Modul 1

Geometri Insidensi

Drs. Rawuh

PENDAHULUAN

Modul Geometri Insidensi ini berisi pembahasan tentang pembentukkan sistem aksioma dan sifat-sifat yang mendasari geometri tersebut. Sebelumnya Anda akan diberikan dahulu unsur-unsur dari suatu geometri, unsur-unsur tersebut adalah

1. Unsur-unsur tak terdefinisi
2. Sistem aksioma yang mengaitkan unsur-unsur tak terdefinisi itu
3. Definisi-definisi
4. Teorema-teorema yang dapat dijabarkan dari butir-butir (1), (2) dan (3) di atas.

Geometri insidensi adalah geometri yang didasari oleh aksioma insidensi, geometri ini dapat dikatakan mendasari geometri Euclides yang telah kita kenal pada sekolah menengah. Menurut David Hilbert geometri Euclides didasarkan pada lima kelompok aksioma berikut.

1. Kelompok Aksioma Insidensi.
2. Kelompok Aksioma Urutan.
3. Kelompok Aksioma Kekongruenan.
4. Aksioma kesejajaran Euclides.
5. Aksioma Kekontinuan.

Jadi dapat dikatakan bahwa geometri Euclides adalah sebuah geometri insidensi yang dilengkapi dengan kelompok aksioma-aksioma 2, 3, 4, dan 5.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat memahami sistem geometri insidensi, aksioma yang mendasari geometri tersebut dan definisi serta teorema-teorema yang berlaku dalam geometri tersebut. Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menerangkan konsep-konsep dasar suatu geometri;
2. menerangkan aksioma-aksioma dan definisi-definisi yang berlaku dalam geometri insidensi;
3. menggunakan aksioma dan definisi yang berlaku untuk membuktikan teorema-teorema yang berlaku dalam geometri insidensi;
4. memberikan contoh-contoh geometri insidensi dan bukan geometri insidensi.

Selamat belajar, semoga Anda berhasil!

Kegiatan Belajar 1

Pembentukan Geometri Insidensi

Suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri geometri tersebut. Geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi. Sebelum kita melanjutkan pembicaraan tentang pembentukan geometri insidensi akan dijelaskan dahulu secara singkat pengertian aksioma.

Dalam matematika untuk memeriksa atau membuktikan kebenaran sebuah pernyataan kita merujuk atau membandingkan pernyataan tersebut terhadap pernyataan lain yang sudah diakui atau disepakati kebenarannya. Suatu pernyataan dianggap benar jika konsisten atau tidak ada kontradiksi dengan pernyataan yang sudah diakui atau disepakati kebenarannya. Pernyataan yang sudah diakui atau disepakati kebenarannya juga didasarkan pada pernyataan sebelumnya yang juga sudah diakui atau disepakati kebenarannya, demikian seterusnya. Untuk memutus rantai perujukan atau pembandingan kebenaran sebuah pernyataan terhadap pernyataan sebelumnya diperlukan pernyataan yang telah disepakati kebenarannya tanpa harus dibandingkan dengan pernyataan lain. Pernyataan yang disepakati kebenarannya tanpa harus dibuktikan atau dibandingkan dengan pernyataan lain inilah yang kita namakan aksioma. Jadi aksioma adalah dasar paling awal yang digunakan untuk menurunkan pernyataan-pernyataan setelahnya.

Di dalam sebuah geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tak terdefinisi. Mungkin Anda merasa aneh dengan istilah unsur-unsur tak terdefinisi. Oleh karena itu akan dijelaskan juga secara singkat apa sebenarnya unsur tak terdefinisi dan kenapa dia diperlukan.

Dalam matematika untuk mencapai pengertian yang sama terhadap suatu objek atau istilah kita perlu mendefinisikan secara rinci objek atau istilah tersebut. Dalam definisi ini biasanya kita juga memerlukan objek atau istilah lain yang perlu juga didefinisikan, sehingga proses pendefinisian ini akan berlanjut terus. Untuk mengatasi pendefinisian yang berlanjut ini diperlukan unsur tak terdefinisi. Apa sebenarnya wujud dari unsur tak terdefinisi ini tergantung kepada masing-masing kita untuk memaknainya sesuai dengan kondisi atau konteks yang dibicarakan. Misalnya garis, garis adalah unsur tak terdefinisi dalam geometri, dalam suatu sistem geometri garis tidak selalu seperti yang biasa kita kenal, bisa saja sebuah lingkaran yang biasa kita kenal kita anggap sebagai garis sepanjang dia memenuhi aksioma yang kita gunakan. Untuk membangun suatu geometri diperlukan unsur tak terdefinisi sebagai berikut.

1. Titik.
2. Himpunan titik-titik yang kita namakan garis.
3. Himpunan titik-titik yang kita namakan bidang.

Jadi ada 3 unsur tak terdefinisi yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur ini dikaitkan satu sama lain dengan sebuah sistem aksioma. Pada geometri insidensi sistem aksioma yang digunakan adalah sistem aksioma insidensi yang terdiri dari enam aksioma sebagai berikut.

I.1 Garis adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit dua titik.

I.2 Dua titik yang berlainan terkandung dalam tepat satu garis (satu dan tidak lebih dari satu garis).

I.3 Bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak terkandung dalam satu garis (tiga titik tak segaris atau tiga titik yang tak kolinear).

I.4 Tiga titik berlainan yang tak segaris terkandung dalam satu dan tidak lebih dari satu bidang.

I.5 Apabila sebuah bidang memuat dua titik berlainan dari sebuah garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terkandung dalam bidang itu, atau garis terletak pada bidang itu).

I.6 Apabila dua bidang bersekutu pada sebuah titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain (ada titik lain di mana bidang tersebut juga bersekutu).

Definisi

Sebuah himpunan titik-titik bersama dengan himpunan bagian seperti garis dan bidang yang memenuhi sistem aksioma I.1 sampai dengan I.6 disebut suatu *geometri insidensi*.

Dari ke enam aksioma insidensi di atas, kita dapat membuktikan beberapa teorema seperti yang akan diberikan berikut ini.

Teorema 1.1

Dua garis yang berbeda bersekutu paling banyak pada satu titik.

Latihan

Buktikan teorema 1.1.

Definisi

Sebuah garis yang mengandung titik A dan titik B yang berbeda kita sebut garis AB.

Teorema 1.2

Apabila titik A tidak pada garis BC maka titik-titik A, B, dan C berlainan dan tidak kolinear.

Bukti:

Munurut ketentuan $B \neq C$. Andaikan $A = B$, oleh karena $B \in BC$ (B pada garis BC) maka $A \in BC$. Hal ini berlawanan dengan yang diketahui sehingga pengumpamaan $A = B$ adalah tidak bernar. Maka haruslah $A \neq B$. Begitu pula, dengan cara yang sama kita dapat buktikan $A \neq C$. Jadi A, B, C berlainan.

Untuk membuktikan titik A, B, C tak segaris kita andaikan A, B, dan C segaris kemudian kita tunjukan adanya kontradiksi. Andaikan titik-titik A, B, dan C segaris maka ada garis g yang memuat A, B dan C. Oleh karena g memuat B dan C dan $B \neq C$ maka $g = BC$. Jadi $A \in BC$, hal ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa A tidak pada garis BC. Sehingga perumpamaan bahwa A, B, dan C segaris mengakibatkan kontradiksi. Ini berarti A, B, dan C tidak segaris (tidak kolinier).

Teorema 1.3

Sebuah garis dan sebuah titik yang tidak pada garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti:

Andaikan A titik dan g garis dengan $A \notin g$ (A tidak pada g). Menurut aksioma I.1 ada dua titik berlainan pada g, misalkan titik tersebut adalah B dan C. Sehingga $g = BC$. Jadi $A \notin BC$. Menurut teorema 1.2, A, B, dan C berlainan dan tak segaris. Menurut aksioma I.4 titik-titik A, B, dan C termuat dalam sebuah bidang, katakanlah bidang tersebut bidang V. Oleh karena $B \in V$ dan $C \in V$ maka, menurut aksioma I.5, $BC = g \subset V$ (V memuat g). Andaikan ada bidang lain V' yang memuat garis g dan titik A. Jadi V' memuat pula B dan C. Ini berarti V' memuat A, B, dan C. Menurut aksioma I..4 $V' = V$. Jadi adalah V satu-satunya bidang yang memuat g dan A karena jika ada bidang lain yang memuat A, B, dan C bidang tersebut akan sama dengan bidang V.

Definisi

1. Andaikan $A \notin g$ (titik A tidak pada garis g), bidang yang memuat garis g dan titik A kita tulis sebagai gA.
2. Andaikan titik-titik A, B, dan C berlainan dan tak kolinear, bidang yang memuat A, B, dan C kita tulis sebagai ABC.

Definisi

Dua garis l dan m dinamakan sejajar (ditulis $l \,//\, m$) apabila

1) l dan m termuat dalam satu bidang dan
2) l dan m tidak memiliki titik sekutu (titik temu)

Teorema Akibat

Apabila $l \,//\, m$ maka l dan m termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti:

Menurut definisi kesejajaran garis, ada sebuah bidang V yang memuat l dan m. Andaikan bidang V' juga memuat l dan m, andaikan pula titik $A \in m$ maka V' dan V memuat l dan titik A. Menurut teorema 1.3 haruslah $V' = V$, jadi hanya ada satu (unik) bidang yang memuat dua garis sejajar.

Teorema 1.4

Jika dua garis yang berbeda berpotongan maka kedua garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti:

Andaikan l dan m garis berbeda yang berpotongan, andaikan pula $A \in l$ dan $A \in m$ (sebab l dan m berpotongan). Menurut I.1 ada $B \in m$ dan $B \neq A$; $B \notin l$ (apa sebabnya?), maka ada sebuah bidang V yang memuat l dan B (menurut apa?). Oleh karena V memuat l maka V memuat A. Sehingga V juga memuat m (apa sebab?). Jadi V memuat l dan m (Bukti selesai).

Pembuktian bahwa bidang yang memuat l dan m itu tunggal kita serahkan pada pembaca sebagai latihan berikut.

Latihan

Andaikan ada bidang V' yang juga memuat l dan m. Buktikan $V = V'$.

Teorema 1.5

Apabila dua bidang yang berlainan berpotongan maka himpunan titik potongnya adalah sebuah garis.

Bukti:

Andaikan P dan Q dua bidang berbeda yang berpotongan, andaikan juga A salah satu titik temunya (potongnya). Jadi $A \in P$ dan $A \in Q$, maka ada titik kedua B dengan $B \in P$ dan $B \in Q$ (mengapa?). Jadi juga $AB \subseteq P$ dan $AB \subseteq Q$ (mengapa?). Ini berarti tiap titik AB termuat di P dan di Q atau $AB \subset P \cap Q$. Akan kita buktikan $P \cap Q = AB$. Telah kita buktikan di atas bahwa $AB \subset P \cap Q$. Tinggal membuktikan bahwa $P \cap Q \subset AB$. Andaikan $C \in P \cap Q$ dan andaikan $C \notin AB$. Oleh karena AB dan C termuat dalam P dan dalam Q, maka $P = Q$ (mengapa?). Hal ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi pemisalan bahwa $C \notin AB$ menimbulkan kontradiksi. Sehingga haruslah $C \in AB$. Ini berarti bahwa $P \cap Q \subset AB$. Oleh karena telah terbukti bahwa $AB \subset P \cap Q$ maka $P \cap Q = AB$.

Akibat

Apabila ada garis g dengan $g \subset V$ dan $g \subset W$ maka $g = V \cap W$.

Definisi

Dua bidang V dan W disebut sejajar (ditulis $V // W$) apabila V dan W tidak memiliki titik temu (titik potong).

Teorema 1.6

Apabila bidang P sejajar dengan bidang Q dan bidang R memotong bidang P dan bidang Q maka himpunan $P \cap R$ dan himpunan $Q \cap R$ adalah garis-garis yang sejajar

Bukti:

Pertama akan kita buktikan bahwa $P \cap R$ dan $Q \cap R$ adalah garis-garis. Untuk ini kita buktikan bahwa P dan R berlainan serta Q dan R juga berlainan. Andaikan $P = R$, oleh karena R memotong Q maka ini berarti banwa P memotong Q. Ini tak mungkin (mengapa?). Jadi haruslah $P \neq R$. Ini berarti bahwa $P \cap R$ adalah sebuah garis katakan garis tersebut garis l. Begitu pula $Q \cap R$ adalah sebuah garis katakan garis tersebut garis m. Garis l dan garis m termuat dalam satu bidang, yaitu bidang R. Andaikan l dan m berpotongan, misalnya $l \cap m = A$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$ (mengapa?). Jadi P dan Q bertemu di A; ini tak mungkin (apa sebabnya?). Jadi l dan m terletak pada satu bidang dan tidak memiliki titik temu. Ini berarti $l \,//\, m$. (Bukti selesai)

Definisi

1. Apabila garis-garis $g_1, g_2, ..., g_n$ bertemu pada satu titik kita namakan garis-garis $g_1, g_2, ..., g_n$ konkuren.
2. Apabila bangun geometri $B_1, B_2, ..., B_n$ terletak pada satu bidang, kita namakan bangun-bangun itu sebidang atau koplanar.

Teorema 1.7

Apabila tiap dua garis dari sekelompok tiga garis koplanar, akan tetapi tidak bertiga koplanar maka ketiga garis itu konkuren atau tiap dua garis diantaranya sejajar.

Bukti:

Diketahui tiga garis l, m dan n; andaikan l dan m di bidang P, m dan n di bidang Q, l dan n di bidang R. Kita akan membuktikan P, Q, R berlainan. Andaikan $P = Q$ maka l, m, n sebidang (mengapa?). Ini tak mungkin (mengapa?). Jadi haruslah $P \neq Q$ begitu pula $Q \neq R$ dan $P \neq R$ (mengapa?). Oleh karena itu maka $P \cap Q = m$, dan $Q \cap R = n$, serta $R \cap P = l$ (mengapa?). Andaikan $l \cap m = A$. Oleh karena $A \in l$ maka $A \in R$ dan $A \in P$ (mengapa?) oleh karena $A \in m$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$ (mengapa?). Jadi $A \in Q$ dan $A \in R$. Ini berarti bahwa $A \in n$ (mengapa?). Sehingga apabila dua garis diantara l, m, n berpotongan maka tiga garis itu konkuren. Apabila tiap dua garis diantara l, m, n tidak berpotongan, berhubung tiap dua garis itu sebidang maka tiap dua garis tersebut sejajar.

Teorema Akibat

Apabila l // m dan titik A tidak terletak pada bidang yang memuat l dan m, maka ada garis tunggal n yang memuat A sehingga n // l dan n // m.

Bukti:

Ada bidang P yang memuat l dan A dan ada bidang Q yang memuat m dan A (mengapa?). Jelas $P \neq Q$ sebab A tidak terletak pada bidang yang memuat l dan m (mengapa?). Andaikan $P \cap Q = n$ maka n // l dan n // m (mengapa?). Kita buktikan n tunggal. Andaikan n' garis lain yang memuat A dan n' // l dan n' // m, maka n' dan l sebidang katakanlah bindang itu adalah bidang R. Maka R harus memuat l dan A (mengapa?). Jadi $R = P$ dan $n' \subset P$, begitu juga $n' \subset Q$. Sehingga $n' = n$.

Sebagai latihan, buktikan teorema-teorema berikut.

Teorema 1.8

Pada suatu bidang V ada sebuah garis g. Buktikan ada sebuah titik pada V yang tidak terletak pada g.

Teorema 1.9

Tiap bidang memuat paling sedikit 3 garis yang tidak konkuren.

Teorema akibat

Pada sebuah bidang V ada sebuah titik A. Buktikan bahwa di V ada garis yang tidak melalui A.

Teorema akibat

Di dalam sebuah bidang V, tiap titik A termuat dalam paling sedikit dua garis (yang berlainan).

Definisi

Apabila dua garis tidak sebidang kita katakan bahwa dua garis itu *bersilangan.*

Teorema 1.10

Andaikan diketahui empat titik A, B, C, dan D yang berlainan, tak kolinear dan tak sebidang maka berlaku.

1. Apabila diketahui sebuah bidang, maka ada sebuah titik yang tak terletak pada bidang itu.
2. Apabila diketahui sebuah garis, maka ada garis yang menyilangnya.
3. Apabila diketahui sebuah titik, maka ada sebuah. bidang yang tidak memuat titik tersebut.
4. Ada paling sedikit enam garis dan paling sedikit empat bidang.

Definisi

Sebuah garis dan sebuah bidang dinamakan sejajar apabila garis dan bidang tidak memiliki titik sekutu (titik temu).

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Ada dua garis a dan b yang berpotongan. Apabila masing-masing a dan b sejajar dengan garis ketiga c maka a, b, c sebidang. Buktikan!
2) Sebuah bidang V memuat dua garis yang berbeda masing-masing garis sejajar dengan garis yang ketiga yang tidak terletak pada V. Buktikan bahwa dua garis di V tersebut sejajar.
3) Sebuah garis sejajar dengan sebuah bidang. Buktikan bahwa garis tersebut sejajar dengan garis potong antara bidang tersebut dan tiap bidang yang memuat garis tersebut!
4) Diketahui dua bidang V dan W yang sejajar. Sebuah titik $T \in V$ dan sebuah garis $g \subset W$. Buktikan ada garis tunggal yang termuat di V, melalui T dan sejajar dengan garis g.
5) Sebuah garis g sejajar dengan bidang V. Apabila $T \in V$ maka ada garis tunggal di V yang memuat T dan sejajar dengan g. Buktikan!
6) Apabila sebuah garis a sejajar dengan garis b dan termuat dalam bidang V maka a termuat di V atau a sejajar dengan V. Buktikan!
7) Andaikan dua bidang berbeda V dan W berpotongan di garis a. Andaikan b sebuah garis yang terletak pada V dan berbeda dengan garis a serta memotong a. Buktikan tidak ada garis di W yang sejajar dengan b.
8) Andaikan bidang V memuat garis a dan bidang W memuat garis b sehingga a sejajar b, a tidak di W dan b tidak di V. Buktikan bahwa V

sejajar W atau bahwa a dan b sejajar dengan garis potong bidang V dan bidang W.

9) Apabila tiap garis yang termuat dalam sebuah bidang V sejajar dengan sebuah garis yang termuat dalam bidang W yang berbeda dengan V maka V sejajar dengan W. Buktikan.
10) Andaikan garis a dan garis b bersilangan, titik P tidak di a maupun di b. Bidang V yang melalui a dan P dan juga memotong b, bidang W yang melalui b dan P juga memotong memotong a. Buktikan ada garis tunggal yang melalui P dan memotong a dan b.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Di bidang V ada dua garis a dan b yang berpotongan. Garis c tidak di V; a // c dan b // c. Maka ada bidang U yang melalui a dan c; juga ada bidang W yang melalui b dan c sebab menurut definisi dua garis sejajar apabila mereka ada pada satu bidang dan tidak berpotongan. Oleh karena itu maka c adalah garis potong bidang-bidang U dan W dan c // bidang V. Akan tetapi c juga memotong V karena bidang U melalui c dan a dan W melalui b dan c, sedangkan a dan b berpotongan. Titik potong c dan V adalah titik potong garis-garis a dan b, misalkan titik ini P. Jadi garis c memotong V di P dan c sejajar V. Ini hanya mungkin apabila c terletak di V dan c melalui P. Jadi a, b dan c sebidang.
2) Andaikan a dan b yang sejajar masing-masing dengan garis c yang tidak terletak di bidang V yang memuat a dan b. Harus di buktikan a dan b sejajar. Andaikan a dan b berpotongan di P. Karena a // c maka ada bidang U yang memuat a dan c. Begitu pula ada bidang W yang memuat b dan c, sebab b // c. Jadi bidang-bidang U dan W berpotongan sepanjang garis c yang harus pula melalui titik P. Ini berarti c memotong V. Ini tak mungkin sebab c // V dan c // a dan juga c // b. Jadi pengandaian bahwa a memotong b (di P) salah, jadi haruslah a // b (sebab a dan b sebidang).
3) Misalkan bidang itu V dan garis g yang sejajar V. (ingat bahwa g // V apabila g dan V tidak punya titik potong). Misalkan ada bidang W melalui g dan W memotong V melalui c. Andaikan g memotong V; misalkan di P; jadi P pada g dan P pada V. Ini tak mungkin sebab g // V. Jadi pengandaian bahwa g memotong V tak benar. Jadi akibatnya ialah bahwa g // tiap garis potong antara bidang V dan bidang yang melalui g.

4) Melalui g dan titik T ada tepat satu bidang U yang memotong V sepanjang garis a. Tinggal membuktikan a // g dan a melalui T.
5) Bukti hampir serupa dengan soal no 4.
6) Bukti hampir serupa dengan soal nomor 4 atau soal nomor 5.
7) Andaikan ada garis x di W yang dapat sejajar dengan b. Jadi ada bidang U yang memuat x dan b. Ini berarti P di W dan x di W, serta x di U dan P di U. Jadi U dan W berimpit. Ini berarti pula bahwa b terletak di W hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa b hanya memotong W di P. Jadi pengandaian bahwa ada x di W yang sejajar dengan b salah. Jadi haruslah tidak mungkin ada garis x di W yang sejajar dengan gadis b.
8) Oleh karena a // b maka tiap bidang yang melalui garis b memotong bidang V sepanjang garis c yang sejajar dengan b, berdasarkan soal nomor 3, kecuali kalau bidang yang melalui b itu sejajar dengan V.
9) Andaikan V memotong W di P. Jadi ada garis g di V dan ada garis h di W yang sejajar dengan g. Tak mungkin sebab g dan h berpotongan. Jadi pengandaian bahwa V memotong W di sebuah titik salah. Ini berarti bahwa V harus sejajar dengan W.
10) Bidang V melalui a dan P dan memotong b di B. Bidang W melalui b dan P dan memotong a di A. Jadi di V ada garis a dan titik-titik P, B yang di b dan di W ada garis b dan titk-titik P, A yang di a. Perhatikan garis potong $V \cap W = g$, jelas g melalui P. Karena A titik potong antara garis a (yang di V) dan bidang W maka A di g. Begitu pula B titik-potong antara V dan garis b yang di W sehingga B juga di g. Jadi garis yang ditanyakan adalah garis $V \cap W = g$ yang tunggal.

RANGKUMAN

Pengertian-pengertian dalam Kegiatan Belajar 1:

1. Sistem Aksioma insidensi, Unsur-unsur tak terdefinisi, yaitu titik, garis, dan bidang.
2. Geometri insidensi bidang apabila berlaku aksioma I.1, I.2, I.3, dan hanya ada satu bidang.
3. Geometri insidensi ruang apabila berlaku aksioma I.1 sampai dengan I.6.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Apabila dua bidang yang berbeda *V* dan *W* berpotongan, maka setiap garis di salah satu bidang serta bukan garis potong *V* dan *W* dan sejajar dengan sebuah garis di bidang yang lain akan ….
   A. memotong garis potong *V* dan *W*
   B. sejajar dengan garis potong *V* dan *W*
   C. menyilang garis potong *V* dan *W*.
   D. Jawaban A, B, dan C tak mungkin

2) Sebuah bidang memuat dua garis sejajar, maka bidang itu mengandung ….
   A. hanya tiga titik
   B. paling banyak tiga titik
   C. paling banyak empat titik
   D. paling sedikit empat titik

3) Apabila sebuah bidang mengandung tepat tiga titik, maka ….
   A. tiap garis mengandung hanya satu titik
   B. tap garis mengandung hanya dua titik
   C. tiap garis mengandung hanya tiga titik
   D. tidak ada garis dalam bidang itu

4) Dalam sebuah geometri insidensi tiap garis mengandung tepat dua titik dan dalam geometri itu tidak ada garis-garis sejajar. Maka tiap bidang memuat ….
   A. paling sedikit tiga titik
   B. paling sedikit empat titik
   C. tepat tiga titik
   D. tepat empat titik

5) Dalam sebuah geometri insidensi diketahui bahwa tiap garis mengandung tepat dua titik. Dalam geometri ini berlaku pula aksioma bahwa melalui tiap titik di luar suatu garis ada tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui; maka tiap bidang memuat ….
   A. paling sedikit tiga titik
   B. paling sedikit empat titik
   C. tepat tiga titik
   D. tepat empat titik

6) Dalam sebuah geometri insidensi diketahui bahwa tiap garis mengandung tepat dua titik. Dalam geometri ini berlaku pula aksioma bahwa melalui tiap titik di luar suatu garis ada paling sedikit dua garis yang sejajar dengan garis yang diketahui. Maka tiap bidang memuat ….
   A. paling sedikit empat titik
   B. paling sedikit lima titik
   C. tepat empat titik
   D. tepat lima titik

7) Dalam sebuah geometri insidensi ada paling sedikit tiga titik pada tiap garis. Maka tiap bidang memuat ….
   A. tepat tiga titik
   B. paling banyak tiga titik
   C. paling sedikit tujuh titik
   D. paling banyak tujuh titik

8) Dalam sebuah geometri insidensi tiap garis memuat paling sedikit tiga titik. Maka tiap bidang memuat ….
   A. paling banyak tiga garis
   B. paling sedikit tiga garis
   C. paling banyak tujuh garis
   D. paling sedikit tujuh garis

9) Dalam sebuah geometri insidensi berlaku aksioma bahwa melalui tiap titik di luar suatu garis ada tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui. Diketahui pula bahwa tiap garis mengandung tepat tiga titik. Maka tiap bidang memuat ….
   A. tepat sembilan garis
   B. paling sedikit sembilan garis
   C. tepat dua belas garis
   D. paling sedikit dua belas garis

10) Dalam sebuah geometri insidensi berlaku aksioma bahwa melalui tiap titik di luar suatu garis ada tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui. Diketahui pula ada empat titik berbeda yang tak segaris dan tak sebidang. Maka tiap garis termuat dalam ….
   A. tepat dua bidang
   B. paling sedikit dua bidang
   C. tepat tiga bidang
   D. paling sedikit tiga bidang

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\boxed{\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

.

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Beberapa Model Geometri Insidensi

Dalam Kegiatan Belajar 2 ini, akan disajikan arti konkret geometri insidensi yang telah kita bangun dalam Kegiatan Belajar l. Kita akan kemukakan model-model dari suatu sistem yang memenuhi aksioma-aksioma dari geometri insidensi tersebut.

Definisi

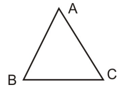
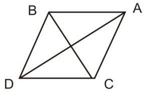
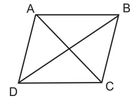
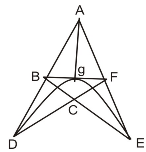
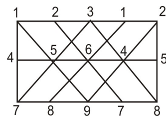
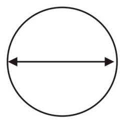
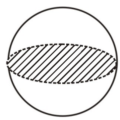
Sebuah model geometri insidensi adalah sebuah sistem (S_1, S_2, S_3) yang terdiri atas tiga himpunan tertentu S_1, S_2, S_3. Angota-angota himpunan tersebut masing-masing dinamakan titik, garis, dan bidang yang memenuhi aksioma-aksioma I.1 sampai dengan I.6.

Sebuah geometri insidensi disebut planar atau berdimensi dua apabila S_3 terdiri hanya atas satu bidang. Disebut-berdimensi tiga, apabila S_3 terdiri atas lebih dari satu bidang. Apabila sesuatu model telah memenuhi aksioma I.1 sampai dengan I.6, dengan sendirinya semua teorema-teorema yang telah kita bahas akan berlaku dalam model tersebut.

Di bawah ini kita sajikan macam-macam model yang terdiri atas S_1, S_2, S_3. Saudara dapat memeriksa apakah model-model tersebut merupakan suatu geometri insidensi atau bukan, artinya apakah model-model itu memenuhi aksioma I.1 sampai dengan I.6 atau tidak.

Catatan

Di dalam contoh di bawah ini lambang (A, B) adalah lambang untuk garis yang memuat titik-titik A dan B. Sedangkan lambang (A, B, C) adalah lambang untuk bidang yang memuat titik-titik A, B, dan C, atau garis yang memuat titik-titik A, B, C.

No. Model	**Titik**	**Garis**	**Bidang**	**Diagram**
M 1	*A,B,C* (tiga unsur/titik berlainan)	*(A,B), (B,C), (C,A)*	*(A,B,C)*	
M 2	*A,B,C,D* (4 titik berbeda)	*(A,B), (A,C)* *(A,D), (B,C)* *(B,D), (C,D)*	*(A,B,C), (A,B,D),* *(A,C,D), (B,C,D)* (4 bidang)	
M 3	*A,B,C,D*	*(A,B), (A,C)* *(A,D), (B,C)* *(B,D), (C,D)*	*(A,B,C,D)* (satu bidang)	
M4	*1,2,3,4,3,6,7* (7 titik berbeda)	Kolam dalam daftar berikut: *1 2 3 4 5 6 7* *2 3 4 5 6 7 1* *4 5 6 7 1 2 3*	*(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)*	
M 5	*A,B,C,D,E,F,G*	*(A,B,D) (B,C,E) (C,D,F)* *(D,E,G) (E,F,A) (F,G,B)* *(G,A,C)*	*(A,B,C,D,E,F,G)*	
M 6	*1,2,3,4,5,6,7,8,* *9*	*(1,2,3), (4,5,6) (7,8,9),* *(1,4,7),(2,5,8), (3,6,9)* *(1,5,9), (2,6,7), (3,8,4),* *(1,8,6), (2,4,9), (3,5,7)*	*(1,2,3,4,5,6,7,8,9)*	
M 7	Tiap titik dalam daerah lingkaran yang diketahui	Tiap tali busur lingkaran tanpa ujung-ujung	Daerah dalam lingkaran	
M 8	Tiap titik dalam daerah bola yang diketahui	Tiap tali busur bola tanpa ujung-ujung	Daerah lingkaran yang terletak pada bola.	
M 9	Pasangan terurut bilangan real *(x,y)*	*g={(x,y)|ax+ by+c=0, a,b* tidak berdua nol *}*	Himpunan semua *(x,y)*	
M 10	Tiap ganda 3 *(x,y,z)* bilangan real	*g={(x,y,z) /ax+by+cz+d=* *0 dan* ex+fy+gz+h=0} 2 persamaan linear tak ekuivalen *a,b,c* tak bertiga nol *e,f,g* tak bertiga nol	*V={(x,y,z) /px+qy+* *rz+s =0, p,q,r* tidak bersama nol }	

No. Model	Titik	Garis	Bidang	Diagram
M 11	Tiap ganda 3 *(x,y,z)* bilangan real	*g = {(x,y,z) / x+by+cz=0}*	Himpunan semua titik.	

Masih banyak sekali model-model geometri insidensi, diantaranya akan kita bahas berikut ini.

M12: Titik adalah bilangan kompleks, Garis adalah himpunan semua bilangan kompleks

$$g = \{ z \mid az + \overline{az} + b = 0,\ a\ \ kompleks\ \ tak\ \ nol,\ b\ \ real \}$$

Sebagai satu-satunya bidang ialah himpunan semua bilangan kompleks. Bidang ini memiliki nama khusus, yaitu bidang Gauss. Untuk membuktikan bahwa geometri tersebut adalah suatu geometri insidensi, cukuplah dibuktikan dipenuhinya aksioma-aksioma I.1 sampai dengan I.3, mengingat dalam geometri ini ada hanya satu bidang. Dalam hal ini geometri kita berdimensi dua. Berikut akan ditunjukkan bahwa geometri tersebut memenuhi aksioma I.1 sampai dengan aksioma I.3.

Membuktikan I.1. Untuk membuktikan model memenuhi I.1 ambil garis sembarang $g = \{z \mid az + \overline{az} + b = 0,\ a\ \text{kompleks tak nol},\ b\ \text{real}\}$.

Kita akan membuktikan bahwa g memuat paling sedikit dua titik yang berbeda. Artinya harus kita tunjukkan ada paling sedikit dua bilangan kompleks yang berbeda yang dapat memenuhi persamaan $az + \overline{az} + b = 0$. Andaikan $a = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta$ real tidak berdua nol dan andaikan $z = x + iy$ maka $az + \overline{az} + b = 0$ dapat ditulis sebagai:

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) + (\alpha - i\beta)(x - iy) + b = 0$$

Persamaan ini dapat pula ditulis sebagai,

$$2\alpha x - 2\beta y + b = 0$$

Ambil $x = 0$, maka $y = \dfrac{b}{2\beta} \quad (\beta \neq 0)$

Ambil $y = 0$, maka $x = \dfrac{b}{2\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$

Sehingga $z_1 = \dfrac{bi}{2\beta}$ dan $z_2 = \dfrac{b}{2\alpha}$.

Titik z_1 dan z_2 memenuhi persamaan $az + \overline{az} + b = 0$; ini berarti garis mengandung paling sedikit dua titik yaitu z_1 dan z_2 tersebut. Bagaimana kalau α atau β sama dengan nol? Periksa untuk latihan!

Membuktikan I.2. Untuk membuktikan bahwa model memenuhi I,2, kita ambil dua titik yang berbeda, misalnya: titik $A = z_1 = x_1 + iy$ $(x_1, y_1$ real) dan titik $B = z_2 = x_2 + iy_2$, $(x_2, y_2$ real$)$. Kita harus membuktikan bahwa hanya ada satu garis g yang memuat A dan B tersebut. Kita andaikan garis $az + \overline{az} + b = 0$ memuat A dan B. Kita akan mencari a dan b, b real sehingga garis memuat titik A dan titik B. Misalkan $a = \alpha + i\beta$, α, β real. Karena g memuat A ($= z_1$) dan B ($=z_2$); maka

$$az_1 + \overline{az_1} + b = 0 \qquad (1)$$

$$az_2 + \overline{az_2} + b = 0 \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) kita peroleh:

$$(\alpha + i\beta)(x_1 + iy_1) + (\alpha - i\beta)(x_1 - iy_1) + b = 0 \text{ atau}$$

$$2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + b = 0 \qquad (3)$$

Dengan cara yang sama, menggunakan (2) didapat

$$2\alpha x_2 - 2\beta y_2 + b = 0 \qquad (4)$$

Dari (3) dan (4) kita peroleh

$$2\alpha x_1 - 2\beta y_1 = 2\alpha x_2 - 2\beta y_2$$

Jadi: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \lambda$

sehingga $a = \beta(\lambda + i)$

Dengan demikian maka

$$b = -\left(az_1 + \overline{az_1}\right) = -2Rl(az_1) = -2(\alpha x_1 - \beta y_1)$$

$$b = -2\alpha x_1 + 2\frac{\alpha}{\lambda} y_1 = 2\alpha \frac{y_1 - \lambda x_1}{\lambda}$$

atau $b = 2\beta(y_1 - \lambda x_1)$

Jadi persamaan garis yang melalui z_1 dan z_2 adalah:

$$\beta(\lambda+i)z+\beta(\lambda-i)\overline{z}+2\beta(y_1-\lambda x_1)=0 \quad \text{atau}$$

$$(\lambda+i)z+(\lambda-i)z+2(y_1-\lambda x_1)=0 \qquad (5)$$

Mudahlah dibuktikan bahwa garis (5) ini adalah satu-satunya garis yang melalui z_1 dan z_2.

Membuktikan I.3. Untuk membuktikan bahwa model memenuhi I.3, kita buktikan bahwa bidang memuat paling sedikit 3 titik yang tak segaris. Untuk membuktikan ini ambillah sebuah garis $az+\overline{az}+b=0$. Andaikan $a=\alpha+i\beta$ dan $z=i$ maka i tak terletak pada garis tersebut, sebab $ai+\overline{ai}+b=-2R1\,(ai)+b=-2\beta+b$, $b-2\beta$ tidak selalu nol, nol hanya apabila $b=2\beta$, i terletak pada garis itu. Kalau $b\neq 2\beta$ maka i tidak pada garis tersebut.

Contoh selanjutnya yang akan kita kemukakan ialah model M13 di bawah ini. Model ini penting dalam studi mengenai bidang-bidang proyektif. Bidang dengan garis-garis yang didefinisikan seperti dalam model M13, dinamakan bidang insidensi Moulton. F.R. Moulton adalah seorang matematikawan Amerika Serikat yang hidup di permulaan abad ke XX ini.

M13 Titik adalah pasangan bilangan terurut bilangan real *(x, y)*. Garis adalah salah satu himpunan pasangan terurut *(x, y)* sebagai berikut:

$$g_1=\{(x,y)\mid x=a\}$$

$$g_2=\{(x,y)\mid y=mx+b,\ m\leq 0\}$$

$$g_3=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{ll} y=mx+b, & x\leq 0 \\ y=\frac{1}{2}mx+b, & x>0 \quad untuk \quad m>0 \end{array}\right.\right\}$$

Membuktikan model memenuhi I.1. Dari ketiga bentuk persamaan garis di atas paling sedikit ada dua titik pada garis tersebut. Untuk garis $g_1=\{(x,y)\mid x=a\}$ titik-titik tersebut antara lain *(a,1)* dan *(a,2)*. Apabila garis kita berbentuk $g_2 = \{ (x, y) \mid y = mx + b$, untuk $m \leq 0\}$

maka ada pula paling sedikit dua titik pada g_2, misalnya $(0, b)$ dan $(-b/m, 0)$, untuk $m < 0$. Kalau $m = 0$, maka $g_2 = \{ (x, y) \mid y = b\}$, di sini ada dua titik pada g_2, yaitu misalnya (l, b) dan $(2, b)$. Juga dapat diperlihatkan apabila $g_3 = \{(x, y) \mid y = mx + b, m > 0, x \leq 0; y = \frac{1}{2}mx + b; m > 0, x > 0\}$, maka ada paling sedikit dua titik berbeda pada g_3.

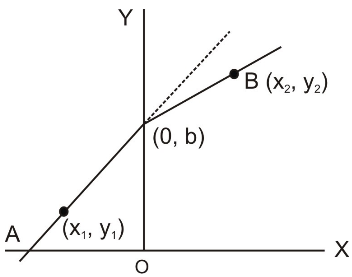
Membuktikan model memenuhi I.2. Andaikan ada dua titik $A(x_l, y_l)$ dan $B(x_2, y_2)$. Apakah melalui A dan B ada garis yang tunggal? Apabila $x_1 = x_2$, garis yang melalui A dan B ialah $\{(x, y) \mid x = x_1\}$, garis ini tunggal. Kalau x_1 dan x_2 dua-duanya positif atau dua-duanya negatif, mudahlah dibuktikan bahwa dalam hal ini juga akan diperoleh satu garis yang tunggal yang melalui A dan B. Andaikan $x_1 < 0 < x_2$ dan $y_l < y_2$. (lihat gambar 1.1). Dalam hal ini garis adalah himpunan yang berbentuk g_2 dan memuat $C\ (0, b)$ untuk sesuatu nilai dari b.

Sehingga $m = \dfrac{b - y_1}{0 - x_1}$ dan $\dfrac{1}{2}m = \dfrac{y_2 - b}{x_2}$;

dari dua persamaan ini m dan b adalah tunggal, yaitu:

$$m = \frac{2\left(y_2 - y_1\right)}{x_2 - 2x_1} \quad \text{dan} \quad b = \frac{x_2 y_1 - 2x_1 y_2}{x_2 - 2x_1};$$

Dengan demikian, dua titik selalu dilalui garis tunggal.



Gambar 1.1

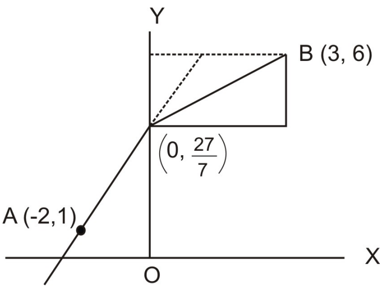
Membuktikan model memenuhi I.3. Dalam geometri kita ini, apabila diketahui garis dalam salah satu bentuk g_l, g_2 atau g_3, mudah pula diperlihatkan adanya paling sedikit satu titik yang tidak terletak pada garis tersebut.

Contoh:

1) Dalam model geometri insidensi M13 di atas, garis yang melalui $A(-2, 3)$ dan $B(-2, 4)$ adalah $g_1 = \{(x, y) \mid x = -2\}$, titik $x \neq -2$ tidak pada garis tersebut.

2) Garis yang melalui $A(2, 4)$, $B(1, 6)$ memiliki $m = \dfrac{6-4}{1-2} = -2$ $(m < 0)$. Sehingga garis tersebut adalah: $g_2 = \{(x, y) \mid y = -2x+8\}$, didapat dengan memasukkan m dan salah satu titik ke persamaan garis g_2 yang kita definisikan. Salah satu titik yang tidak pada garis tersebut adalah titik $(3, 4)$.

3) Andaikan $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$. Koefisien arah garis yang melalui titik A dan titik B adalah $m = \dfrac{-2-1)}{3+2} = -\dfrac{3}{5}$ $(m < 0)$, maka garis tersebut adalah $g_2 = \{(x, y) \mid y = 3x + 5y + 1 = 0\}$.



Gambar 1.2

4) Andaikan $A(-2, 1)$ dan $B(3, 6)$ maka $m = \dfrac{2(6-1)}{3+4} = \dfrac{10}{7}$

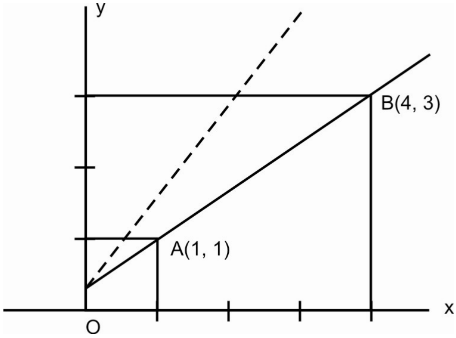
$b = \dfrac{1.3-2(-2)6}{3-2(-2)} = \dfrac{27}{7}$ jadi garis yang melalui titik-titik tersebut adalah

$$g_3 = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{10}{7}x + \dfrac{27}{7} \text{ untuk } x \leq 0 \text{ dan} \\ y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{27}{7} \text{ untuk } x > 0 \end{array} \right. \right\}$$

atau

$$g_3 = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 10x - 7y + 27 = 0 \text{ untuk } x \le 0 \text{ dan} \\ 5x - 7y + 27 = 0 \text{ untuk } x > 0 \end{array} \right\}$$

lihat Gambar 1.3 berikut.



Gambar 1.3

5) Andaikan *A(1, 1), B(4, 3)* sehingga $m = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$

maka garis yang melalui A dan B adalah garis jenis g_3, yaitu:

$$g_3 = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 2x - 3y + 1 = 0 \text{ untuk } x > 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \text{ untuk } x \le 0 \end{array} \right\} \text{ Lihat gambar 1.4}$$

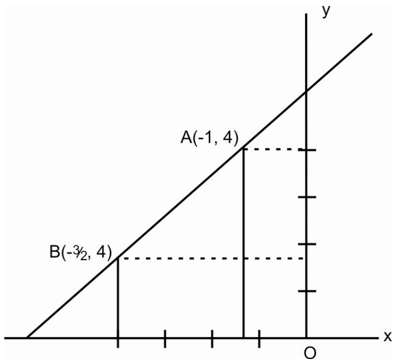
6) Andaikan $A(-1,4)$, $B\left(-\frac{3}{2},2\right)$. Dalam hal ini garis berjenis g_3 dengan

$$g_3 = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} y = mx + b, \ \ x \le 0 \\ y = \frac{1}{2}mx + b, \ \ x > 0, m < 0 \end{array} \right\}$$

$m = \dfrac{2-4}{{}^{3}\!/_{2} + 1} = 4 > 0$ sehingga $y = -4x + 8 \to 4x - y + 8 = 0$ untuk $x < 0$ dan $y = 2x + 8$ untuk $x > 0$.

Jadi,

$$g_3 = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 4x - y + 8 = 0 \text{ untuk } x \le 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \text{ untuk } x > 0 \end{array} \right\} \text{ lihat gambar 1.4}$$



Gambar 1.4

M14 Dalam model ini titik adalah pasangan bilangan terurut *(x, y)* dengan $x^2 + y^2 < 1$. Garis adalah himpunan $g \equiv \{(x,\ y) \mid ax + by + c = 0,\ a,\ b$ tidak berdua nol dan $x^2 + y^2 < 1\}$. Mudah diperlihatkan bahwa geometri ini adalah geometri insidensi. Model dari geometri ini adalah himpunan semua titik yang terletak di dalam daerah lingkaran yang berpusat di titik asal sebuah bidang Cartecius dan berjari-jari 1.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Selidiki apakah di antara model-model Ml sampai dengan M11 ada yang memenuhi sistem Aksioma I.1 sampai dengan I.6.
2) Selidiki di antara model-model tersebut mana yang terhingga (memiliki terhingga banyaknya titik-titik) dan mana yang tak terhingga.
3) Apakah di antara model-model tersebut ada yang memiliki konsep-konsep kesejajaran antara garis?
4) Di antara model-model tersebut manakah yang merupakan model berdimensi dua dan manakah yang berdimensi tiga?
5) Dalam sebuah geometri, titik adalah pasangan terurut *(x, y)* bilangan rasional dan garis adalah himpunan:

   $g = \{(x,\ y) \mid ax + by + c = 0,\ a,\ b$ rasional dan tidak berdua nol$\}$

   Selidikilah apakah geometri ini suatu geometri insidensi.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Cukup diselidiki apakah aksioma-aksioma insidensi I.1 s/d I.3 dipenuhi untuk geometri insidensi dimensi dua dan I.1 s/d I.6 terpenuhi untuk geometri insidensi dimensi tiga.
2) Pertanyaan yang ada dalam soal ini juga cukup jelas.
3) Anda tinggal menyelidiki apakah definisi kesejajaran antara garis terpenuhi atau tidak.
4) Apabila yang dipenuhi hanya aksioma I.1 s/d I.3 maka kita peroleh geometri berdimensi dua sedangkan apabila yang dipenuhi aksioma. I.1 s/d. aksioma I.6 yang dapat terpenuhi, maka kita berhadapan dengan geometri berdimensi tiga.
5) Ingatlah bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk *p/q, p, q* masing-masing bilangan bulat dan $q \neq 0$, jadi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ adalah titik sedangkan $\left(\sqrt{2}, 3\right)$ bukan titik, sebab $\sqrt{2}$, bukan bilangan rasional. Selanjutnya penyelidikan seterusnya cukup sederhana. Tinggal mengecek apakah aksioma I.1 s/d aksioma insidensi I.3 terpenuhi atau tidak.

RANGKUMAN

Dari uraian-uraian dan contoh-contoh di atas tampaklah bahwa unsur-unsur titik dan garis tidaklah selalu merupakan noktah atau garis yang biasanya digambar sepanjang sebuah mistar dalam pengertian sehari-hari kita. Konsep-konsep titik dan garis dapat diartikan apa saja yang memenuhi aksioma yang berlaku dalam geometri insidensi yang bersangkutan.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Perhatikan model M4. Dalam geometri ini, melalui tiap titik ada ….
   A. 2 garis
   B. 3 garis
   C. 4 garis
   D. 1 garis

2) Perhatikan model M3. Melalui *B* dalam geometri ini, garis yang sejajar dengan *AC* adalah ….
   A. *BD*
   B. *BC*
   C. *BA*
   D. Tidak ada garis melalui B yang sejajar dengan *AC*

3) Perhatikan model M4 kembali, melalui titik *1* banyaknya garis yang sejajar dengan garis *(2, 3, 5)* adalah ….
   A. 1
   B. 2
   C. 0
   D. 3

4) Perhatikan model M7. Ambil garis g dan sebuah titik $A \notin g$. Maka melalui garis yang sejajar dengan garis g adalah ….
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. lebih dari 2

5) Perhatikan model M8. Ambil garis g dan sebuah titik $A \notin g$. Maka melalui A, banyaknya garis yang sejajar dengan garis g adalah ….
   A. 0
   B. lebih dari 2
   C. 1
   D. 2

6) Dalam model geometri M9, garis
   $g_l = \{(x, y) \mid a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,\ a_l,\ b_l \text{ tidak berdua nol}\}$
   sejajar dengan garis
   $g_2 = \{a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,\ a_2, b_2 \text{ tidak berdua nol}\}$ jika dan hanya jika ....
   A. $a_l = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$
   B. $a_1 = a_2, \ b_1 = b_2, c_l \neq c_2$
   C. $a_l = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_l = \lambda c_2, \lambda \neq 0$
   D. $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_l \neq \lambda c_2, \lambda \neq 0$

7) Dalam model geometri M10 diketahui titik *T (1, 2, 3)* dan garis

$$g = \left\{ (x,\ y,\ z)\ \middle|\ \begin{matrix} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

maka garis g_1 yang melalui *T* dan sejajar garis *g* adalah ….

A. $g_1 = \left\{ (x,\ y,\ z)\ \middle|\ \begin{matrix} -2x + 3y - z - 1 = 0 \\ -x - y + 2z - 3 = 0 \end{matrix} \right\}$

B. $g_1 = \left\{ (x, y, z) \middle| \begin{matrix} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{matrix} \right\}$

C. $g_1 = \left\{ (x,\ y,\ z)\ \middle|\ \begin{matrix} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 3 = 0 \end{matrix} \right\}$

D. $g_1 = \left\{ (x,\ y,\ z) \middle| \begin{matrix} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{matrix} \right\}$

8) Perhatikan model M11, lihat titik *A*(λ, -2λ, λ), $\lambda \neq 0$ dan titik *B*(2α, α, $-\alpha$), $\alpha \neq 0$. Garis *g* yang melalui *A* dan *B* adalah ….
A. $x + 3y + 5z = 0$
B. $-x + 3y - 5z = 0$
C. $3x - y + 5z = 0$
D. $-3x + y - 5z = 0$

9) Dalam model geometri M11, melalui sebuah titik di luar sebuah garis dapat ditarik garis sejajar dengan garis yang diketahui sebanyak ….
A. 1
B. 0
C. 2
D. lebih dari dua

10) Dalam model M12 diketahui garis $g = \left\{ z \mid 2iz + 2\overline{iz} + 5 = 0 \right\}$. Garis yang melalui *T (1 - i)* dan yang sejajar g adalah ….

A. $2iz + 2\overline{iz} - 1 = 0$

B. $2iz + 2\overline{iz} - 3 = 0$

C. $iz + \overline{iz} - 2 = 0$

D. $iz + \overline{iz} + 1 = 0$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

.

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1		*Tes Formatif 2*	
1)	B	1)	B
2)	D	2)	A
3)	B	3)	C
4)	C	4)	D
5)	D	5)	B
6)	D	6)	D
7)	C	7)	A
8)	D	8)	A
9)	A	9)	B
10)	D	10)	C

Daftar Pustaka

David Hilbert. (1971). *Foundations of Geometry*. Illinois: Open Court.

Greenberg, Marvin J. (1973). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. W.H. Freeman and Company.

Wallace Edward C.N. and West Stephen F. (1992). *Roads to Geometry*. Prentice Hall.

W. Prenowitz & Meyer Jordan. (1965). *Basic Concepts of Geometry*. Massachusetts: Xerox College Publishing.