MODUL 1

Sistem Bilangan Kompleks

Drs. Hidayat Sardi, M.Si.

PENDAHULUAN

Modul ini akan membahas bilangan kompleks, sistemnya dan arti geometri dari bilangan kompleks. Untuk itu, Anda dianggap telah paham betul tentang sistem bilangan real serta sifat-sifat yang terkandung di dalamnya.

Apabila kita ingin mencari nilai x yang memenuhi persamaan:

$$x^2 + 1 = 0 \text{ dan } x^2 - 4x + 5 = 0$$

maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi masing-masing persamaan tersebut. Untuk dapat menyelesaikan atau memperoleh jawaban perlu diperkenalkan bilangan kompleks.

Dalam bentuk formal, **bilangan kompleks** didefinisikan sebagai **pasangan terurut dua bilangan real**. Namun demikian, ada beberapa penulisan lain yang mempunyai maksud atau arti yang sama dengan pendefinisian tersebut.

Arti geometri dari bilangan kompleks dalam beberapa hal dapat dipahami sebagai **vektor** di bidang. Meskipun demikian, hal tersebut hanya untuk memudahkan Anda memahami bilangan kompleks pada tahap awal saja.

Secara umum, setelah memelajari modul ini Anda diharapkan dapat memahami:

a. operasi aljabar pada sistem bilangan kompleks;
b. sifat dan arti geometri dari bilangan kompleks.

Secara lebih khusus lagi, Anda diharapkan dapat:

a. menjumlahkan, mengalikan, mengurangkan, dan mencari invers suatu bilangan kompleks;
b. menyajikan bilangan kompleks dalam sistem koordinat Cartesius, polar, dan bentuk eksponen;

c. menyatakan persamaan dan pertaksamaan dari daerah lingkaran atau daerah lainnya dalam bentuk bilangan kompleks;
d. menyelesaikan pertaksamaan dalam nilai mutlak (*modulus*) bilangan kompleks;
e. mencari akar dan memangkatkan suatu bilangan kompleks.

KEGIATAN BELAJAR 1

Aljabar Bilangan Kompleks

Definisi (1.1.1)

> Bilangan kompleks adalah **pasangan terurut** dari dua bilangan real x dan y, yang dinyatakan oleh (x, y).

Pernyataan di atas merupakan definisi formal dari bilangan kompleks. Selanjutnya, perhatikan beberapa lambang dan ketentuan berikut. Bilangan kompleks dilambangkan oleh huruf $z = (x, y)$. Bilangan real x disebut **bagian real** dari z, ditulis $\mathrm{Re}(z)$. Bilangan real y disebut **bagian imaginer** dari z, ditulis $\mathrm{Im}(z)$. Beberapa pasangan terurut diidentifikasikan secara khusus, yaitu:

$(x, 0) = x$, merupakan **bilangan real**;

$(0, 1) = i$, dinamakan **satuan imaginer**.

Kesamaan dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi (1.1.2)

> Dua bilangan kompleks $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ dikatakan **sama**, ditulis $z_1 = z_2$, jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Khususnya $z = (x, y) = (0, 0)$ jika dan hanya jika, $x = 0$ dan $y = 0$.

Operasi penjumlahan dan perkalian dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi (1.1.3)

Jika $z_1=(x_1,y_1)$ dan $z_2=(x_2,y_2)$ adalah bilangan kompleks, maka **jumlah** dan **hasil kali** z_1 dan z_2, masing-masing adalah bilangan kompleks z_1+z_2 dan z_1z_2 yang diberikan oleh aturan berikut,

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$$

$$z_1\,z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1\,y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

Himpunan semua bilangan kompleks C, bersama operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu **lapangan (*field*).**

Teorema (1.1.1)

Himpunan bilangan kompleks C memenuhi sifat-sifat lapangan, yaitu:

1. $z_1+z_2\in C$ dan $z_1z_2\in C,\ \ \forall z_1,\ z_2\in C$
2. $z_1+z_2=z_2+z_1$ dan $z_1z_2=z_2z_1,\ \ \forall z_1,\ z_2\in C$
3. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
   dan $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\ \ \forall z_1,z_2,z_3\in C$
4. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,\ \ \forall z_1,z_2,z_3\in C$
5. Ada $0=(0,0)\in C$, sehingga $z+0=0+z=z;\ \ \forall z\in C$
6. Ada $1=(1,0)\neq 0,\ \ 1\in C$, sehingga $z.1=1.z=z\ ;\ \forall z\in C$
7. Untuk setiap $z=(x,y)\in C$ ada $-z=(-x,-y)\in C$
   sehingga $z+(-z)=(-z)+z=0$
8. Untuk setiap $z=(x,y)\in C$, $z\neq 0$ ada $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)\in C$
   sehingga $zz^{-1}=z^{-1}z=1$.

Bukti dari Teorema 1.1.1 dapat Anda lakukan dengan berpegang pada Definisi 1.1.2 dan 1.1.3.

Pada bagian berikut, Anda akan diperkenalkan pada suatu penulisan lain dari bilangan kompleks $z=(x,y)$. Dengan identifikasi $x=(x,0)$ dan $i=(0,1)$, gunakan Definisi 1.1.3, maka diperoleh:

$(0,y)=(0,1).(y,0)=iy$, disebut bilangan imajiner sejati,

$$z=(x,y) = (x,0)+(0,y)$$
$$=x+iy$$
$$=x+yi$$

Demikian pula $i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$
Karena itu setiap bilangan kompleks $z=(x,y)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$z = x + yi$$

dengan,

x dan y bilangan real, $i^2 = -1$
x disebut bagian real dari z, ditulis $x = \mathrm{Re}(z)$
y disebut bagian imajiner dari z, ditulis $y = \mathrm{Im}(z)$.

Dengan menggunakan penulisan $z = x + yi$, Anda akan lebih mudah melakukan operasi pada bilangan kompleks karena operasinya dapat dilakukan seperti operasi pada bilangan real dengan memandang $i^2 = -1$. Hal tersebut akan terlihat pada definisi beserta contoh-contohnya sebagai berikut.

Definisi (1.1.4)

Jika $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ adalah bilangan kompleks, maka:

a. $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$
b. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$

Pada definisi penjumlahan dan perkalian terlihat jelas seperti operasi pada bilangan real.

Jika pada $z_1 z_2 = \left(x_1 + y_1 i\right)\left(x_2 + y_2 i\right)$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2$$
$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

kemudian i^2 diganti dengan -1, maka didapat:

$$z_1 z_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) i$$

Contoh (1.1.1)

Jika $z=(x,y)$ dan $1=(1,0)$, maka

$z.1=(x,y)(1,0)=(x+yi)(1+0i)\ \ =x+yi=z$.

[Bukti Teorema (1.1.1) No. 6]

Jika $z=(x,y)$ dan $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$, maka

$$\begin{aligned}
zz^{-1} &= (x+yi)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i\right)\\
&= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\left(\frac{yx-xy}{x^2+y^2}\right)i\\
&= 1+0.i\\
&= 1
\end{aligned}$$

[Teorema (1.1.1) No. 8, terbukti].

Contoh (1.1.2)

Jika $z=(x,y)$ dan $a=(a,0)$ maka,

$$az=(a,0)(x,y)=(a+0i)(x+yi)=ax+ayi$$

Khususnya jika $a=-1=(-1,0)$, maka

$-1.z=-x-yi=-(x+yi)=-z$.

Contoh (1.1.3)

Jika $z_1=x_1+y_1i$ dan $z_2=x_2+y_2i$, maka

$$\begin{aligned}
z_1-z_2 &= (x_1+y_1i)-(x_2+y_2i)=(x_1+y_1i)+(-x_2-y_2i)\\
&= (x_1-x_2)+(y_1-y_2)\ i
\end{aligned}$$

Selanjutnya jika $z_2\neq 0$, maka

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}.\frac{x_2-y_2i}{x_2-y_2i}$$

$$=\frac{x_1x_2-x_1y_2i+x_2y_1i-y_1y_2\,i^2}{x_2{}^2-y_2{}^2i^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}i$$

Khususnya jika $z=(x,y)\neq 0$ dan $1=(1,0)$, maka

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\left(\frac{1}{x+yi}\right)\left(\frac{x-yi}{x-yi}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i = z^{-1}.$$

Cara-cara pengerjaan pada Contoh 1.1.3 ini, dapat menolong Anda apabila tidak dapat mengingat langsung z_1-z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ dan $\dfrac{1}{z}$.

Dengan menggunakan kedua hal terakhir di atas dapat diperlihatkan

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right),\ z_2\neq 0 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{z_1z_2}=\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right),\ z_1\neq 0,\ z_2\neq 0$$

Contoh (1.1.4)

Diberikan $z_1=2-3i$ dan $z_2=-5+i$. Tentukan atau tuliskan bilangan kompleks z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 dan $\dfrac{z_1}{z_2}$ dalam bentuk $a+bi$; a dan b real.

Jawab:

$$z_1+z_2=(2-3i)+(-5+i)=(2-5)+(-3+1)i=-3-2i$$

$$z_1-z_2=(2-3i)-(-5+i)=(2+5)+(-3-1)i=7-4i$$

$$z_1z_2=(2-3i)(-5+i)=-10+2i+15i-3i^2=-7+17i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-5+i}=\left(\frac{2-3i}{-5+i}\right).\left(\frac{-5-i}{-5-i}\right)=\frac{-10-2i+15i+3i^2}{25-i^2}$$

$$=\frac{-13+13i}{26}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Definisi (1.1.5)

Jika $z=(x,y)=x+yi$, maka bilangan **kompleks sekawan** (*conjugate*) dari z; ditulis $\bar{z}$ dan didefinisikan sebagai $\bar{z}=(x,-y)=x-yi$

Sebagai contoh untuk Definisi 1.1.5 di atas adalah:

$z_1 = 3+4i$, kompleks sekawannya adalah $\overline{z}_1 = 3-4i$

$z_2 = -2-5i$, kompleks sekawannya adalah $\overline{z}_2 = -2+5i$

Operasi aljabar bilangan kompleks sekawan di dalam himpunan bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut:

Teorema (1.1.2)

a. Jika z bilangan kompleks, maka
   1. $\overline{\overline{z}} = z$
   2. $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
   3. $z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
   4. $z\,\overline{z} = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$

b. Jika z_1 dan z_2 bilangan kompleks, maka
   1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
   2. $\overline{z_1-z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$
   3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2$
   4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

Contoh (1.1.5) [Bukti Teorema (1.1.2)]

a. Misalkan $z = x+yi$, maka $\overline{z} = x-yi$

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x-yi} = x+yi = z$$

$$z+\overline{z} = (x+yi)+(x-yi) = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z-\overline{z} = (x+yi)-(x-yi) = 2yi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

$$z\,\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$$

b. Misalkan $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{\left(x_1+y_1 i\right)+\left(x_2+y_2 i\right)}$$

$$= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$$
$$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$$
$$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)$$
$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2 i}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} i; \quad z_2 \neq 0$$
$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{x_1 + y_1 i}}{\overline{x_2 + y_2 i}} = \frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i} = \left(\frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i}\right)\left(\frac{x_2 + y_2 i}{x_2 + y_2 i}\right)$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} i$$

Dari dua hal di atas diperoleh $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Bagian lain dari Teorema (1.1.2) yang belum dibuktikan, Anda coba sendiri sebagai latihan.

Contoh (1.1.6)
Jika $z = -1 - i$, buktikan $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Bukti:

$$z^2 + 2z + 2 = (-1 - i)^2 + 2(-1 - i) + 2$$
$$= 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2$$
$$= 1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2 = 0 \text{ [terbukti].}$$

Contoh (1.1.7)
Buktikan $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$.

Bukti:

Misalkan $z_1 = x_1 + y_1 i$; $z_2 = x_2 + y_2 i$, maka diperoleh $\overline{z}_1 = x_1 - y_1 i$; $\overline{z}_2 = x_2 - y_2 i$.

$$\begin{aligned} z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 i + x_2y_1 i + x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i \\ &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2) \text{ [terbukti].} \end{aligned}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Dalam Soal No. 1) s/d No. 8), ubahlah bilangan kompleks berikut menjadi bentuk $x + yi$.

1) $(5-2i)+(2+3i)$	4) $\dfrac{6i}{6-5i}$	7) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$
2) $(2-i)-(6-3i)$	5) $i^2, i^3, i^4, i^5, \ldots, i^{10}$	8) $\overline{(2+i)^2}$
3) $(2+3i)(-2-3i)$	6) $\dfrac{1+i}{1-i}$	

9. Cari bilangan kompleks $z = x + yi$ yang memenuhi

   a. $z^2 - 3z + 3 = i$ b. $\overline{z} = -z$.

Petunjuk Jawaban Latihan

Pengerjaan Soal No. 1) s/d No. 3) caranya lihat Contoh (1.1.4)

1) $7 + i$
2) $-4 + 2i$
3) $5 - 12i$
4) $-\dfrac{30}{61} + \dfrac{36}{61}i$ [Petunjuk: Kalikan soal tersebut dengan $\dfrac{6+5i}{6+5i}$, dimana $6+5i$ merupakan sekawan dari $6-5i$]
5) $-1, -i, 1, i, \ldots, -1$, ingat $i^2 = -1$
6) i . Cara penyelesaian seperti Soal No. 4).

7) $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$. Samakan penyebut, kemudian kerjakan serupa dengan No. 4).

8) $3-4i$. Kuadratkan dahulu $2+i$, kemudian tentukan sekawannya.

9) a. $z = 2+i$ dan $z = 1-i$. Selesaikan dengan Rumus abc
   b. $z = yi$.

RANGKUMAN

Lambang bilangan kompleks :

$$z = (x, y) = x + yi;\ \ x, y \text{ real};\ i^2 = -1$$

$$(x,0) = x\ ;\ \ (0, y) = yi\ ;\ \ (0,1) = i\ .$$

Operasi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 z_2 = \left(x_1 + y_1 i\right)\left(x_2 + y_2 i\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} i$$

Himpunan bilangan kompleks C bersama operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu lapangan (Coba ingat kembali sifat-sifat lapangan).

Invers bilangan kompleks $z = x + yi$ terhadap operasi penjumlahan adalah $-z = -x - yi$ operasi perkalian adalah

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}\ i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right),\ z_2 \neq 0$$

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right);\ z_1 \neq 0\ ,\ \ z_2 \neq 0$$

Kompleks sekawan:
Bilangan kompleks sekawan dari $z = x + yi$ adalah $\bar{z} = x - yi$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = -4 + 4i$, maka $3z_1 + 4z_2 = \ldots$.
   A. $-13+19i$
   B. $-19+13i$
   C. $-13-19i$
   D. $-11+7i$

2) Bagian Real dari $z = \dfrac{1}{2+i}$ adalah ….
   A. $\dfrac{1}{2}$
   B. $\dfrac{2}{3}$
   C. $\dfrac{1}{3}$
   D. $\dfrac{2}{5}$

3) Bentuk $x + yi$ dari $\dfrac{11 + 2i}{4+3i}$ adalah ….
   A. $\dfrac{11}{4} + \dfrac{2}{3}i$
   B. $15+5i$
   C. $2-i$
   D. $\dfrac{11}{25} + \dfrac{2}{25}i$

4) Jika $z_1 = 3+2i$ dan $z_2 = 2-i$, maka $z_1 z_2 = \ldots$.
   A. $8-2i$
   B. $4+i$
   C. $8+i$
   D. $4+2i$

5) Jika $z_1 = 2 - 3i$ dan $z_2 = 4 - i$, maka $\dfrac{z_1}{z_2} = \ldots$.

A. $\dfrac{11}{17} - \dfrac{10}{17}i$

B. $\dfrac{5}{17} - \dfrac{10}{17}i$

C. $\dfrac{11}{17} - \dfrac{3}{17}i$

D. $\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}i$

6) Jika $z = x + yi$, maka $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right) = \ldots$.

A. $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

B. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

C. $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

D. $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

7) Bilangan kompleks $z = \dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i} = \ldots$.

A. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$

B. $\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$

C. $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$

D. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$

8) Jika $z = 2 + i$, maka $\overline{z}^2$ sama dengan ....
   A. $3 - 2i$
   B. $3 + 2i$
   C. $3 - 4i$
   D. $3 + 4i$

9) Jika $z = 1 - i$, maka z^3 sama dengan ....
   A. $2 - 2i$
   B. $-2 - 2i$
   C. $1 - i$
   D. $4 - 4i$

10) Pernyataan berikut yang benar adalah ....
   A. $\overline{i\,z} = -iz$
   B. $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$
   C. $\mathrm{Im}(iz) = -\mathrm{Re}(z)$
   D. $\overline{z} = -z$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

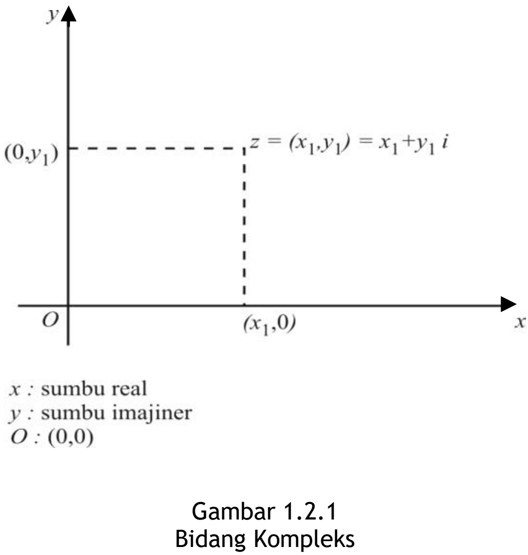
Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Arti Geometri dari Bilangan Kompleks

Menurut definisi formal, bilangan kompleks merupakan pasangan terurut dua bilangan real. Suatu bilangan kompleks $z=(x,y)=x+yi$, secara geometri dinyatakan sebagai titik (x,y) pada bidang Cartesian. Dengan demikian, semua bilangan kompleks dapat terwakili oleh semua titik pada bidang Cartesian.

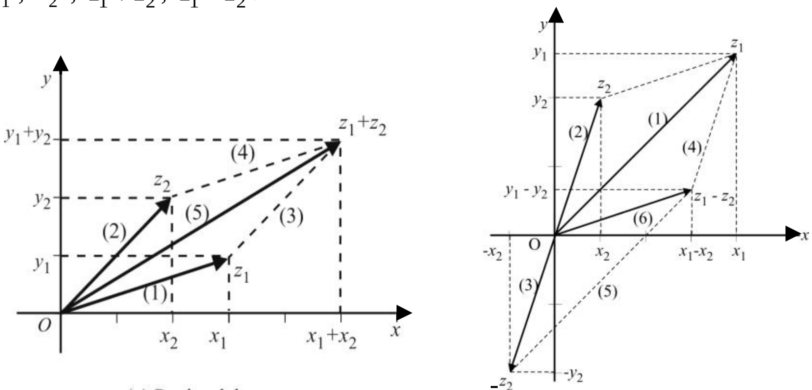
Dalam keadaan ini, ada penamaan baru untuk sumbu x sebagai sumbu real dengan sistem satuan 1 dan sumbu y dinamakan sumbu imajiner dengan sistem satuan i. Titik asal O menyatakan bilangan kompleks $z=0$ dan titik yang koordinatnya (x_1, y_1) menyatakan bilangan kompleks $z=(x_1,y_1) = x_1+y_1 i$. **Bidang Cartesian** dinamakan **bidang kompleks** atau bidang z. Penyajian bilangan kompleks dalam bidang ini disebut **diagram Argand.**



Gambar 1.2.1
Bidang Kompleks

Anda telah mengetahui bahwa setiap vektor di bidang Cartesian dapat dinyatakan sebagai vektor yang berpangkal di titik $O = \ 0,0$ dan ujungnya di suatu titik (x, y). Kemudian pasangan terurut (x, y) tersebut menyatakan vektor yang dimaksud. Dalam pengertian yang terbatas bilangan kompleks $z = (x, y) = x + yi$ dapat dipandang sebagai vektor (x, y) dan operasi **penjumlahan** dan **pengurangan** dua bilangan kompleks secara geometri serupa dengan operasi tersebut pada vektor.

Gambar berikut memperlihatkan arti geometri dari bilangan kompleks z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.



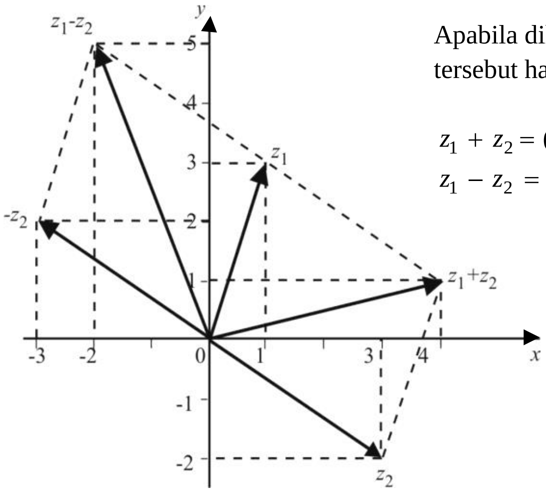
(a) Penjumlahan
urutan langkah (1), (2), (3), (4), (5)

(b) Pengurangan
urutan langkah (1), (2), (3), (4), (5), (6)

Gambar 1.2.2

Contoh (1.2.1)
Diketahui bilangan kompleks $z_1 = 1 + 3i$ dan $z_2 = 3 - 2i$.
Gambarkan bilangan kompleks z_1, z_2, $z_1 + z_2$, dan $z_1 - z_2$ dengan cara seperti penjumlahan dan pengurangan vektor.

Jawab:
Diletakkan pada satu bidang kompleks.



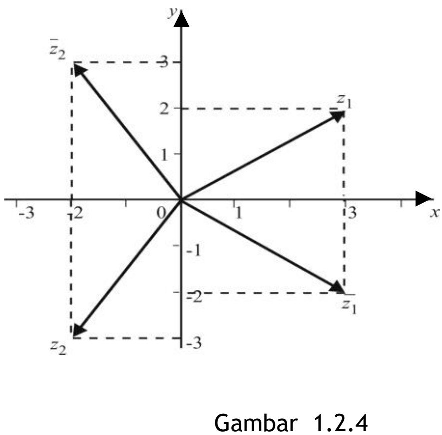
Apabila dihitung, hasil Gambar 1.2.3 tersebut harus cocok dengan

$$z_1 + z_2 = (1+3i) + (3-2i) = 4+i$$
$$z_1 - z_2 = (1+3i) - (3-2i) = -2+5i$$

Gambar 1.2.3

Contoh (1.2.2)

Pada Gambar 1.2.4, kompleks sekawan dari $z_1 = 3+2i$ dan $z_2 = -2-3i$



$$\bar{z}_1 = 3-2i$$
$$\bar{z}_2 = -2+3i$$

Gambar 1.2.4

Setelah ditentukan $\bar{z}_1$ dan $\bar{z}_2$, ternyata secara geometri, kompleks sekawan dari z merupakan pencerminan z terhadap sumbu real. Arti geometri dari perkalian kompleks dijelaskan pada Kegiatan Belajar 3.

A. MODULUS (NILAI MUTLAK) DARI BILANGAN KOMPLEKS

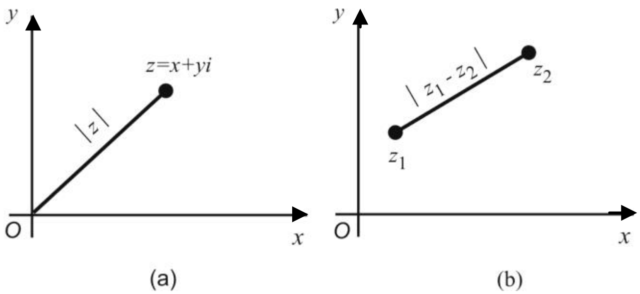
Definisi (1.2.1)

> Jika $z=x+yi$ bilangan kompleks, maka **modulus** dari z, ditulis $|z|$ dan didefinisikan sebagai $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Definisi ini menunjukkan bahwa $|z|$ merupakan bilangan real positif atau nol. Arti geometri $|z|$, menyatakan panjang vektor (x,y), yaitu jarak dari titik asal $O=(0,0)$ terhadap titik $z=(x,y)$, lihat Gambar 1.2.5 (a).
Akibat dari definisi tersebut, jika $z_1=(x_1,y_1)$ dan $z_2=(x_2,y_2)$, maka

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} ,$$

menyatakan jarak antara titik z_1 dan titik z_2, lihat Gambar 1.2.5 (b)

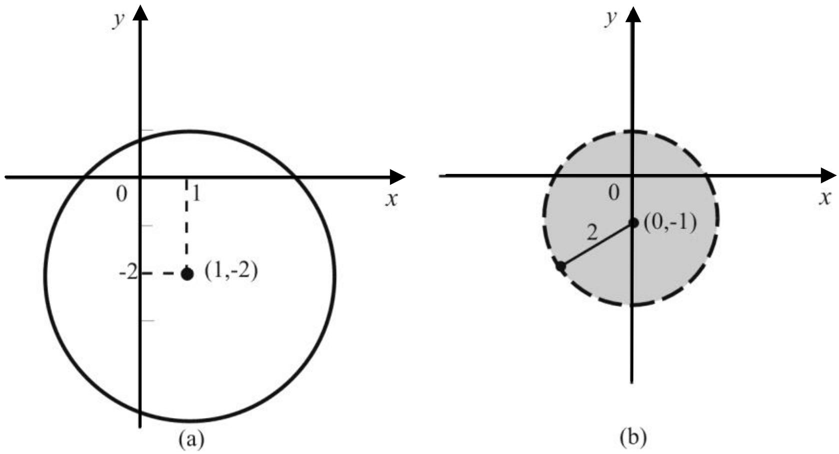


Gambar 1.2.5

Selanjutnya apabila $z_1=x_1+y_1i$ dan r bilangan real positif, maka $|z-z_1|=r$ menyatakan lingkaran berpusat di titik $z_1=(x_1,y_1)$ berjari-jari r, sedangkan $|z-z_1|<r$ menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat di $z_1=(x_1,y_1)$ berjari-jari r.
Penting sekali diingat bahwa **tidak ada urutan antara dua bilangan kompleks** z_1 dan z_2. Tetapi untuk modulusnya dikenal urutan karena modulus suatu bilangan kompleks merupakan bilangan real.

Contoh (1.2.3)
Gambarkan $|z-1+2i|=3$ dan $|z+i|<2$ pada bidang z.

Jawab:
$|z-1+2i|=3$ dapat ditulis $|z-(1-2i)|=3$ merupakan lingkaran berpusat di $z_1=1-2i=(1,-2)$ berjari-jari 3 (Lihat Gambar 1.2.6.(a)).
$|z+i|<2$ atau $|z-(-i)|<2$ menyatakan daerah lingkaran yang berpusat di $z_1=-i=(0,-1)$ berjari-jari 2 (lihat Gambar 1.2.6.(b)).



Gambar 1.2.6

Apabila Definisi 6 digunakan langsung, persamaan dan pertaksamaan di atas dapat diturunkan sebagai berikut:
Misalkan $z=x+yi$. Dari $|z-1+2i|=3$ diperoleh

$$|x+yi-1+2i|=3 \text{ atau } |(x-1)+(y+2)i|=3$$

atau,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=3 \quad \text{atau} \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(1,-2)$ berjari-jari 3.
Dengan cara yang sama $|z+i|<2$, berarti

$$|x+yi+i|<2 \quad \text{atau} \quad |x+(y+1)i|<2$$

atau,

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}<2 \quad \text{atau} \quad x^2+(y+1)^2<4,$$

menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat di titik $(0,-1)$ berjari-jari 2.

Berikut ini kita perhatikan satu teorema yang menjelaskan sifat-sifat dari **modulus** atau nilai mutlak dari bilangan kompleks.

Teorema (1.2.1)

a. Jika z bilangan kompleks, maka
   1. $|z|^2 = \left(\text{Re}(z)\right)^2 + \left(\text{Im}(z)\right)^2$
   2. $|z| = |\overline{z}|$
   3. $|z|^2 = z\,\overline{z}$
   4. $|z| \geq |\text{Re}(z)| \geq \text{Re}(z)$
   5. $|z| \geq |\text{Im}(z)| \geq \text{Im}(z)$

b. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka
   1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
   3. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$
   4. $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$
   5. $|z_1-z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$

Bukti:

a. Misalkan $z = x+yi$, maka:
   1. $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = x^2+y^2 = \left(\text{Re}(z)\right)^2 + \left(\text{Im}(z)\right)^2$
   2. $\overline{z} = x-yi$, sehingga $|\overline{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$
   3. $|z|^2 = x^2+y^2 = (x+yi)(x-yi) = z\,\overline{z}$

4. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$

5. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

b. Misalkan z_1, z_2 bilangan kompleks, maka

1. $|z_1\, z_2|^2 = (z_1 z_2)\left(\overline{z_1\, z_2}\right) = z_1\, z_2\, \bar{z}_1\, \bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2\, |z_2|^2$

   Jadi, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 . \dfrac{1}{z_2}\right|$ Lanjutkan seperti bukti b.1

3. $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

   $= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$

   $= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$

Tetapi $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\,\bar{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$

Akibatnya $|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$.

Jadi,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

4. Tulis $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$, dengan menggunakan b.3,

   $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$.

   Dari kedua ruas paling luar didapat

   $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

5. Tulis $z_2 = (z_2 - z_1) + z_1$ dengan cara seperti di b.4, didapat

   $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$.

   Gabungkan dengan hasil di b.4, maka diperoleh

   $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Ini berarti

$\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \le |z_1 - z_2|$.

Rumus b.3 dapat diperluas menjadi

$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$.

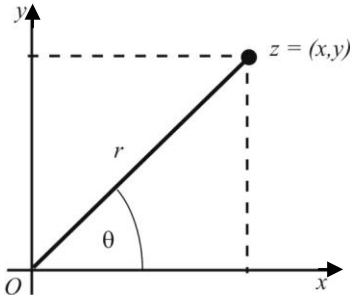
Rumus b.3, b.4 dan b.5 dikenal dengan nama **ketaksamaan segitiga**.

Coba Anda gambarkan dua segitiga masing-masing dengan sisi:

a. $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ dan b. $|z_1|, |z_2|, |z_1 - z_2|$.

B. BENTUK POLAR (KUTUB) DAN EKSPONEN

Dalam koordinat polar bilangan kompleks $z = (x, y)$ dinyatakan dalam r dan θ, yaitu $z = (r, \theta)$. Dari Gambar 1.7 di bawah ini didapat hubungan sebagai berikut:



Gambar 1.2.7

$x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

θ sudut antara sumbu x positif dengan Oz .

Untuk $z \neq 0$, sudut θ dihitung dari $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ dan jika $z = 0$ maka $r = 0$ dan θ dapat dipilih sembarang. Dengan demikian, bilangan kompleks $z = (x, y) = x + yi$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Definisi (1.2.2)

Pada bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, sudut θ disebut argument dari z, ditulis $\theta = \arg z$. Sudut θ dengan $0 \le \theta < 2\pi$ atau $-\pi < \theta \le \pi$ disebut argument utama dari z, ditulis $\theta = A\mathrm{rg}\, z$. Pembahasan untuk θ tersebut dipilih salah satu saja.

Definisi(1.2.3)

Dua bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ dikatakan **sama**, yaitu $z_1 = z_2$, jika $r_1 = r_2$ dan $\theta_1 = \theta_2$.

Dengan menggunakan rumus Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bentuk polar bilangan kompleks z dapat diubah menjadi

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Penulisan $z = re^{i\theta}$ merupakan bentuk eksponen dari bilangan kompleks z.
Selanjutnya kompleks sekawan dari z adalah:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\\ &= re^{-i\theta}\end{aligned}$$

Catatan: Rumus Euler dapat Anda buktikan dengan menggunakan deret Maclaurin untuk $\cos\theta, \sin\theta,$ dan $e^{i\theta}$.

Contoh (1.2.4)

Nyatakan bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ dalam bentuk polar dan bentuk eksponen.

Jawab:
Dari masalah di atas, kita mempunyai $z=\sqrt{3}+i$, $r=\sqrt{3+1}=2$ dan $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Karena z di kuadran pertama, maka dipilih $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, sehingga didapat bentuk polar $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ dan bentuk eksponen $z=2e^{\pi i/6}$.

Contoh (1.2.5)
Nyatakan bilangan kompleks z berikut dalam bentuk polar dan bentuk eksponen:

a) $2\sqrt{3}+2i$
b) $\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$
c) $-3+3i$
d) $-5i$

Jawab:

a) $z=2\sqrt{3}+2i$, $r=\sqrt{12+4}=4$ dan $\tan\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$. Karena z di kuadran pertama, maka diambil $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Diperoleh

$z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4e^{\pi i/6}$.

b) $z=\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$, $r=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$ dan $\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$. Karena z di kuadran empat, diambil $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$ atau $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$, sehingga diperoleh

$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\,e^{5\pi i/3}$

atau

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\,e^{-\pi i/3} \end{aligned}$$

c) $z = -3+3i$, $r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ dan $\tan\theta = \dfrac{3}{-3} = -1$.

Karena z di kuadran dua, maka dipilih $z = \frac{3\pi}{4}$ sehingga diperoleh

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\ \sin\tfrac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\ e^{3\pi i/4}$$

d) Silahkan dicoba sendiri!

Sebaliknya, dari contoh di atas mudah dilakukan, misalnya $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\ \sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$ merupakan bentuk polar. Jika dihitung langsung, maka kita peroleh $z = 3\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + i\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -3+3i$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Hitung jarak antara $z_1 = 2+i$ dan $z_2 = 3-i$.

2) Gambarkan di bidang kompleks z dan sebutkan nama lengkungan yang memenuhi persamaan berikut.
   a. $|z-5| = 6$ b. $\text{Re}(z+2) = 1$ c. $|z+i| = |z-i|$

3) Gambarkan di bidang kompleks z dan arsirlah daerah yang memenuhi
   a. $\text{Im}(z) < 0$ b. $-2 < \text{Re}(z) < 0$ c. $1 \le |z| < 3$ d. $|z+i| \le 2$

4) Tentukan bentuk polar dan bentuk eksponen bilangan kompleks berikut.
   a. $2-2i$ b. -1 c. $\sqrt{3}\,i$ d. $-3\sqrt{3}-3i$

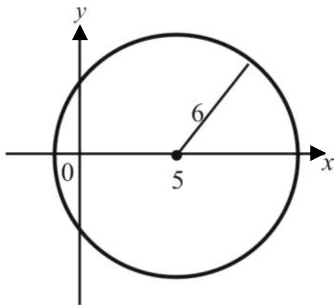
Petunjuk Jawaban Latihan

1) $\sqrt{5}$, seperti menghitung jarak antara titik $(2,1)$ dan $(3,-1)$.

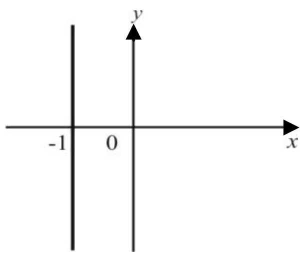
2) a. $z = x+yi \rightarrow z-5 = (x-5)+yi$

$|z-5|=6 \rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2}=6$

Jadi $(x-5)^2+y^2=36$, lingkaran berpusat di $5,0$, jari-jari 6.



b. Garis lurus $x=-1$, $z+2=x+yi+2$,jadi $x+2 \ +yi=1$



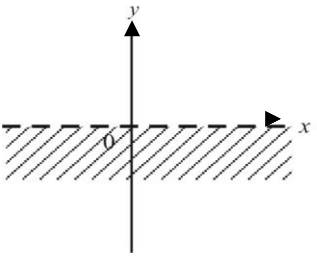
c. $|z+i|=|z-i|$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

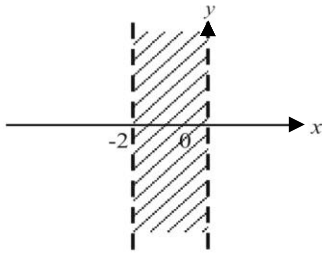
$$x^2+y^2+2y+1 = x^2+y^2-2y+1$$

$$4y=0 \rightarrow y=0, \quad \text{garis lurus (sumbu-}x\text{)}$$

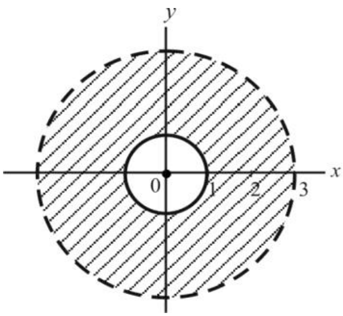
3) a. $y < 0$



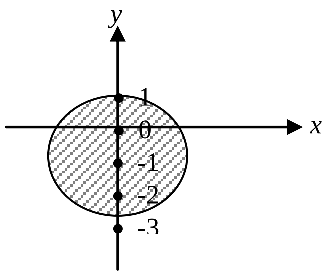
b. $-2 < x < 0$



c. $1 \le x^2 + y^2 < 9$



d. $x^2 + (y+1)^2 \le 4$



4) Lihat Contoh (1.2.5). Untuk menentukan sudut θ, sket dahulu posisi titik z di bidang kompleks z .

a. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\,e^{7\pi i/4}$

b. $\cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$

c. $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\,e^{\pi i/2}$

d. $6\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 6e^{7\pi i/6}$

RANGKUMAN

Jika $z = x + yi$ maka modulus dari z adalah $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ merupakan bilangan real yang lebih besar atau sama dengan nol dan arti geometrinya adalah jarak dari z ke titik pangkal O pada bidang kompleks z.
Bilangan kompleks $z = x + yi$, dalam bentuk polar dan eksponen dinyatakan oleh $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ dengan $r = |z|$ dan θ sudut antara sumbu x positif dengan garis Oz.

Pandang $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, θ disebut argument dari z dan ditulis $\theta = \arg z$.

Argument utama dari z ditulis $\theta = \operatorname{Arg} z$ dengan $0 \le \theta < 2\pi$ atau $-\pi < \theta \le \pi$.

Sifat-sifat modulus bilangan kompleks z.

a. 1. $|z|^2 = \left(\operatorname{Re}(z)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(z)\right)^2$

2. $|z| = |\bar{z}|$

3. $|z|^2 = z\,\bar{z}$

4. $|z| \ge |\operatorname{Re}(z)| \ge \operatorname{Re}(z)$

5. $|z| \ge |\operatorname{Im}(z)| \ge \operatorname{Im}(z)$

b. 1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \ne 0$

3. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

4. $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

5. $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika $z_1 = 4 - 3i$ dan $z_2 = 2 + 11i$, maka $|z_1 + z_2|$ sama dengan ....
   A. $5 + 5\sqrt{5}$
   B. 10
   C. $\sqrt{14}$
   D. 14

2) Jika $z_1 = 4 - 3i$ dan $z_2 = 2 + 11i$, maka $|z_1 - z_2|$, sama dengan ….
   A. $5 + 5\sqrt{2}$
   B. 10
   C. $\sqrt{11}$
   D. $10\sqrt{2}$

3) Argument $1 - i\sqrt{3}$ adalah ….
   A. $\frac{\pi}{6}$
   B. $\frac{\pi}{3}$
   C. $-\frac{\pi}{6}$
   D. $-\frac{\pi}{3}$

4) Bentuk eksponen bilangan kompleks $z = 2 - 2i\sqrt{3}$ adalah ….
   A. $2e^{\frac{\pi i}{3}}$
   B. $4e^{\frac{5\pi i}{3}}$
   C. $2e^{\frac{5\pi i}{3}}$
   D. $4e^{\frac{\pi i}{3}}$

5) Nilai dari $\sqrt{3+4i}$ adalah ….

A. $\pm(2+i)$

B. $\pm(\sqrt{3}+2i)$

C. $\sqrt{5}$

D. $2-i$

6) Bentuk polar dari bilangan kompleks $z=-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$ adalah ....

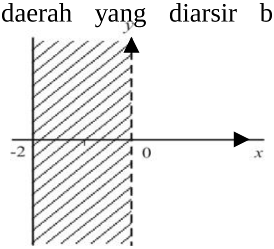
A. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

B. $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right)$

C. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

D. $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right)$

7) Himpunan bilangan kompleks pada daerah yang diarsir berikut memenuhi hubungan ....



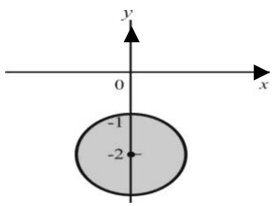
A. $-2<\text{Im}(z)<0$

B. $-1\le\text{Re}(z+1)<1$

C. $0\le|\text{Im}(z+1)|<2$

D. $0<|z|<2$

8) Himpunan bilangan kompleks yang terletak pada daerah yang diarsir berikut memenuhi pertaksamaan ....



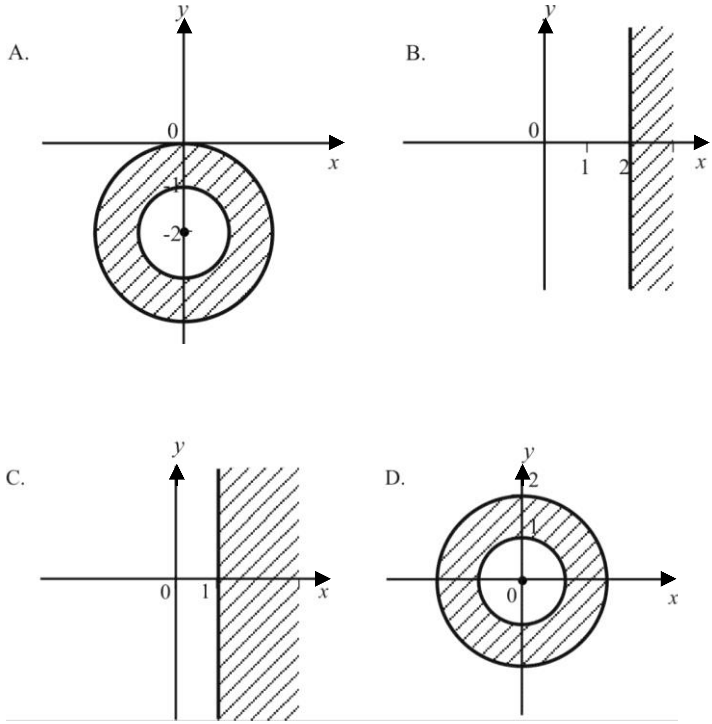
A. $|z+2i|\le1$

B. $|z-2i|\le1$

C. $|z+2|<1$

D. $|z-2|<1$

9) Daerah bilangan kompleks yang memenuhi $|z-2| \leq |z|$ adalah daerah yang diarsir, yaitu ....



10) Bentuk eksponen dari bilangan kompleks $z = -2\sqrt{3} - 2i$ adalah ....

A. $4e^{\frac{5}{6}\pi i}$

B. $4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

C. $4e^{-\frac{7}{6}\pi i}$

D. $4e^{\frac{7}{6}\pi i}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Perkalian dan Perpangkatan

Pada Kegiatan Belajar 1 telah didefinisikan tentang perkalian dua bilangan kompleks. Apabila hal tersebut dilakukan dalam bentuk polar, perkalian antara $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ dan $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ adalah

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right] \\ &= r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right] \end{aligned}$$

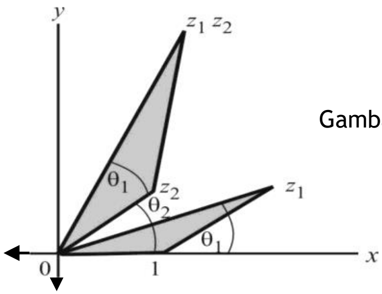
Bentuk terakhir ini merupakan rumus perkalian dua bilangan kompleks di dalam bentuk polar. Segera terlihat bahwa

$$\arg\left(z_1 z_2\right) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Perkalian dua bilangan kompleks z_1 dan z_2 dapat pula ditentukan secara geometris pada bidang kompleks, dengan alasan sebagai berikut.
Pada Kegiatan Belajar 2 telah didapat $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|$, dan selanjutnya dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\left|z_1 z_2\right|}{\left|z_2\right|} = \frac{\left|z_2\right|}{1}, \quad z_2 \neq 0 .$$

Secara geometris, hal ini menyatakan adanya kesebangunan dua segitiga, seperti terlihat pada Gambar 1.3.1.



Gambar 1.3.1

A. RUMUS DE MOIVRE

Apabila $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$

$z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

$\vdots$

$z_n = r_n\left(\cos\theta_n + i\sin\theta_n\right)$; n bilangan asli,

maka dari rumus perkalian dua bilangan kompleks dapat dilanjutkan secara induktif dan didapat

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right)\right]$$

Akibatnya, jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Khususnya, jika $r = 1$ didapat **Rumus De Moivre:**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \text{ bilangan asli}}$$

Pembagian bilangan kompleks $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ oleh $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0$ adalah

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)} = \frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)} \cdot \frac{\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right)}{\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2\right)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$

Dari rumus pembagian ini diperoleh $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$

Akibat lainnya, jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left[\cos\theta - i\sin\theta\right]$$

Jika z^{-n} menyatakan $\frac{1}{z^n}$, n bilangan asli, dapat ditunjukkan pula bahwa

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$$

Jadi, rumus De Moivre berlaku untuk n bilangan bulat.

Contoh (1.3.1)
Hitung $(-1+i)^7$.

Jawab:
Misalkan $z = -1 + i$, maka :

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{dan} \quad \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1\ .$$

Karena z di kuadran dua, dipilih $\theta = \frac{3}{4}\pi$ sehingga diperoleh

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

dan

$$(-1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{21}{4}\pi + i\sin\frac{21}{4}\pi\right)$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^7\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)$$
$$= -8 - 8i\ .$$

Contoh (1.3.2)

Hitung $\left(\sqrt{3}-i\right)^{-6}$.

Jawab:

Misalkan $z=\sqrt{3}-i$, maka $r=|z|=\sqrt{3+1}=2$ dan $\tan\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. Karena z di kuadran empat, dipilih $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ sehingga diperoleh

$$\sqrt{3}-i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

dan

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{-6} = 2^{-6}\left[\cos\pi+i\sin\pi\right] = -\frac{1}{64}.$$

B. AKAR DARI BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan kompleks z adalah akar ke-n dari bilangan kompleks w apabila $z^n=w$ dan ditulis $z=w^{\frac{1}{n}}$. Jika $z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ akar ke-n dari bilangan kompleks $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ yang diketahui, maka

$$z^n=w \text{ atau } \rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Dari persamaan terakhir diperoleh $\rho^n=r$ dan $n\phi=\theta+2k\pi$, k bilangan bulat.

Akibatnya diperoleh $\rho=r^{\frac{1}{n}}$ dan $\phi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$.

Dengan demikian, didapat akar ke-n dari bilangan kompleks $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ adalah

$$z=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right];\ k \text{ bilangan bulat dan } n$$

bilangan asli. Dalam hal ini ada n buah akar berbeda yang memenuhi $z^n=w$. Untuk memudahkan dipilih bilangan bulat

$k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$; $0 \le \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} < 2\pi$, sehingga didapat $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sebagai akar ke-n dari w.

Contoh (1.3.3)

Tentukan $(-16)^{1/4}$.

Jawab:

Misalkan $z = (-16)^{1/4}$, berarti harus dicari penyelesaian persamaan $z^4 = -16$.

Tulis $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ dan $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$, sehingga

$$\rho^4(\cos 4\phi + i\sin 4\phi) = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$\rho^4 = 16 \quad \text{atau} \quad \rho = 2$$

$$4\phi = \pi + 2k\pi \quad \text{atau} \quad \phi = \frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k \text{ bilangan bulat}.$$

Jadi $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$

Keempat akar tersebut adalah:

Untuk: $k = 0$; $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$k = 1$; $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$k = 2$; $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$k = 3$; $z_4 = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Hitung: a. $(-2+2i)^{15}$.

b. $(1+\sqrt{3}\,i)^{-10}$.

2) Tentukan jawab persamaan $z^3 - 2 - 2\sqrt{3}\,i = 0$.

3) Tentukan semua nilai z yang memenuhi:

a. $z = (-1)^{1/3}$

b. $z = (-81)^{1/4}$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $-8^7(2+2\,i)$ b. $2^{-11}(-1-\sqrt{3}i)$

2) $z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{7\pi}{9} + i\sin\dfrac{7\pi}{9}\right)$

$z_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{13\pi}{9} + i\sin\dfrac{13\pi}{9}\right)$

4) $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$, $z_2 = -1$, dan $z_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$

5) $z_1 = \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}i\sqrt{2}$, $z_2 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}i\sqrt{2}$, $z_3 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}i\sqrt{2}$, dan

$z_4 = \dfrac{3}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}i\sqrt{2}$

RANGKUMAN

Apabila $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1\right)$ dan $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2\right)$, maka:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1+\theta_2\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\ \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg\ z_1 - \arg\ z_2 .$$

Rumus:

$\left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$, berlaku untuk n bilangan bulat.

Rumus De Moivre :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, n bilangan bulat.

Apabila $z^n = w$, $w = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, n bilangan asli, maka akar ke- n dari w adalah,

$$z = w^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right];$$ n bilangan asli dan k bilangan bulat.

Dalam hal ini ada n akar, yaitu $z_1, z_2, ..., z_n$ yang diperoleh dengan cara mengambil $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika $z_1 = 2 + 2i$ dan $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$, maka $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ adalah ….

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\sqrt{-60 - 32i}$

C. $\frac{\pi}{12}$

D. $\frac{\pi}{4}$

2) Nilai $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \ldots.$

A. $\sqrt{2}-2i$

B. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

C. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

D. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

3) Nilai dari $z = 4e^{\frac{2\pi}{9}} . 3e^{\frac{4\pi}{9}} = \ldots$.

A. $-6+6\sqrt{3}\ i$

B. $-12+12\sqrt{3}\ i$

C. $12-12\sqrt{3}\ i$

D. $6+6\sqrt{3}\ i$

4) Jika $z_1 = 2+2i$ dan $z_2 = 3+i\sqrt{3}$, maka $|z_1 z_2|$ adalah ….

A. $5\sqrt{6}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{6}$

D. $6\sqrt{2}$

5) $\sqrt{-60-32i} = \ldots$.

A. $1+i$ dan $2-3i$

B. $3-2i$ dan $1-4i$

C. $1-i$ dan $3+2i$

D. $2+3i$ dan $-1-i$

6) $\sqrt{50}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \ldots$.

A. $2-2i$

B. $-5+5i$

C. $4-2i$
D. $\sqrt{2}-2i$

7) $(1-i)^6$ = ….
A. $8+8i$
B. $-8i$
C. $8i$
D. $8-8i$

8) $\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)^{-15}$ = ….
A. $-8^7(1+i)$
B. $-8^{15}(1+i)$
C. $8^7(1+i)$
D. $8^{-15}(1+i)$

9) Jika $z^3=-1+i$, maka ....
A. $z=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$; $k=0,1,2$
B. $z=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$; $k=0,1,2$
C. $z=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$; $k=0,1,2$
D. $z=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$; $k=0,1,2$

10) Jika $z^8=1$, maka $z=$... .
A. $\cos\frac{k\pi}{8}+i\sin\frac{k\pi}{8}$
B. $\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$

C. $\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$

D. $\cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}$

masing-masing untuk $k = 0, 1, 2, ..., 7$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) A
2) D
3) C
4) C
5) A
6) B
7) D
8) C
9) B
10) B

Tes Formatif 2
1) B
2) D
3) D
4) B
5) A
6) C
7) B
8) A
9) C
10) D

Tes Formatif 3
1) C
2) C
3) A
4) D
5) A
6) B
7) C
8) A
9) B
10) D

Daftar Pustaka

A. David Wunsch (1994)., *Complex Variables with Applications*., Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Churchill, Ruel V. (1996)., *Complex Variables and Applications*., New York: McGraw-Hill Publishing Company, Inc.

Kreyszig, Erwin (1979)., *Advanced Engineering Mathematics*., New York: John Wiley & Son.

Kreyszig, Erwin (1999)., *Advanced Engineering Mathematics*., New York: John Wiley & Son.

Paliouras, John D. (1975)., *Complex Variables for Scientists and Engineers*., New York: Macmillan Publishing Company, Inc.

Spiegel, Murray R. (1981)., *Complex Variables*., Singapore: McGraw-Hill International Book Company.