunga

Drs. Pramono Sidi, M. Si.

PENDAHULUAN

Modul ini membicarakan tentang pengukuran bunga, fungsi akumulasi dan fungsi jumlah, tingkat bunga efektif, bunga sederhana, bunga majemuk, nilai sekarang, tingkat diskonto efektif, tingkat bunga dari diskonto nominal, laju bunga dan laju diskonto dan terakhir adalah bunga yang berubah-ubah.

Untuk lebih mengerti modul ini secara umum Anda diharapkan dapat memahami segala sesuatu tentang pengukuran bunga dan secara khusus Anda diharapkan dapat menjelaskan:

1. fungsi akumulasi dan fungsi jumlah;
2. tingkat bunga dan diskonto efektif;
3. bunga sederhana dan bunga majemuk;
4. nilai sekarang;
5. tingkat bunga dan diskonto nominal;
6. laju bunga dan diskonto.

KEGIATAN BELAJAR

Ukuran Bunga

PENGERTIAN BUNGA

Bunga adalah kompensasi yang dibayar oleh peminjam kapital kepada pemberi pinjaman karena penggunaan kapital tersebut.

Bentuk kompensasi tidak harus sama dengan bentuk kapital, tetapi pada hampir semua kasus, bentuk kapital dan kompensasi dinyatakan dalam satuan uang.

Fungsi Akumulasi (*Accumulation Function*) dan Fungsi Jumlah (*Amount Function)*

Jumlah yang mula-mula diinvestasikan disebut pokok (*principal*). Jumlah yang diterima setelah jangka waktu tertentu disebut nilai akumulasi (*accumulated value*). Selisih antara nilai akumulasi dan pokok disebut bunga (*interest*).

Fungsi akumulasi a(t) adalah fungsi yang memetakan pokok sebesar satu unit pada nilai akumulasinya setelah jangka waktu (*measurement period*) *t*.

Sifat fungsi akumulasi adalah:

1. $a(0) = 1$;
2. a(t) pada umumnya adalah fungsi tidak turun (bila $v > w$, maka $a(v) \geq a(w)$), walaupun pada beberapa kasus diketahui adanya fungsi a(t) yang turun (artinya investasi merugi) atau konstan (investasi tidak berbunga);
3. Bila bunga bertambah secara kontinu, maka a(t) kontinu.

Secara umum, pokok awal yang diinvestasikan tidak akan 1 tetapi akan menjadi sejumlah $k > 0$. dan fungsi jumlah dinotasikan dengan $A(t)$.

$A(t) = k\,a(t),\ k$ adalah pokok

$$A(0) = k \quad \text{……………………………… (1.1)}$$

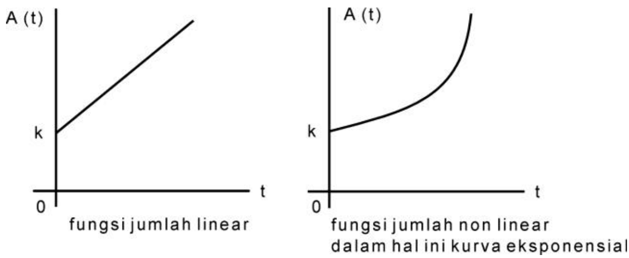
Sifat kedua dan ketiga dari fungsi akumulasi a(t) juga dimiliki oleh fungsi jumlah A(t).

Bunga yang diperoleh pada periode ke-n dari saat mulai investasi disimbolkan dengan I_n.

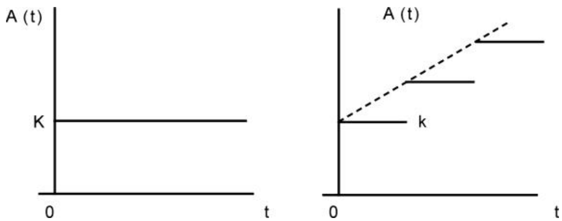
$$I_n = A(n) - A(n-1) \text{, untuk bilangan bulat } n \geq 1. \qquad \text{………. (1.2)}$$

1. Sebagai catatan bahwa I_n melibatkan efek bunga selama periode waktu di mana A(n) adalah momen waktu.
   Fungsi akumulasi adalah hal khusus dari fungsi jumlah di mana k = 1. Dalam banyak kasus, fungsi akumulasi dan fungsi jumlah dapat digunakan bertukar-tukar.
   Contoh fungsi jumlah:

2)



3)



Tingkat Bunga Efektif (*Effective Rate of Interest*)

Tingkat bunga efektif dinotasikan dengan i dan didefinisikan sebagai:

Jumlah uang yang diperoleh dalam satu periode sebesar satu unit uang yang diinvestasikan pada awal periode, yang dibayarkan pada akhir periode

$$i = a(1) - a(0) \Rightarrow a(1) = 1 + i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.3)$$

Terminologi tingkat bunga efektif digunakan bila bunga dibayarkan pada setiap akhir periode pengukuran (*measurement period*).

Bila dinyatakan dalam fungsi jumlah, tingkat bunga efektif adalah

$$i = \frac{(1+i)-1}{1} = i = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = i = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \quad \ldots(1.4)$$

yaitu rasio jumlah bunga yang diperoleh dalam satu periode terhadap jumlah pokok yang diinvestasikan pada awal periode.

Secara lebih umum, tingkat bunga efektif untuk periode ke-n dari saat mulai investasi adalah

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n-1)}$$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$.(1.5)

Bunga Sederhana (*Simple Interest*)

Dalam pembungaan sederhana, jumlah bunga yang diperoleh dalam setiap periode, besarnya tetap, yaitu $A(t) = 1 + i_s$ t, untuk setiap bilangan bulat $t \geq 0$.

Tingkat bunga sederhana (i_s) yang konstan tidak berarti tingkat bunga efektif (i) yang konstan pula. Tingkat bunga efektif untuk periode ke-n adalah

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{[1+in] - [1+i(n-1)]}{1+i(n-1)} = \frac{i}{1+i(n-1)} \quad \ldots\ldots.. (1.6)$$

Tingkat bunga efektif untuk periode ke-n tergantung pada n. Bila n besar, maka i_n kecil. Dengan kata lain, pada pembungaan sederhana, tingkat bunga efektif terus menurun.

Bila a(t) memiliki sifat $a(t+s)=a(t)+a(s)-1$ untuk $t \geq 0$ dan $s \geq 0$, maka

$a(t) = (1+i)^t$, untuk bilangan bulat $t \geq 0$. ………………………….... (1.7)

Bukti:
Asumsikan a(t) diferensiabel, sehingga

$$a'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{a(t+s) - a(t)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{[a(t)+a(s)-1] - a(t)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{a(s) - 1}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{a(s) - a(0)}{s} = a'(0) \quad , \quad a \quad \text{konstan}$$

ganti t dengan r kemudian integralkan kedua ruas dengan batas dari 0 sampai dengan t.

$$\int_0^t a'(r)\, dr = \int_0^t a'(0)\, dr$$

$$a(t) - a(0) = t \;.\; a'(0)$$

$$a(t) = 1 + t \;.\; a'(0)$$

ambil t = 1 maka $a(1) = 1+i = 1+a'(0)$ sedemikian sehingga $a'(0) = i$.
Jadi, $a(t) = 1 + i\,t$ untuk $t \geq 0$

Contoh: 1.1
Tentukan nilai akumulasi sebesar $2000 yang diinvestasikan untuk 4 tahun jika tingkat bunga sederhana 8% per tahun.

Jawab:
Nilai akumulasi = a(t) = 1 + i t
= 2000 [1 + (0,08)(4)] = $2640.

Bunga Majemuk (*Compound Interest*)

Pada pembungaan majemuk, bunga yang diperoleh dalam satu periode ikut dibungakan pada periode berikutnya.

$$a(t) = (1 + i)^t \text{ untuk bilangan bulat } t \geq 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.8)$$

Sebagai contoh, misalnya seseorang menginvestasikan $100 untuk 2 tahun dengan bunga 5% ia akan menerima $5 pada akhir setiap 2 tahun. Jadi pada tahun ke-2 ia mempunyai $105 yang akan diinvestasikan lagi dengan bunga 5%, dan ia akan menerima $5,25 pada akhir setiap 2 tahun berikutnya sehingga ia mempunyai $105 + $5,25 = $110,25 dan seterusnya.

Dengan tingkat bunga majemuk (i_c) yang konstan berarti tingkat bunga efektif (i) konstan pula. Jadi,

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i_c)^n - (1+i_c)^{n-1}}{(1+i_c)^{n-1}} = \frac{(1+i)-1}{i} = i_c \quad \ldots\ldots \ (1.9)$$

Bila $a(t)$ memiliki sifat $a(t+s) = a(t)a(s)$ untuk $t \geq 0$ dan $s \geq 0$, maka

$$a(t) = (1+i)^t \text{ , untuk setiap } t \geq 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.10)$$

Bukti:
Asumsikan a(t) diferensiabel, sehingga

$$a'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{a(t + s) - a(t)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{a(t) \;.\; a(s) - a(t)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{a(s) - 1}{s}$$
$$= a(t) \;.\; a'(0)$$

Jadi,

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt} \log \; a(t) = a'(0)$$

ganti t dengan r kemudian integralkan kedua ruas dengan batas dari 0 sampai dengan t.

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \ln \; a(r) \; dr = \int_0^t a'(0) \; dr$$

$$\ln \; a(t) - \ln \; a(0) = t \;.\; a'(0)$$

Kita ketahui bahwa

$$1n \;\; a(0) = 0, \quad \text{sehingga}$$
$$\ln a(t) = t \;\; a'(0)$$

Jika t = 1 dan a(1) = 1 + i), maka ln a(1) = $1n \;\; (1+i) = a'(0)$, sehingga
$\ln \;\; a(t) = t \;\; \ln \;\; (1+i) = \ln(1+i)^t$

Jadi,

$$a(t) = (1+i)^t \text{ untuk } t \geq 0 .$$

Contoh 1.2:
Dari contoh sebelumnya tetapi dengan menggunakan bunga majemuk.

Jawab:

Nilai akumulasi $a(t)=(1+i)^t = 2000(1+0,08)^4 = \$2720,98$.

Untuk satu periode, pembungaan majemuk menghasilkan bunga yang sama besarnya dengan pembungaan sederhana. Untuk periode yang lebih panjang, bunga majemuk menghasilkan bunga yang lebih besar daripada bunga sederhana. Sebaliknya, untuk periode yang lebih pendek dari satu periode, bunga sederhana menghasilkan bunga yang lebih besar.

Pada pembungaan sederhana, $a(t+s)-a(t)$ tidak tergantung pada t. (1.11)

Pada pembungaan majemuk $\dfrac{[a(t+s)-a(t)]}{a(t)}$ tidak tergantung pada t. (1.12)

Nilai Sekarang (*Present Value*)

Besaran 1 + i sering disebut faktor akumulasi (*accumulation factor*) karena $1+i$ mengakumulasikan investasi pada awal periode menjadi jumlah akumulasi pada akhir periode.

Sedangkan $= \dfrac{1}{1+i}$ disebut faktor diskonto (*discount factor*) karena mendiskonto nilai investasi pada akhir periode ke nilainya pada awal periode.

$$a^{-1}(t) \;.\; a(t) = 1,\quad a^{-1}(t) \text{ disebut fungsi diskonto.}$$

Pada pembungaan sederhana, $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{1+i\quad t}$ …………………. (1.13)

Pada pembungaan majemuk, $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$ …………………. (1.14)

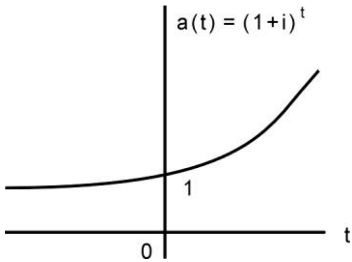
Pengakumulasian (*accumulating*) dan pendiskontoan (*discounting*) adalah proses yang berlawanan.

$(1+i)^t$ disebut nilai akumulasinya sebesar 1 pada akhir periode t.

v^t disebut nilai sekarang atau nilai diskonto sebesar 1 yang dibayarkan pada akhir periode t.

Menarik sekali kalau kita menghubungkan v^t dengan fungsi akumulasi untuk bunga majemuk dari sudut pandang yang berbeda.

Nilai v^t memperluas definisi fungsi akumulasi ke nilai negatif dari t, sehingga fungsi akumulasi untuk bunga majemuk mempunyai arti untuk semua nilai t seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Contoh 1.3:

1. Tentukan jumlah yang harus diinvestasikan pada tingkat bunga sederhana 9% setahun agar supaya mengakumulasi \$1000 pada akhir 3 tahun.

   Jawab:

   $$\frac{1000}{1+(0,09)(3)} = \frac{1000}{1.27} = \$787,40$$

2. Sama seperti soal di atas hanya bunga 9% bunga majemuk

   Jawab:

   $$1000\,v^3 = \frac{1000}{(1+0,0973} = \$772,18$$

Tingkat Diskonto Efektif (*Effective Rate Of Discount*)

Tingkat diskonto efektif adalah rasio jumlah bunga (kadang-kadang disebut jumlah diskonto atau diskonto saja) terhadap jumlah investasi pada akhir periode.

Bunga (*interest*) dibayar di akhir periode dan diperhitungkan dari jumlah investasi pada awal periode, sedang diskonto (*discount*) dibayar di awal periode tetapi diperhitungkan dari jumlah investasi pada akhir periode.

Tingkat diskonto efektif untuk periode ke-n dari saat mulai investasi adalah:

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \text{ untuk bilangan bulat } n \geq 1. \qquad \ldots\ldots\ldots \ (1.15)$$

Pada pembungaan majemuk, tingkat bunga efektif selalu konstan (tidak tergantung pada jangka waktu dari saat mulai investasi).

Untuk mengembangkan hubungan antara tingkat bunga efektif dengan tingkat diskonto efektif dibutuhkan definisi tentang konsep ekuivalensi tingkat bunga dan/atau tingkat diskonto seperti berikut ini.

Dua tingkat bunga atau tingkat diskonto dikatakan ekuivalen jika untuk suatu jumlah pokok tertentu yang diinvestasikan dalam jangka waktu yang sama, diperoleh nilai akumulasi yang sama pula.

Asumsikan bahwa seseorang meminjam sebesar 1 pada tingkat diskonto efektif d kemudian berlaku pokok awal adalah (1 – d) dan jumlah bunga (diskonto) adalah d.

Beberapa rumus tentang hubungan i, v dan d adalah

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}}{1-\mathrm{d}}, \qquad \mathrm{d} = \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{d} = \mathrm{iv}$$

$$\mathrm{i - id = d} \qquad = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i(1 - d)}$$

$$\mathrm{d(1+i)} \qquad = 1 = 1 - \mathrm{vi} - \mathrm{d} = \mathrm{id} \qquad \ldots\ldots\ (1.16)$$

$d = \dfrac{i}{1-i} = iv$ berarti terdapat hubungan penting antara tingkat diskonto (d) dengan faktor diskonto (v) yaitu d = iv.

Diskonto Sederhana (*Simple Discount*)

Pokok awal yang akan menghasilkan nilai akumulasi sebesar 1 pada akhir t periode adalah

$$a^{-1}(t) = 1 - dt\,,\ \text{untuk}\ 0 \le t \le \frac{1}{d} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1.17)$$

Diskonto Majemuk (*Compound Discount*)

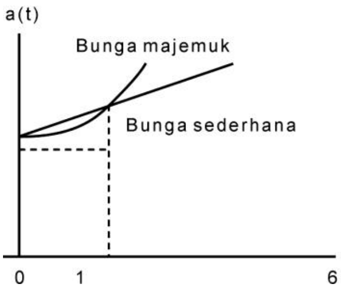
$$a^{-1}(t) \;=\; v^t \;=\; (1-d)^i\,,\ \text{untuk}\ t \ge 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1.18)$$

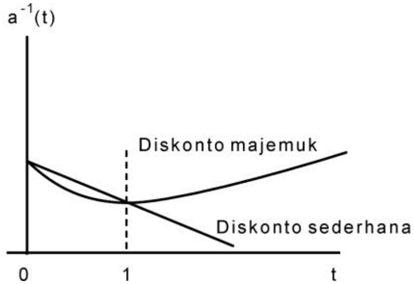
Sifat-sifat pendiskontoan sederhana adalah:

(i) Jika tingkat diskonto sederhana konstan maka tingkat diskonto efektif naik (bila $v \ge w$, maka $d_v \ge d_w$ i

(ii) Tingkat diskonto sederhana dan tingkat diskonto majemuk menghasilkan jumlah bunga yang sama besar untuk satu periode. Untuk periode yang lebih panjang dari satu, diskonto sederhana memberikan nilai sekarang yang lebih kecil daripada diskonto majemuk. Sebaliknya, untuk periode yang lebih pendek dari satu, diskonto sederhana menghasilkan nilai sekarang yang lebih besar daripada diskonto majemuk.

Gambar di bawah ini menunjukkan perbandingan dari bunga sederhana dengan bunga majemuk serta diskonto sederhana dengan diskonto majemuk.





Tingkat Bunga dan Tingkat Diskonto Nominal (*Nominal Rate Of Interest And Nominal Rate Of Discount*)

Apabila bunga dibayar lebih dari satu kali dalam satu periode, maka disebut sebagai *tingkat bunga/diskonto nominal*. Apabila bunga dibayarkan di akhir tiap-tiap subperiode, disebut *tingkat bunga nominal*. Apabila bunga dibayarkan di awal tiap-tiap subperiode, disebut *tingkat diskonto nominal*. Frekuensi pembayaran bunga disebut *periode konversi bunga* (*interest conversion period*).

Tingkat bunga nominal yang dibayarkan m kali dalam satu periode diinvestasikan dengan $i^{(m)}$, dimana m bilangan bulat positif.

Hubungan antara tingkat bunga nominal $i^{(m)}$ dengan tingkat bunga efektif dapat dituliskan sebagai berikut:

$$1+i = \left(+ \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1$$

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.19)$$

$\frac{i^{(m)}}{m}$ adalah tingkat bunga efektif untuk $\frac{1}{m}$ periode.

Berikutnya digambarkan akumulasi pada tingkat bunga nominal untuk satu penghitungan. Panah diagonal ke atas kanan menyatakan sebagai tanda plus dan panah bawah sebagai tanda sama dengan.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Waktu} & 0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \ldots & \frac{m-1}{m} & \frac{m}{m}=1 \\
\text{Bunga} & & \frac{(i)^m}{m}.1 & \frac{(i)^m}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) & \ldots & \frac{(i)^m}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-2} & \frac{(i)^m}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1} \\
\text{Saldo} & 1 & 1+\frac{(i)^m}{m} & \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 & \ldots & \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1} & \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i
\end{array} \tag{1.20}$$

Tingkat diskonto nominal yang dibayarkan m kali dalam setiap periode dinotasikan dengan $d^{(m)}$. Hubungan antara tingkat diskonto nominal $d^{(m)}$ dan tingkat diskonto efektif d adalah.

$$1-d = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

karena setiap ruas dari persamaan ini memberikan nilai sekarang sebesar 1 untuk dibayarkan pada akhir satu periode pengukuran. Kemudian persamaan ini diubah menjadi

$$d = 1-\left(\left(1-\frac{d(m)}{m}\right)\right)^m \quad \text{dan}$$

$$d^{(m)} = m\left[1-d^{\frac{1}{m}}\right] = m(1-v^{\frac{1}{m}}) = m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.21)$$

Gambar berikut ini menunjukkan pendiskontoan pada tingkat diskonto nominal untuk satu periode pengukuran. Panah diagonal ke kiri menunjukkan tanda minus dan panah ke bawah sebagai tanda sama dengan.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Waktu} & 0 & \frac{1}{m} & \ldots & \frac{m-2}{m} & \frac{m-1}{m} & \frac{m}{m}=1 \\
\text{Diskonto} & d^{(m)}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-1} & d^{(m)}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-2} & \ldots & d^{(m)}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right) & \frac{d^{(m)}}{m} & \\
\text{Saldo} & 1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m & \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-1} & \ldots & \left(1-\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 & 1-\frac{d^{(m)}}{m} & 1
\end{array}$$

Hubungan antara $i^{(m)}$ dan $d^{(m)}$ adalah .... (1.22)

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = \left(1-\frac{d^{(m)}}{p}\right)^{-p} \qquad \text{.............................. (1.23)}$$

Bila m = p, maka

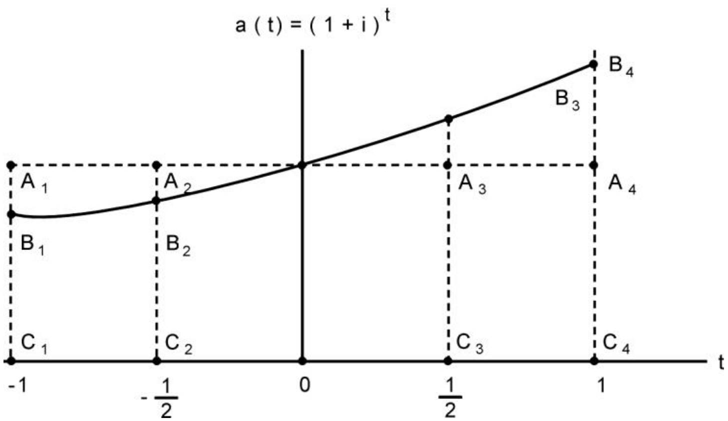
$$1 + \frac{i^{(m)}}{m} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1}$$

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m}\;\frac{d^{(m)}}{m} \qquad \text{..............................(1.24)}$$

Jika m = 1, maka $i^{(m)} = i$ (tingkat bunga efektif) dan jika p = 1 maka $d^{(p)} = d$ (tingkat diskonto efektif).

Pola lain dari pengembangan bunga seperti bunga sederhana dan diskonto sederhana yang tingkatnya sama akan tergantung pada periode waktu yang dipilih untuk perbandingan.

Di bawah ini disajikan grafik yang menggambarkan hubungan antara tingkat bunga nominal dan tingkat diskonto nominal.



Untuk m = 2

$A_1B_1 = d \qquad B_1C_1 = v = \left(1-\frac{d^{(2)}}{2}\right)^2$

$A_2B_2 = \frac{d^{(2)}}{2} \qquad B_2C_2 = v^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{d^{(2)}}{2}$

$A_3B_3 = \frac{i^{(2)}}{2} \qquad B_3C_3 = (1+i)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{i^{(2)}}{2}$

$A_4B_4 = i \qquad B_4C_4 = 1 + i = \left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$

Laju bunga dan laju diskonto (*force of interest dan force of discount*)
Laju bunga (*force of interest*) adalah ukuran intensitas bunga yang beroperasi pada suatu waktu dan dinotasikan dengan δ_t, yaitu laju bunga pada saat t dan

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)} \qquad \text{.......................................} \quad (1.25)$$

Sifat-sifat δ_t yang harus Anda ingat adalah:
(i) δ_t adalah ukuran intensitas bunga pada tepat waktu t.
(ii) δ_t menyatakan tingkat per periode pengukuran.

Dari definisi matematis untuk δ_t dapat diperoleh beberapa hubungan sebagai berikut:

$$\delta_t = \frac{d}{dt}\ln a(t) = \frac{d}{dt}\ln A(t) \qquad \text{.......................................} \quad (1.26)$$

$$a(t) = e^{\int_0^t \delta_r \, dr}$$

Bukti:
Ganti t dengan r dan integralkan kedua ruas dengan batas-batas dari 0 sampai dengan t.

$$\int_0^t \delta_r dr = \int_0^t \frac{d}{dr} \ln A(r) dr = \ln A(r) \Big|_0^t = \ln \frac{A(t)}{A(0)}$$

sehingga

$$e^{\int_0^t \delta_r dr} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t)$$

$$\int_0^n A(t)\delta_t dt = \int_0^n A'(t) dt = A(t) \Big|_0^n = A(n) - A(0), \quad \text{di mana}$$

A(n)-A(0) adalah jumlah bunga yang dibayarkan selama n periode pengukuran.

$\int_0^t A(t)\delta_t dt$ adalah jumlah bunga yang dibayarkan pada sejumlah A(t) tepat waktu t karena laju bunga δ_t .

$\int_0^n A(t)\delta_t dt \int_0^n A'(t) dt = A(t) \Big|_0^n = A(n) - A(0)$ = jumlah bunga yang dibayarkan pada sejumlah A(t) pada tepat waktu t karena laju bunga δ_t.
Laju diskonto (*forces of discount*) dinotasikan dengan δ^1_t dan secara matematis dapat ditunjukkan bahwa $\delta^1_t = \delta_t$.

Dengan menggunakan fungsi diskonto $a^{-1}(t)$ sebagai pengganti dari fungsi akumulasi a(t), maka laju diskonto pada waktu t adalah

$$\delta'_t = \frac{\frac{d}{dt} a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} \qquad \text{.. (1.27)}$$

Bukti:

$$\frac{\frac{d}{dt}\,a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)\,\frac{d}{dt}\,a(t)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)\;a(t)\;\delta_t}{a^{-1(t)}} = \delta_t$$

$$e^{\int_0^n \delta_t\,dt} = e^{n\,\delta} \quad \text{jika} \quad \delta_t = \delta \quad \text{untuk} \quad 0 \le t \le n$$

$$= a(n)$$

$$= (1+i)^n$$

sehingga

$e^{\delta} = 1+i$ atau $i = e^{\delta} - 1$ (i adalah fungsi dari δ).

$\ln\ e^{\delta} = 1n(1+i)$ sehingga $\delta = \ln(1 + i)$

$$\delta = \frac{\frac{d}{dt}(1+i)^t}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t\ \ln\ (1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i)$$

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \ldots$$

$$\delta = \ln(1+i) = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots$$

Kedua deret ini secara normal akan mempunyai tingkat konvergensi yang cepat, karena dalam praktik i dan δ selalu bilangan positif kecil.
Sekarang bagaimana kita menyatakan $i^{(m)}$.

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}$$

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta/m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.28)$$

$$i^{(m)} = m\left(e^{\delta/m} - 1\right)$$

Dengan menggunakan ekspansi deret, maka

$$i^{(m)} = m\left[\frac{\delta}{m} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \delta + \frac{\delta^2}{2!m} + \frac{\delta^3}{3!m} + \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.29)$$

dengan mengambil limit $m \to \infty$, maka

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.30)$$

secara analog dapat dinyatakan

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.31)$$

Contoh 1.4:
Tentukan nilai akumulasi sebesar \$1000 yang diinvestasikan untuk 10 tahun jika laju bunga 5%.

Jawab:
Nilai akumulasi $1000\ e^{(0,05)(10)} = 1000\ e^{0,5}$

Pada pembungaan majemuk, apabila δ_t konstan ($\delta_t = \delta$), hubungan antara laju bunga/laju diskonto δ dan tingkat bunga efektif i, tingkat bunga nominal $i^{(m)}$, tingkat diskonto efektif d, tingkat diskonto nominal $d^{(p)}$ dan faktor diskonto v adalah

$$e^{\delta} = 1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = (1-d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = v^{-1} \qquad \ldots\ldots (1.32)$$

Untuk pembungaan sederhana, dapat ditunjukkan bahwa

$$\delta_t = \frac{i}{1 + i\ t},\ \text{untuk } t \geq 0 \quad \text{dan} \quad \delta_t = \frac{d}{1 + dt} \ \text{untuk} \ 0 \leq t \leq \tfrac{1}{d}.$$

$$\delta_t = \frac{\frac{d}{dt}\ a(t)}{a(t)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(1 + i\ t\right)}{(1 + i\ t)} = \frac{i}{1 + i\ t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.33)$$

$$\delta_t = \delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}\ a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}(1 - dt)}{(1 - dt)} = \frac{d}{i - dt} \quad \ldots\ldots\ (1.34)$$

Tingkat Bunga yang Bervariasi

Tingkat bunga yang diterapkan dari satu periode ke periode yang lain dapat saja bervariasi. Secara teoretis, tingkat bunga (lebih tepatnya laju bunga) bahkan dapat bervariasi dari satu saat ke saat yang lain.

Apabila laju bunga bervariasi dari saat ke saat maka fungsi akumulasinya adalah

$$a(t) = e^{\int_0^t d\ .\ dr}$$

Apabila variasi terjadi hanya dari satu periode ke periode (dalam tiap-tiap periode, laju bunga tidak berubah), maka fungsi akumulasinya adalah

$$a(t) = (1+i_t)(1+i_2)...(1+i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1.35)$$

$$a^{-1}(t) = (1+i_t)^{-1}(1+i_2)^{-1}...(1+i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^{t}(1+ik)^{-1} = \prod_{k=1}^{t} v_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1.36)$$

Contoh 1.5:

(1) Tentukan nilai akumulasi sebesar 1 pada akhir n tahun jika $\delta_t = \frac{1}{1 + t}$

Jawab:

$$e^{\int_0^n \delta_t\ dt} = e^{\int_0^n \frac{1}{1+t} dt} = e^{1n(1+t)\big|_0^n} = 1+n$$

(2) Tentukan nilai akumulasi sebesar \$1000 pada akhir 15 tahun jika tingkat efektif 5% untuk 5 tahun pertama, $4\frac{1}{2}$% untuk 5 tahun kedua dan 4% untuk 5 tahun ketiga.

Jawab:
Gunakan rumus

$$a(t) = (1 + i_1) \ \dots (1 + i_t) = \prod_{k=1}^{t} (1 + i_k)$$

Sehingga nilai akumulasi

$$1000(1 + 0{,}05)^5 \, (1 + 0{,}045)^5 \, (1 + 0{,}04)^5$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui fungsi $a(t) = t^2 + t + 1$
   a) Buktikan bahwa $a(0) = 1$.
   b) Tunjukkan bahwa $a(t)$ fungsi naik untuk semua $t \geq 0$.
   c) Apakah $a(t)$ kontinu?
   d) Tentukan tingkat bunga efektif i untuk $a(t)$.
   e) Tentukan i_n.
2) Diketahui $A(t) = 100 + 5t$
   a) Tentukan i_5
   b) Tentukan i_{10}
3) Dengan tingkat bunga sederhana berapa, \$500 akan menjadi \$615 dalam $2\frac{1}{2}$ tahun?
4) Diketahui uang sebesar \$600 yang diinvestasikan selama 2 tahun akan memperoleh bunga \$264. Tentukan nilai akumulasi dari uang sebesar \$2000 yang diinvestasikan pada tingkat bunga majemuk untuk 3 tahun.
5) Pada laju δ , suatu unit akan digandakan dua kali dalam 23,1 tahun. Berapa tahun unit tersebut akan digandakan empat kali pada tingkat nominal secara numerik sama dengan δ dan terkonversi tiga kali setiap 2 tahun.

6) Berapa tingkat bunga majemuk nominal yang akan menghasilkan tingkat bunga efektif 6%.
7) Dana sebesar $5000 dipinjam pada 15 Mei 1998 dan akan dikembalikan pada 15 Agustus 2001 dengan bunga akumulasi majemuk 4% per kuartal. Tidak ada pembayaran yang dibuat sampai dengan 15 Agustus 2003.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $a(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
   b) $a'(t) = 2t+1 > 0$ untuk semua $t \geq 0$
      Jadi a(t) fungsi naik/menaik
   c) Cara yang paling mudah untuk menyelesaikan soal ini adalah meneliti bahwa grafik dari a(t) adalah sebuah parabola dan oleh karena itu a(t) kontinu.

2) a) $i_n = \dfrac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)}$

$$i_5 = \frac{A(5) - A(4)}{A(4)} = \frac{125 - 120}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

$$i_{10} = \frac{A(10) - A(9)}{A(9)} = \frac{150 - 145}{145} = \frac{5}{145} = \frac{1}{29}$$

3) $500(1 + i) = 6{,}5$

$$i = \frac{615-500}{500} = \frac{115}{500}$$

5) $e^{23{,}1\delta} = 2 \rightarrow \delta = \dfrac{\ln 2}{23{,}1} = \dfrac{0{,}693}{231} = 0{,}03$

Jika $\delta = i^{(3/2)}$, maka

$$\left(1 + \frac{i^{(3/2)}}{3/2}\right)^{3/2\ t} = 4$$

$$\left(1 + \frac{0,03}{3/2}\right)^{3/2\ t} = 4$$

$$(1,02)^{1,5\ t} = 4$$

1,5 t ln (1,02) = ln 4

1,5 t ln (1,02) = 2 ln 2 = 2 (0,693)

t = 46,6667 tahun

6) Kita ingin mencari $i^{(2)}$

$$\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right) = 1 + i$$

$$\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right) = 1,06 \rightarrow i^{(2)} = 5,9126025\%$$

7) Bunga majemuk per tahun = $\frac{0,04}{4}$ = 0,01 = i (sebelum 15 Agustus 2001)

$i = \frac{0,05}{2}$ = 0,025 (bunga majemuk setelah 15 Agustus 2001)

Nilai akumulasi (AV) = $5000(1 + 0,01)^{13}(1 + 0,025)^{4}$

= 6281,2102

RANGKUMAN

Tingkat bunga atau Tingkat diskonto	Nilai akumulasi dari 1 pada saat t. (a(t))	Nilai sebarang dari 1 pada saat t ($a^{-1}(t)$)
Bunga majemuk		
i	$(1 + i)^t$	$v^t = (1+i)^{-t}$
$i^{(m)}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$
d	$(1 - d)^{-t}$	$(1 - d)^{t}$

$d^{(m)}$ δ	$\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$ $e^{\delta t}$	$\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$ $e^{-\delta t}$
Bunga sederhana i Diskonto sederhana d	$1 + i\,t$ $(1 - dt)^{-1}$	$(1 + i\,t)^{-1}$ $1 - dt$

TES FORMATIF

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diketahui fungsi jumlah $A(t) = t^2 + 2t + 3$
   a) Tentukan fungsi akumulasi $a(t)$.
   b) Buktikan bahwa $a(t)$ memenuhi tiga sifat fungsi akumulasi.
   c) Tentukan I_n.

2) Jika tingkat bunga nominal 3% terkonversi sekali setiap 2 tahun, tentukan tingkat bunga efektif.

3) Pada Juni 1998, X meminjam sebesar \$2000 dan setuju untuk membayar dengan bunga majemuk kapan saja ia siap mempunyai dana. Jika bunga majemuk 6% per kuartal. Tentukan berapa X akan membayar pada 1 Agustus 2002.

4) Jika $\delta_t = \dfrac{6}{94+6t}$, berapa tingkat bunga efektif selama tahun kedua?

5) Dua dana deposito masing-masing sebesar \$1000 yang satu mengakumulasi pada laju bunga 2% setahun dan yang satunya lagi mengakumulasi pada laju bunga efektif tahunan 2% setahun. Berapa perbedaan dua dana tadi setelah 10 tahun?

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif di atas yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar di atas.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar di atas, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif

1) a) $\frac{1}{3}(t^2 + 2t + 3)$.

   c) 2n + 1.

2) i = 2,9563012%.

3) AV = 2000 $(1{,}015)^{16\frac{2}{3}}$ = 2563,2878.

4) i = 6%.

5) Dana 1 = 1221,4028.
   Dana 2 = 1218,9944.
   Beda = 2,4083416.

Daftar Pustaka

Kellison, Stephen. G. (1991). *The Theory of Interest*. 2nd Edition. Illinois: Irwin, Burr Ridge.

Mc Cutcheon, JJ. MA, Ph.d, FFA and Scott, W.F. MA, Ph.d, FFA. (1986). *An Introduction to the Mathematics of Finance* 1st Edition. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries in Scotland.