MODUL 1

Beberapa Konsep Dasar

Prof. Dr. Supama, M.Si.

PENDAHULUAN

Dalam modul ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang diperlukan dalam pembahasan tentang analisis real. Konsep dasar yang dimaksud, meliputi: himpunan, relasi, fungsi, induksi matematika, himpunan terhitung, dan himpunan tak terhitung.

Sebagaimana diketahui, analisis real merupakan materi yang dianggap cukup sulit di kalangan mahasiswa. Namun demikian, apabila dasar-dasar serta bahasa yang diperlukan untuk memahami konsep dalam analisis real telah dimengerti, tentu anggapan tersebut tidak akan terjadi. Dalam analisis modern, bahasa yang diperlukan adalah himpunan. Oleh karena itu, modul ini akan diawali dengan membahas konsep dasar himpunan, operasi-operasi aljabar pada himpunan, serta konsep-konsep yang mempunyai hubungan erat dengan himpunan, yaitu relasi dan fungsi.

Langkah-langkah pembuktian suatu pernyataan, khususnya pernyataan-pernyataan yang terkait dengan himpunan semua bilangan asli, merupakan hal lain yang juga sangat penting dan diperlukan dalam analisis real. Untuk itu, pada bagian selanjutnya dari modul ini akan dibahas suatu metode pembuktian yang didasarkan pada prinsip-prinsip himpunan semua bilangan asli. Metode yang dimaksud adalah Induksi Matematika.

Modul ini akan diakhiri dengan pembahasan mengenai himpunan terhitung (*countable set*) dan himpunan tak terhitung (*uncountable set*).

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan mahasiswa akan dapat,

1. menjelaskan pengertian himpunan dan operasi-operasi aljabar pada himpunan,
2. menjelaskan pengertian fungsi, jenis-jenis fungsi, fungsi komposisi, dan fungsi invers,
3. membuktikan suatu pernyataan yang berkaitan dengan himpunan semua bilangan asli, dengan menggunakan prinsip Induksi Matematika, dan
4. menjelaskan pengertian kardinal suatu himpunan, himpunan terhitung, dan himpunan tak terhitung.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan, Relasi, dan Fungsi

Pada bagian ini, pembaca diingatkan kembali pada beberapa terminologi terkait dengan konsep himpunan.

1.1 HIMPUNAN

Definisi 1.1.1

Himpunan adalah sekumpulan objek berbeda dengan sifat atau kriteria tertentu. Objek dalam himpunan disebut anggota atau elemen himpunan tersebut.

Himpunan di mana kita bicara disebut Semesta (*Universe*), dinotasikan S. Jika A suatu himpunan dan x anggota A, maka dituliskan $x \in A$. Jika x bukan anggota A, dituliskan $x \notin A$. Ada 2 cara menuliskan himpunan, yaitu yang pertama dengan cara mendaftar semua anggotanya dan menuliskannya di dalam kurung kurawal, dan yang kedua dengan cara menuliskan syarat keanggotaannya. Jika setiap anggota himpunan A memenuhi kriteria P, maka A dapat dituliskan sebagai

$$A = \{x \in S : x \in P\}.$$

Sebagai contoh, jika A adalah himpunan dengan anggota-anggota 1, 2, 3, 4, dan 5, maka A dapat dituliskan sebagai

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \tag{1.1}$$

atau

$$A = \{x : x \text{ bilangan asli dan } 1 \le x \le 5\}. \tag{1.2}$$

Penulisan himpunan dengan cara menuliskan syarat keanggotaannya dapat dilakukan dengan cara yang tidak tunggal. Sebagai contoh, selain dapat dituliskan sebagaimana dalam (1.2), himpunan A di atas juga dapat dituliskan dengan

$$A = \{x : x \text{ lima bilangan asli yang pertama}\}.$$

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong (*empty set*/*void set*), dinotasikan $\varnothing$. Sebagai contoh, jika

$A = \{x : x \text{ bilangan asli sehingga } x + 3 = 1\}$, maka A merupakan himpunan kosong.

Definisi 1.1.2

Diberikan himpunan A dan B.

(i) Himpunan A disebut himpunan bagian (*subset*) B, dinotasikan $A \subseteq B$, jika setiap anggota A merupakan anggota B.

(ii) Himpunan A dan B dikatakan sama, dinotasikan $A = B$, jika A dan B memuat elemen-elemen yang sama, yaitu jika setiap anggota A merupakan anggota B dan setiap anggota B merupakan anggota A.

Berdasarkan definisi di atas, kiranya mudah dipahami bahwa dua himpunan A dan B sama jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Jika himpunan A tidak kosong, $A \subseteq B$, dan $A \neq B$, maka dikatakan A himpunan bagian sejati (*proper subset*) B, biasa dinotasikan $A \subset B$.

Beberapa himpunan khusus, yaitu himpunan bilangan-himpunan bilangan, akan sering digunakan dalam buku ini. Himpunan-himpunan tersebut akan dinotasikan dengan simbol-simbol yang standar.

- Himpunan semua bilangan asli: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
- Himpunan semua bilangan bulat: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
- Himpunan semua bilangan rasional: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
- Himpunan semua bilangan real: $\mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan himpunan yang sangat fundamental di dalam analisis real. Pembahasan mengenai $\mathbb{R}$ secara detail akan diberikan pada Modul 2.

1.2 OPERASI-OPERASI ALJABAR PADA HIMPUNAN

Operasi aljabar pada himpunan adalah suatu cara yang diperlukan untuk mendapatkan suatu himpunan baru dari beberapa himpunan yang diberikan. Operasi-operasi aljabar pada himpunan didefinisikan berdasarkan pada makna kata-kata: “ATAU”, “DAN”, atau “BUKAN”.

Definisi 1.2.1

(i) Gabungan (*union*) himpunan A dan himpunan B, dinotasikan $A \cup B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A atau anggota B. Dalam bahasa simbol, dapat dituliskan

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

(ii) Irisan (*intersection*) himpunan A dan himpunan B, dinotasikan $A \cap B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A dan anggota B. Dalam bahasa simbol, dapat dituliskan

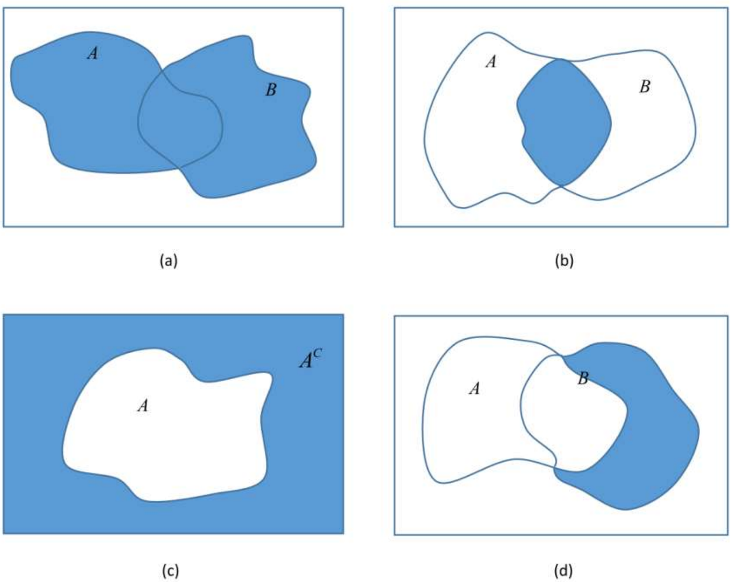
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

(iii) Komplemen (*complement*) himpunan A, dinotasikan A^C, adalah himpunan yang anggota-anggotanya bukan merupakan anggota A. Jadi,

$$A^C = \{x \in S : x \notin A\}.$$

(iv) Selisih (*difference*) A dari B, ditulis $B - A$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota B tetapi bukan anggota A.

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}.$$



Gambar 1.1

(a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) A^C; (d) $B - A$

Berikut diberikan beberapa sifat dasar operasi pada himpunan.

Teorema 1.2.2

Diberikan himpunan-himpunan *A*, *B*, dan *C*. Pernyataan-pernyataan berikut benar.

(i) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(iv) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

(v) $A - B = A \cap B^C$.

Bukti.

(i) dan (ii) terbukti menurut definisi.

(iii) Akan dibuktikan bagian yang pertama saja. Bukti untuk bagian yang kedua diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Diambil sebarang $x \in A \cup (B \cap C)$, maka $x \in A$ atau $x \in B \cap C$. Jika $x \in A$, maka $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$. Akibatnya $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Jika $x \in B \cap C$, maka $x \in B$ dan $x \in C$. Akibatnya, $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$, atau dengan kata lain, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dengan demikian terbukti $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Untuk sebaliknya, diambil sebarang $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, maka *x* anggota $A \cup B$ sekaligus anggota $A \cup C$. Ini berarti *x* anggota *A* atau *x* anggota *B* sekaligus *C*, atau $x \in A \cup (B \cap C)$. Jadi, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

(iv) Diambil sebarang $x \in (A \cup B)^C$, maka *x* bukan anggota *A* ataupun *B*. Artinya, *x* bukan anggota *A* dan *x* bukan anggota *B*. Dengan kata lain, $x \in A^C$ dan $x \in B^C$. Jadi, $x \in A^C \cap B^C$.

Sebaliknya, jika $x \in A^C \cap B^C$, maka $x \in A^C$ dan $x \in B^C$. Artinya, *x* bukan anggota *A* ataupun *B*. Dengan kata lain, $x \in (A \cup B)^C$.

Untuk bagian yang kedua, diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(v) Perhatikan bahwa

$$A - B = \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

$$= \left\{x : x \in A \text{ dan } x \in B^C\right\} = A \cap B^C .$$

Definisi 1.2.3

Diberikan sebarang himpunan indeks, yaitu himpunan tak kosong, *I*. Berturut-turut didefinisikan

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in S : x \in A_i \text{ untuk suatu } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in S : x \in A_i \text{ untuk setiap } i \in I\}.$$

1.3 HASIL KALI SILANG

Diberikan himpunan tak kosong *A* dan *B*. Hasil kali silang (*Cartesian product*) *A* dengan *B*, dinotasikan $A \times B$, adalah himpunan dengan anggota-anggota pasangan (a,b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Contoh 1.3.1

Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b\}$, maka

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

dan

$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

Teorema 1.3.2

Diberikan himpunan-himpunan *A*, *B*, *C,* dan *D*. Pernyataan-pernyataan berikut benar.

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(iii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(iv) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Bukti.

(i) Diambil sebarang $(a,b) \in A \times \left(B \cup C\right)$, maka $a \in A$ dan $b \in B \cup C$. Sementara, dari $b \in B \cup C$, ada dua kemungkinan yang dapat terjadi, yaitu $b \in B$ atau $b \in C$. Jika $b \in B$, maka $\left(a,b\right) \in A \times B$. Jika $b \in C$, maka $\left(a,b\right) \in A \times C$. Jadi, $\left(a,b\right) \in A \times B$ atau $\left(a,b\right) \in A \times C$. Dengan kata lain, $\left(a,b\right) \in \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right)$. Dengan demikian telah dibuktikan

$$A \times \left(B \cup C\right) \subseteq \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right). \tag{1.3}$$

Sebaliknya, diambil sebarang $\left(a,b\right) \in \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right)$, maka ada dua kemungkinan yang dapat terjadi, yaitu $\left(a,b\right) \in A \times B$ atau $\left(a,b\right) \in A \times C$. Jika yang terjadi $\left(a,b\right) \in A \times B$, maka $a \in A$ dan $b \in B \subseteq B \cup C$. Akibatnya, $(a,b) \in A \times \left(B \cup C\right)$. Jika yang terjadi $\left(a,b\right) \in A \times C$, maka $a \in A$ dan $b \in C \subseteq B \cup C$. Akibatnya, $(a,b) \in A \times \left(B \cup C\right)$. Jadi, diperoleh

$$\left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right) \subseteq A \times \left(B \cup C\right). \tag{1.4}$$

Berdasarkan (1.3) dan (1.4) diperoleh $A \times \left(B \cup C\right) = \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right)$.

(iii) Diambil sebarang $(a,b) \in \left(A \times B\right) \cap \left(C \times D\right)$, maka $(a,b) \in A \times B$ dan $(a,b) \in C \times D$. Akibatnya, $a \in A$ dan $a \in C$ dan $b \in B$ dan $d \in D$. Dengan kata lain, $a \in A \cap C$ dan $b \in B \cap D$. Hal ini berarti $(a,b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Jadi, diperoleh

$$(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D). \tag{1.5}$$

Sebaliknya, diambil sebarang $(a,b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Artinya, $a \in A \cap C$ dan $b \in B \cap D$. Hal ini berarti $a \in A$ dan $a \in C$ dan $b \in B$ dan $d \in D$, atau $a \in A$ dan $b \in B$ dan $a \in C$ dan $d \in D$. Akibatnya, $(a,b) \in A \times B$ dan $(a,b) \in C \times D$, atau dengan kata lain $(a,b) \in \left(A \times B\right) \cap \left(C \times D\right)$. Jadi,

$$(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D). \tag{1.6}$$

Berdasarkan (1.5) dan (1.6) diperoleh

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

(ii) dan (iv) ditinggalkan sebagai latihan untuk para pembaca.

1.4 RELASI DAN FUNGSI

Setelah mengenal pengertian hasil kali silang antara dua himpunan, pada bagian ini akan dikenalkan pengertian relasi dari suatu himpunan ke suatu himpunan.

Definisi 1.4.1

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Relasi dari A ke B adalah suatu himpunan bagian tak kosong $R \subseteq A \times B$. Jika R relasi dari A ke B dan $(a,b) \in R$, maka biasa dituliskan aRb atau $b = R(a)$.

Contoh 1.4.2

Himpunan $R = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$ merupakan relasi dari $[-1, 1]$ ke $[-1, 1]$. Dengan memperhatikan Definisi 1.4.1, R dapat pula dipandang sebagai relasi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

Contoh 1.4.3

Diberikan himpunan-himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Berikut ini merupakan relasi dari A ke B.

(i) $R_1 = \{(a,1), (b,2)\}$.

(ii) $R_2 = \{(a,1), (b,2), (c,1), (d,3)\}$.

(iii) $R_3 = \{(a,1), (a,2), (b,2), (c,1), (d,3)\}$.

Diperhatikan kembali Contoh 1.4.3 di atas. Dalam contoh tersebut terlihat bahwa relasi R_2 mempunyai sifat "untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$ sehingga $(x,y) \in R_2$ atau $y = R_2(x)$". Relasi yang demikian disebut fungsi atau pemetaan dari A ke B. Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan definisi fungsi atau pemetaan.

Definisi 1.4.4

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Relasi R dari A ke B disebut fungsi jika untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$ sehingga $(x, y) \in R$ atau $y = R(x)$.

Contoh 1.4.5

Diberikan himpunan-himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan

(i) $R_1 = \{(a,1), (b,1), (c,2), (d,3)\}$,

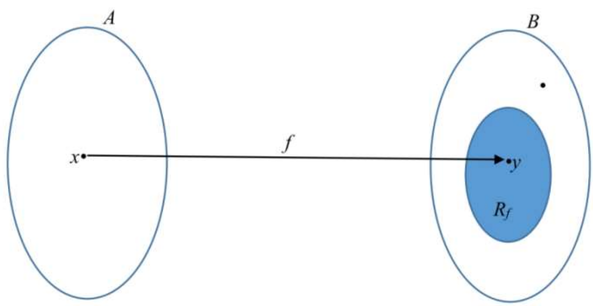
(ii) $R_2 = \{(a,1), (c,2), (d,3)\}$, dan

(iii) $R_3 = \{(1,a), (2,b), (3,d)\}$.

Memperhatikan Definisi 1.4.4, R_1 merupakan fungsi dari A ke B dan R_3 merupakan fungsi dari B ke A. Akan tetapi R_2 bukan merupakan fungsi dari A ke B, karena ada anggota A, yaitu b, yang tidak memiliki pasangan di B. Biasanya, fungsi dinotasikan dengan huruf-huruf: $f, g, h, \ldots, F, G, \ldots$ dan seterusnya, meskipun bukan suatu keharusan. Jika f merupakan fungsi dari A ke B, maka dituliskan:

$$f : A \to B,$$

atau digambarkan dengan diagram berikut:



Gambar 1.2
Fungsi $f : A \to B$

Beberapa notasi, istilah, dan pengertian terkait fungsi $f : A \to B$, diberikan sebagai berikut:

(i) A disebut daerah asal/daerah definisi (*domain*) fungsi *f*, biasa dinotasikan D_f .

(ii) B disebut daerah kawan (*co-domain*) fungsi *f*.

(iii) Himpunan $R_f = \{ y \in B : y = f(x),\ x \in A = D_f \}$ disebut daerah hasil (*range*) *f*. Himpunan R_f juga biasa ditulis $\operatorname{Im}(f)$.

(iv) $y = f(x)$ disebut rumus fungsi *f*, dengan

- x disebut perubah (*variable*) bebas.
- y disebut perubah (*variable*) tak bebas.
- $f(x)$ disebut nilai fungsi *f* di x.

(v) Untuk sebarang $D \subset A$, himpunan $f(D) = \{ f(x) :\ x \in D \}$ disebut peta D oleh fungsi *f*.

Catatan:

Dalam hal suatu fungsi $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ disajikan dalam bentuk rumus dan tidak disebutkan secara eksplisit daerah definisinya, maka disepakati daerah definisinya adalah himpunan terbesar di dalam $\mathbb{R}$ di mana *f* terdefinisi, yaitu:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} :\ f(x) \text{ ada/terdefinisi} \} .$$

Sebagai contoh, misalkan diberikan fungsi *f* dengan rumus $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, maka daerah definisi *f* adalah

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} :\ f(x) \text{ ada/terdefinisi} \} = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ \frac{x^2}{x-1} \text{ ada/terdefinisi} \right\}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} :\ x - 1 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Definisi 1.4.6

Suatu fungsi $f : A \to B$ disebut

(i) fungsi injektif (fungsi 1-1), jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, berakibat $f(x) \neq f(y)$.

(ii) fungsi surjektif, jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $y = f(x)$.

(iii) fungsi bijektif (korespondensi 1-1), jika *f* injektif sekaligus surjektif.

Contoh 1.4.7

Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b,c,d,e\}$. Himpunan $f = \{(1,a),(2,\text{c}),(3,b)\}$ merupakan fungsi injektif, tetapi tidak surjektif.

Contoh 1.4.8

Fungsi *f* dengan rumus $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif dari $\mathbb{R}$ ke $[0,\infty)$.

Bukti.

Diambil sebarang $y \in [0,\infty)$, maka $\sqrt{y}$ ada. Selanjutnya, diambil $x \in \mathbb{R}$ dengan $x = \sqrt{y}$, maka $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$. ■

Contoh 1.4.9

Fungsi *g* dengan rumus $g(x) = 1 - 3x$ merupakan korespondensi 1-1 dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

1.5 FUNGSI INVERS

Sebagaimana telah dijelaskan pada bagian terdahulu, fungsi $f : A \to B$ adalah suatu himpunan bagian $f \subseteq A \times B$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$ sehingga $(x,y) \in f$. Himpunan $g = \{(y,x) : y \in B, x \in A, (x,y) \in f\}$ disebut invers fungsi *f*. Invers fungsi *f* belum tentu merupakan fungsi. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.5.1

Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b,c,d,e\}$. Fungsi $f = \{(1,a),(2,\text{c}),(3,b)\}$ mempunyai invers $g = \{(a,1),(\text{c},2),(b,3)\}$. Himpunan *g* tersebut bukan merupakan fungsi dari *B* ke *A*. Akan tetapi, apabila daerah definisi (*domain*) *g* dibatasi hanya pada $R_f = \{a, b, c\}$, maka *g* merupakan fungsi dari R_f ke *A*.

Teorema 1.5.2

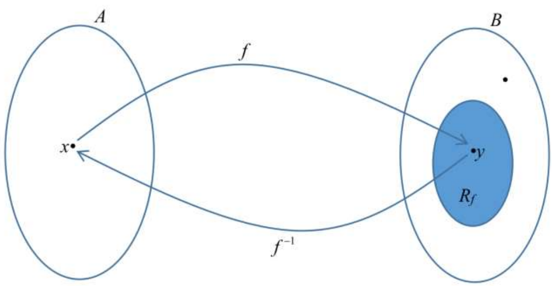
Jika $f : A \to B$ fungsi injektif, maka invers *f* merupakan fungsi bijektif (korespondensi 1-1) dari R_f ke *A*.

Bukti.

Diambil sebarang $y \in R_f$. Karena *f* fungsi injektif, maka terdapat tepat satu $x \in A$ sehingga $y = f(x)$. Dimisalkan invers *f* adalah *g*, maka $x = g(y)$. Dengan demikian, *g* merupakan fungsi dari R_f ke *A*. Akan dibuktikan $g : R_f \to A$ merupakan fungsi bijektif.

Diambil sebarang $x \in A$. Karena *f* fungsi yang terdefinisi pada *A*, maka terdapat tepat satu $y \in R_f$ sehingga $y = f(x)$ atau $x = g(y)$. Ini berarti $g : R_f \to A$ merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Jadi, $g : R_f \to A$ merupakan fungsi bijektif. ■

Invers fungsi *f* yang merupakan fungsi dari R_f ke D_f disebut fungsi invers, dinotasikan f^{-1}. Perhatikan diagram berikut.



Gambar 1.3
Fungsi $f : A \to B$ dan inversnya

Berdasarkan definisi fungsi invers,

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x),\ D_{f^{-1}} = R_f$$

Contoh 1.5.3

Tentukan $f^{-1}(x)$ jika diketahui $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

Penyelesaian.

Mudah ditunjukkan bahwa $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$. Perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

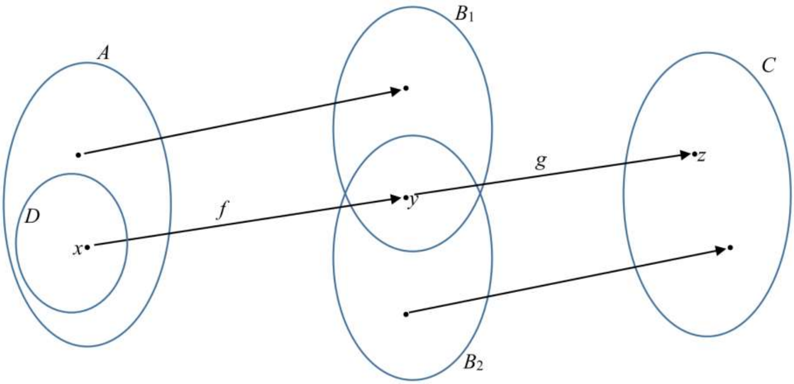
dapat bernilai real berapapun kecuali 2. Ini berarti bahwa $R_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi *f* merupakan fungsi injektif dari D_f ke R_f. Selanjutnya, untuk sebarang $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{2x}{x-1} &\Leftrightarrow y(x-1) = 2x \\ &\Leftrightarrow x(y-2) = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y-2} = f^{-1}(y),\ y \in R_f \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2},\ x \in D_{f^{-1}} = R_f$. ■

1.6 FUNGSI KOMPOSISI

Diberikan fungsi-fungsi $f : A \to B_1$ dan $g : B_2 \to C$. Apakah mungkin dari fungsi *f* dan *g* tersebut dibentuk fungsi $h : D \subset A \to C$ sehingga untuk setiap $x \in D$, $h(x) = g(f(x))$? Jawabnya mungkin, asalkan terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) \in B_2$. Fungsi *h* yang demikian disebut fungsi komposisi *f* dengan *g*, dinotasikan $g \circ f$.



Gambar 1.4
Fungsi $f : A \to B_1$ dan $g : B_2 \to C$

Jadi,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f : f(x) \in D_g \right\}.$$

Contoh 1.6.1

Diberikan $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Daerah definisi *f* dan *g* masing-masing adalah $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \}$ dan $D_g = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$. Menurut definisi fungsi komposisi,

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

dengan $D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f : \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \right\} = \left\{ x \in D_f : x < -1 \text{ atau } x \geq 1 \right\}$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Untuk sebarang dua himpunan A dan B, tunjukkan $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$.
2) Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $A_n = \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$.

   Tentukan

   a. $A_1 \cup A_2$.

   b. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$
3) Tunjukkan $\varnothing \subseteq A$ untuk setiap himpunan A.
4) Jika $A \subseteq B \cup C$ dan $A \cap B = \varnothing$, tunjukkan $A \subseteq C$.
5) Tunjukkan $(A \times B) - (C \times C) = \{(A - C) \times B\} \cup \{A \times (B - C)\}$.
6) Tunjukkan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7) Tunjukkan $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
8) Diberikan himpunan-himpunan tak kosong A, B, C, dan D. Tunjukkan
   $$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C, B = D.$$
9) Diberikan $A = \{a, b, c\}$ dan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan yang mana di antara himpunan-himpunan di bawah ini yang merupakan fungsi dari A ke B.
   $R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,1)\}$, $R_2 = \{(a,1),(b,2)\}$, $R_3 = \{(a,1),(a,2),(c,3)\}$.
10) Diberikan fungsi-fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, masing-masing dengan rumus
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x \ , \ x \geq 0 \\ 2 - x \ , \ x < 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x \ , \ x \geq 0 \\ x - 1, \ x < 0 \end{cases}$$
   Tentukan $g \circ f$ dan f^{-1}.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) ($\Longrightarrow$) Diketahui $A \subseteq B$. Jelas $B \subseteq A \cup B$. Sebaliknya, untuk sebarang $x \in A \cup B$, berlaku $x \in A \subseteq B$ atau $x \in B$. Jadi, $A \cup B \subseteq B$.
   ($\Longleftarrow$) Diambil sebarang $x \in A$. Karena $A \cup B = B$ dan $A \subseteq A \cup B$, maka $x \in B$.
2) a. $A_1 \cup A_2 = \{2k, 3k : k \in \mathbb{N}\} = \{2,3,4,6,8,9,10,12,...\}$.
   b. Akan ditunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Diambil sebarang $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, maka $x \in A_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya, $x > n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini tidak mungkin, mengingat $\mathbb{N}$ tidak mempunyai anggota terbesar.
3) Pernyataan "$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$" selalu bernilai benar.
4) Diambil sebarang $x \in A$. Karena $A \subseteq B \cup C$, maka $x \in B \cup C$. Karena $A \cap B = \varnothing$, maka $x \in C$.
5) Diambil sebarang $(a,b) \in (A \times B) - (C \times C)$, maka $a \in A, b \in B$, tetapi $(a,b) \notin C \times C$. Akibatnya, $a \in C, b \notin C$ atau $a \notin C, b \in C$, sehingga diperoleh
   $$a \in A - C, b \in B \cap C \subset B \text{ atau } a \in A \cap C \subset A, b \in B - C,$$
   yang artinya $(a,b) \in \{(A - C) \times B\} \cup \{A \times (B - C)\}$.
   Sebaliknya, jika diambil sebarang $(a,b) \in \{(A - C) \times B\} \cup \{A \times (B - C)\}$, maka
   $$a \in A, b \in B - C \text{ atau } a \in A - C, b \in B$$
   Akibatnya, $a \in A, b \in B$, tetapi $(a,b) \notin C \times C$. Atau dengan kata lain, $(a,b) \in (A \times B) - (C \times C)$.
6) Diambil sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$, maka $x \in A$ dan $x \in B \cup C$.
   Karena $x \in B \cup C$ artinya sama dengan $x \in B$ atau $x \in C$, maka diperoleh $x \in A$ dan $x \in B$, atau $x \in A$ dan $x \in C$. Jadi,
   $$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
   Untuk sebaliknya, diambil sebarang $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, maka x anggota $A \cap B$ atau x anggota $A \cap C$. Ini berarti x anggota A, sekaligus x anggota B atau C, atau dengan kata lain $x \in A \cap (B \cup C)$.

7) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\Leftrightarrow x \text{ bukan anggota } A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \text{ bukan anggota } A \text{ atau } x \text{ bukan anggota } B \\ &\Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C. \end{aligned}$$

8) Dengan menggunakan sifat bahwa

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A \times B \subset C \times D \text{ dan } C \times D \subset A \times B$$

soal terbukti.

9) R_1 merupakan fungsi dari *A* ke *B*, sedangkan R_2 dan R_3 keduanya bukan merupakan fungsi dari *A* ke *B*.

10) Pertama, akan dicari terlebih dulu $(g \circ f)(x)$.

a1. Untuk $x \geq 0$, $f(x) = 1 - 2x \leq 1$. Dengan memperhatikan definisi *g*, ditinjau dua keadaan, yaitu:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{ dan } f(x) < 0$$

(i) untuk keadaan $0 \leq f(x) \leq 1$,

- $0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, dan
- $g(f(x)) = 1 + f(x) = 1 + (1 - 2x) = 2 - 2x$.

(ii) untuk keadaan $f(x) < 0$,

- $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, dan
- $g(f(x)) = f(x) - 1 = (1 - 2x) - 1 = -2x$.

b1. Untuk $x < 0$, $f(x) = 2 - x > 2 \geq 0$, sehingga,

$g(f(x)) = 1 + f(x) = 1 + (2 - x) = 3 - x$.

Dengan memperhatikan a1 dan b1, diperoleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -2x, & x > 1/2 \\ 2 - 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3 - x, & x < 0 \end{cases}$$

Selanjutnya, akan dicari $f^{-1}(x)$.

a2. Untuk $x \geq 0$, $y = f(x) = 1 - 2x \leq 1$, sehingga,

$$x = (1/2)(1 - y) = f^{-1}(y), \; y \leq 1 .$$

b2. Untuk $x < 0$, $y = f(x) = 2 - x > 2$, sehingga,

$$x = 2 - y = f^{-1}(y), \; y > 2 .$$

Dengan memperhatikan a2 dan b2, diperoleh

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} (1/2)(1 - y) \;, & y \leq 1 \\ \\ 3 - y \;, & y > 2 \end{cases}$$

RANGKUMAN

Himpunan adalah sekumpulan objek dengan sifat atau kriteria tertentu.

Relasi dari himpunan tak kosong A ke himpunan tak kosong B adalah suatu himpunan bagian tak kosong $R \subseteq A \times B$.

Relasi R dari A ke B disebut fungsi jika untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$ sehingga $(x, y) \in R$. Notasi $(x, y) \in R$ sering ditulis $y = R(x)$.

Jika $f : A \to B$ fungsi injektif, maka invers f merupakan fungsi bijektif (korespondensi 1-1) dari R_f ke A. Lebih lanjut,

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x), \; D_{f^{-1}} = R_f .$$

Untuk sebarang fungsi-fungsi $f : A \to B_1$ dan $g : B_2 \to C$, fungsi komposisi $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f : f(x) \in D_g \right\} .$$

TES FORMATIF 1

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat dan detail!

1) Untuk sebarang himpunan A dan B, tunjukkan $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$.
2) Tunjukkan $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.
3) Diberikan fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Untuk sebarang $A\subset\mathbb{R}$, didefinisikan

   $$f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\in A\} \text{ dan } f(A)=\{f(x):\ x\in A\}$$

   Tunjukkan:

   a. $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

   b. $A\subset f^{-1}(f(A))$.
4) Lihat soal nomor 3. Apakah $f^{-1}(f(A))=A$? Jelaskan jawaban Saudara.
5) Diberikan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dengan rumus

   $$f(n)=\begin{cases}2n, & n \text{ genap}\\ n, & n \text{ ganjil}\end{cases}$$

   Selidiki apakah *f* injektif? surjektif?
6) Tentukan daerah definisi fungsi *f*, jika

   a. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. b. $f(x)=\dfrac{x-1}{x}+\sqrt{4-3x-x^2}$.
7) Tentukan daerah hasil *f*, jika $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
8) Tentukan $f(\mathbb{R})$, jika

   $$f(x)=\begin{cases}x+1/x, & x>0\\ 3x-1, & x\le 0\end{cases}$$

9) Diberikan fungsi-fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ 3 + x & , \ x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x & , \ x \geq 0 \\ (x-1)/x & , \ x < 0 \end{cases}$$

Tentukan rumus untuk $g \circ f$.

10) Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geq 0 \\ 3x & , \ x < 0 \end{cases}$$

Tentukan $f^{-1}(x)$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Induksi Matematika

Langkah-langkah pembuktian suatu pernyataan, khususnya pernyataan-pernyataan yang terkait dengan himpunan semua bilangan asli, merupakan hal yang sangat penting dan diperlukan dalam analisis real. Untuk itu, pada bagian ini akan dibahas suatu metode pembuktian yang didasarkan pada prinsip-prinsip himpunan semua bilangan asli. Metode yang dimaksud adalah Induksi Matematika.

Sebelum masuk ke pembicaraan mengenai Induksi Matematika, terlebih dahulu akan dibahas konsep *urutan baik* (*well ordering*).

1.7 URUTAN BAIK (*WELL ORDERING*)

Diberikan himpunan tak kosong *P*. Relasi $R \subseteq P \times P$ disebut urutan parsial (*partial ordering*) pada *P*, jika *R* bersifat

(i) *refleksif*, yaitu $(x, x) \in R$ untuk setiap $x \in P$,
(ii) *transitif*, yaitu jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka $(x, z) \in R$, dan
(iii) *anti-simetri*, yaitu jika $(x, y) \in R$ dan $(y, x) \in R$, maka $x = y$.

Himpunan tak kosong *P* yang dilengkapi dengan suatu urutan parsial disebut *himpunan terurut parsial* (*partially ordered set*), disingkat poset dan dinotasikan (P, R).

Contoh 1.7.1

Diberikan $P = \mathbb{R}^2$. Relasi R pada P didefinisikan sebagai berikut. Untuk sebarang $\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) \in P \times P$,

$$\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) \in R \Leftrightarrow x_1 \le y_1,\ x_2 \le y_2 .$$

Dapat ditunjukkan bahwa *R* merupakan urutan parsial pada *P*.

Untuk selanjutnya, suatu urutan parsial pada himpunan *P* akan dinotasikan $\le$ dan $(x, y) \in \le$ dituliskan dengan $x \le y$.

Diberikan poset $(P,\leq)$ dan $A \subseteq P$. Suatu elemen $x_0 \in A$ disebut elemen terbesar (terkecil) di A, jika $x \leq x_0$ ($x_0 \leq x$) untuk setiap $x \in A$.

Contoh 1.7.2

Diperhatikan himpunan-himpunan $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, dengan

$P_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4\}$ dan $P_2 = \{(x,y) : 0 < x \leq 2, 1 < y \leq 4\}$.

Elemen $(0,1)$ dan elemen $(2,4)$ masing-masing merupakan elemen terkecil dan elemen terbesar di P_1. Sementara, P_2 tidak mempunyai elemen terkecil.

Bukti.

Diambil sebarang $(x,y) \in P_1$, maka $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4$. Akibatnya,

$$(0,1) \leq (x,y) \leq (2,4).$$

Karena $(0,1), (2,4) \in P_1$, maka $(0,1)$ dan elemen $(2,4)$ masing-masing merupakan elemen terkecil dan elemen terbesar di P_1.

Diambil sebarang $(x,y) \in P_2$, maka $0 < x \leq 2$ dan $1 < y \leq 4$. Jika diambil $u = \frac{1}{2}x$ dan $v = \frac{y+1}{2}$, maka $0 < u \leq 1$ dan $\frac{1+1}{2} < v \leq \frac{4+1}{2}$. Ini berarti $(u,v) \in P_2$. Akan tetapi, karena $(u,v) < (x,y)$, maka (x,y) bukan elemen terkecil. Karena hal ini berlaku untuk sebarang $(x,y) \in P_2$, maka P_2 tidak mempunyai elemen terkecil. ■

Definisi 1.7.3

Suatu poset P dikatakan terurut dengan baik (*well ordered*) jika setiap himpunan bagian tak kosong di dalam P mempunyai elemen terkecil.

Berdasarkan Definisi 1.7.3, jika P suatu himpunan yang terurut dengan baik dan $P_1 \subseteq P$, maka P_1 juga terurut dengan baik.

Contoh 1.7.4

(i) Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan yang terurut dengan baik terhadap relasi “kurang dari atau sama dengan” ($\leq$).

(ii) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, himpunan $P_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ merupakan himpunan yang terurut dengan baik terhadap $\leq$.

(iii) Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan relasi "kurang dari atau sama dengan" ($\leq$), bukan merupakan himpunan yang terurut dengan baik, karena $(0,1) \subset \mathbb{R}$ tidak mempunyai elemen terkecil.

Contoh 1.7.5

Diberikan $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Terhadap relasi urutan parsial $\leq_P$, dengan

$$(m,n) \leq_P (p,q) \Leftrightarrow (2m+1)2^q \leq (2p+1)2^n$$

P merupakan poset, tetapi bukan merupakan himpunan yang terurut dengan baik.

Bukti.
Diambil sebarang $(m,n),(p,q),(k,l) \in P$.

(i) Karena $(2m+1)2^n \leq (2m+1)2^n$, maka $(m,n) \leq_P (m,n)$.

(ii) Jika $(m,n) \leq_P (p,q)$ dan $(p,q) \leq_P (k,l)$, maka

$$(2m+1)2^q \leq (2p+1)2^n \Leftrightarrow (2m+1)2^q 2^{-n} \leq (2p+1) \tag{1.7}$$

dan

$$(2p+1)2^l \leq (2k+1)2^q \Leftrightarrow (2p+1) \leq (2k+1)2^q 2^{-l}. \tag{1.8}$$

Dari (1.7) dan (1.8) diperoleh

$$(2m+1)2^q 2^{-n} \leq (2k+1)2^q 2^{-l}$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)2^l \leq (2k+1)2^n$$

$$\Leftrightarrow (m,n) \leq_P (k,l).$$

(iii) Jika $(m,n) \leq_P (p,q)$ dan $(p,q) \leq_P (m,n)$, maka

$$(2m+1)2^q \leq (2p+1)2^n \text{ dan } (2p+1)2^n \leq (2m+1)2^q. \tag{1.9}$$

Akibatnya,

$$(2m+1)2^q = (2p+1)2^n. \tag{1.10}$$

Akan ditunjukkan $n \neq q$. Tanpa mengurangi keumuman dapat diasumsikan $n < q$, maka (1.10) dapat dinyatakan menjadi

$$(2m+1)2^{q-n} = (2p+1).$$

Hal itu tidak mungkin terjadi, mengingat ruas kiri menyatakan bilangan genap, sementara ruas kanan menyatakan bilangan ganjil. Jadi, $n = q$. Akibatnya, $m = p$. Dengan demikian terbukti $(m, n) = (p, q)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan P tidak mempunyai elemen terkecil. Untuk sebarang $(m, n) \in P$, diambil (p, q) dengan $m = p$ dan $q = n + 1$, maka $(p, q) \in P$ dan

$$(2p+1)2^n = (2m+1)2^n \leq (2m+1)2^{n+1} = (2m+1)2^q .$$

Hal ini berarti $(p, q) \leq_P (m, n)$. Dengan demikian P tidak mempunyai elemen terkecil. Jadi, P tidak terurut dengan baik. ∎

1.8 INDUKSI MATEMATIKA

Sebagaimana telah dinyatakan dalam Contoh 1.7.4 (i), himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan yang terurut dengan baik terhadap $\leq$. Artinya, setiap himpunan bagian tak kosong di dalam $\mathbb{N}$ mempunyai elemen terkecil. Oleh karena itu, diperoleh teorema berikut.

Teorema 1.8.1

Setiap himpunan bagian tak kosong di dalam $\mathbb{N}$ mempunyai elemen terkecil.

Berdasarkan kenyataan tersebut, dapat diturunkan teorema berikut ini.

Teorema 1.8.2 (Prinsip Induksi Matematika)

Diberikan sebarang himpunan bagian $S \subseteq \mathbb{N}$. Jika dipenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $1 \in S$, dan

(ii) untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, jika $n \in S$, berakibat $n+1 \in S$,

maka $S = \mathbb{N}$.

Bukti.

Diandaikan $S \neq \mathbb{N}$, maka $\mathbb{N} - S \subset \mathbb{N}$ dan $\mathbb{N} - S \neq \phi$. Menurut Teorema 1.8.1, $\mathbb{N} - S$ mempunyai elemen terkecil, namakan elemen terkecil tersebut m. Akan ditunjukkan $m > 1$. Diandaikan $m = 1$. Karena $1 \in S$, maka $m = 1 \in S$. Hal ini kontradiksi dengan $m \in \mathbb{N} - S$. Jadi, $m > 1$.

Selanjutnya, karena $m-1<m$ dan m elemen terkecil di dalam $\mathbb{N}-S$, maka

$$m-1\notin \mathbb{N}-S \Leftrightarrow m-1\in S.$$

Berdasarkan hipotesis (ii), $m=(m-1)+1\in S$. Hal ini kontradiksi dengan $m\in \mathbb{N}-S$. Jadi, haruslah $S=\mathbb{N}$. ∎

Prinsip-prinsip induksi matematika sering pula diformulasikan dalam bingkai sifat-sifat atau pernyataan terkait bilangan asli. Hal itu dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.8.3

Misalkan $P(n)$ menyatakan sifat yang berlaku untuk sebarang bilangan asli $n\in\mathbb{N}$ yang diberikan. Jika

(i) $P(1)$ benar, dan

(ii) diandaikan $P(n)$ benar, berakibat $P(n+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

Bukti.

Didefinisikan

$$S=\{n\in\mathbb{N} : P(n) \text{ benar}\}.$$

Menurut (i), $1\in S$. Selanjutnya, menurut (ii) berlaku: $n\in S\Rightarrow n+1\in S$. Jadi, menurut Teorema 1.8.2, $S=\mathbb{N}$. Dengan kata lain, $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$. ∎

Kadang dijumpai suatu keadaan di mana sifat $P(n)$ benar untuk $n\ge n_0$, untuk suatu $n_0\in\mathbb{N}$. Sebagai contoh, $2^n>2n+1$ salah untuk $n=1,2$, tetapi benar untuk semua bilangan asli $n\ge 3$.

Prinsip induksi matematika dapat dimodifikasi untuk situasi sebagaimana disebutkan di atas. Adapun reformulasi prinsip induksi matematika untuk keadaan tersebut, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.8.4

Misalkan $n_0\in\mathbb{N}$ dan $P(n)$ menyatakan sifat yang berlaku untuk sebarang bilangan asli $n\ge n_0$. Jika

(i) $P(n_0)$ benar, dan

(ii) untuk $n \geq n_0$, kebenaran $P(n)$ berakibat $P(n+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Bukti.

Didefinisikan $Q(n)$, dengan

$$Q(n) = P(n + n_0 - 1),\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Menurut (i), $Q(1) = P(n_0)$ benar. Selanjutnya, diandaikan $Q(n)$ benar, artinya $P(k)$, dengan $k = n + n_0 - 1 \geq n_0$, benar. Akibatnya, menurut (ii), $P(k+1) = P(n+n_0)$ benar. Perhatikan bahwa

$$P(k+1) = P(n+n_0) = Q(n+1)\,.$$

Jadi, jika diandaikan $Q(n)$ benar, diperoleh $Q(n+1)$ benar. Dengan demikian, teorema terbukti menurut Teorema 1.8.3. █

Contoh 1.8.5

a. Tunjukkan $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti.

Didefinisikan

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)} \right\}.$$

(i) $1 \in S$, karena $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{(1+1)}$.

(ii) Diandaikan $n \in S$, artinya $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$,

maka

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}+\frac{1}{(n+1).(n+2)}=\frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1).(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1).(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1).(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$$

yaitu $n+1\in S$.

Jadi, menurut Teorema 1.8.2, $S=\mathbb{N}$, atau dengan kata lain

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{(n+1)},$$

untuk setiap $n\in\mathbb{N}$. █

b. Tunjukkan bahwa untuk setiap , $n\in\mathbb{N}$, $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ habis dibagi 9.

Bukti.

(i) Untuk $n=1$, $1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=36$, habis dibagi 9. Jadi, pernyataan benar untuk $n=1$.

(ii) Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ habis dibagi 9. Selanjutnya, karena

$$(n+1)^3+((n+1)+1)^3+((n+1)+2)^3=(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$$

$$=(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27$$

$$=\left\{n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right\}+9\left\{n^2+3n+3\right\}$$

dengan $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dan $9\left\{n^2+3n+3\right\}$ masing-masing habis dibagi 9, maka $(n+1)^3+((n+1)+1)^3+((n+1)+2)^3$ habis dibagi 9.

Jadi, menurut Teorema 1.8.3 pernyataan terbukti. █

c. Tunjukkan bahwa $2^n < n!$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Bukti.

(i) Untuk $n = 4$,

- $2^n = 2^4 = 16$, dan
- $n! = 4! = 24$.

Dengan demikian terbukti $2^n < n!$ benar untuk $n = 4$.

(ii) Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, yaitu $2^n < n!$, maka

$$2^{n+1} = 2.2^n < 2.n! < (n+1).n! = (n+1)!$$

Ini berarti pernyataan benar untuk $n+1$.

Berdasarkan (i) dan (ii), maka pernyataan terbukti menurut Teorema 1.8.4. $\blacksquare$

d. Tunjukkan bahwa $(n+1)^n < 3 \cdot n^n$ untuk setiap bilangan asli n.

Bukti.

Perhatikan bahwa

$$(n+1)^n < 3 \cdot n^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (1.10b)$$

Mengingat hal itu, pernyataan akan dibuktikan melalui ketaksamaan di ruas kanan pada (1.10b).

(i) Untuk $n = 1$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 3$. Jadi, pernyataan benar untuk $n = 1$.

(ii) Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, yaitu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, maka

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \cdot 3 = 3.$$

Ini berarti pernyataan benar untuk $n+1$.

Berdasarkan (i) dan (ii), maka pernyataan terbukti menurut Teorema 1.8.3. $\blacksquare$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

   a. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$.

   b. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

   c. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

2) Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ habis dibagi 3.
3) Tunjukkan bahwa $n^2 < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 5$.
4) Tunjukkan bahwa $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 5$.
5) Tunjukkan bahwa $2^n n! < n^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 6$.
6) Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dalam hal ini, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
7) Tunjukkan $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{2n-1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
8) Diketahui $S \subseteq \mathbb{N}$ sehingga memenuhi: (i) $2^n \in S$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, (ii) jika $n \in S$ dan $n \geq 2$, berakibat $n - 1 \in S$. Tunjukkan $S = \mathbb{N}$.
9) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan $x_1 = 1,\ x_2 = 2$, dan

   $x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan $1 \leq x_n \leq 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

10) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Tunjukkan $x_n < 3$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. Untuk $n = 1$, benar bahwa $2^1 = 2^{1+1} - 2$.

Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$,

maka untuk $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2,$$

yang artinya pernyataan benar untuk $n+1$. Jadi, terbukti $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

b. Untuk $n = 1$, pernyataan benar, karena $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$.

Dimisalkan pernyataan benar untuk *n*, yaitu $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

maka untuk $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (1 + (n+1)) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

yaitu pernyataan benar untuk $n+1$. Jadi, terbukti $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

c. Untuk $n = 1$, ruas kiri $= 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 =$ ruas kanan. Jadi pernyataan benar untuk $n = 1$.

Diandaikan pernyataan benar untuk n, artinya $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$,

maka untuk $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2\cdot(n+1)-1=n^2+2n+1=(n+1)^n$$

Terbukti pernyataan benar untuk $n+1$. Jadi, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

2) Untuk $n=1$, pernyataan benar, karena $4^1-1=3$ habis dibagi 3.

Diandaikan 4^n-1 habis dibagi 3, maka

$$4^{n+1}-1=(4\cdot4^n-4^n)+(4^n-1)=3\cdot4^n+(4^n-1)$$

habis dibagi 3. Jadi, pernyataan benar untuk $n+1$.

Dengan demikian terbukti bahwa 4^n-1 habis dibagi 3 untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

3) Untuk $n=5$, $5^2=25<2^5$. Jadi, pernyataan benar untuk $n=5$.

Diandaikan pernyataan benar untuk $n>5$, artinya $n^2<2^n$, maka untuk $n+1$,

$$(n+1)^2=n^2+2\cdot n+1<2^n+2\cdot n+1<2^n+2^n=2^{n+1}$$

Jadi, $2^n<n!$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ dengan $n\geq 5$.

4) Untuk $n=5$, pernyataan benar, karena $2\cdot5-3=7<2^{5-2}$.

Diandaikan pernyataan benar untuk $n>5$, artinya $2\cdot n-3\leq 2^{n-2}$, maka untuk $n+1$,

$$2\cdot(n+1)-3=2\cdot n-3+2\leq 2^{n-2}+2^{n-2}=2^{n-1}$$

Jadi, $2\cdot n-3\leq 2^{n-2}$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ dengan $n\geq 5$.

5) Untuk $n=6$, diperoleh

$$\frac{2^6 6!}{6^6} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.3.3.3.3.3} = \frac{2.5.4.2}{3.3.3.3} < 1 \Rightarrow 2^6 6! < 6^6 .$$

Ini berarti pernyataan benar untuk $n=6$.

Jika pernyataan benar untuk n, yaitu $2^n n! < n^n$, maka

$$2^{n+1}(n+1)! = 2^n n! 2(n+1) < n^n 2(n+1) < (n+1)^n (n+1) = (n+1)^{n+1},$$

yang artinya pernyataan benar untuk $n+1$.

6) Untuk $n=1$,

$$\text{ruas kiri} = a+b = \text{ruas kanan} .$$

Jadi, pernyataan benar untuk $n=1$.
Dimisalkan pernyataan benar untuk n, artinya

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ,$$

maka

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Jika pada suku ke-2 di ruas kanan baris terakhir persamaan di atas dikenakan substitusi $j = k-1$, maka diperoleh

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} a^{n-j} b^{j+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right\} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

Sekali lagi, suku ke-2 di ruas kanan baris terakhir pada persamaan di atas dikenakan substitusi $j = k+1$, maka diperoleh

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j-1} a^{n-j+1} b^{j} + b^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^{j},$$

yang berarti pernyataan benar untuk $n+1$.

7) Pernyataan benar untuk $n=1$, sebab $\frac{1}{1!} = 1 = \frac{2-1}{1}$. Dimisalkan pernyataan benar untuk n, artinya

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le \frac{2n-1}{n},$$

maka

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{2n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{2n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{(2n-1)(n+1)+1}{(n+1)n} = \frac{2n^2+n}{(n+1)n} = \frac{2(n+1)-1}{n+1},$$

yaitu pernyataan benar untuk $n+1$.

8) Menurut (i), $2 = 2^1 \in S$. Akibatnya, menurut (ii), $1 = 2 - 1 \in S$. Selanjutnya, diandaikan $n \in S$. Karena $n \in S \subset \mathbb{N}$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$, sehingga $n < 2^N < 2^{N+k}$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Menurut (i), $2^{N+k} \in S$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Menurut (ii), $2^{N+k} - 1 \in S$. Dengan menerapkan (ii) secara iteratif, diperoleh $n + 1 = 2^{N+k} - j \in S$ untuk suatu $j \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti $S = \mathbb{N}$.

9) Dari yang diketahui, jelas $1 \le x_1 \le 2$ dan $1 \le x_2 \le 2$. Selanjutnya, karena

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + x_1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 1\right) = \frac{3}{2}$$

maka $1 \le x_3 \le 2$. Diandaikan $1 \le x_n \le 2$ untuk $n \ge 4$. Diperhatikan bahwa untuk $n + 1$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + x_{n-1}\right)$$

Oleh karena itu,

$$x_{n+1} \ge \frac{1}{2} \cdot \left(1 + 1\right) = 1 \quad \text{dan} \quad x_{n+1} \le \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 2\right) = 2$$

yang artinya $1 \le x_{n+1} \le 2$.

10) Untuk $n = 1$, $x_1 = \left(1 + 1\right)^1 = 2 < 3$. Jadi, pernyataan benar untuk $n = 1$. Diandaikan pernyataan benar untuk n, akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n + 1$. Terlebih dahulu dibuktikan apabila $x < 1/n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $x \le 0$. Diandaikan $x > 0$, maka $1/x > 0$. Akibatnya, ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga $1/x < N$, atau $x > 1/N$. Hal ini bertentangan dengan hipotesis. Jadi, $x \le 0$. Pernyataan benar untuk n, artinya $x_n < 3$.

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \qquad , \\
&< \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) < 3\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 3
\end{aligned}
$$

yang berarti pernyataan benar untuk $n+1$.

RANGKUMAN

Suatu poset P dikatakan terurut dengan baik (*well ordered*) jika setiap himpunan bagian tak kosong di dalam P mempunyai elemen terkecil.

Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan yang terurut dengan baik terhadap relasi $\le$. Oleh karena itu, setiap himpunan bagian tak kosong di dalam $\mathbb{N}$ mempunyai elemen terkecil.

Prinsip Induksi Matematika I:

Diberikan sebarang himpunan bagian $S \subset \mathbb{N}$. Jika dipenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $1 \in S$, dan

(ii) Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, jika $n \in S$, berakibat $n+1 \in S$,

maka $S = \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematika II:

Misalkan $P(n)$ menyatakan sifat yang berlaku untuk sebarang bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ yang diberikan. Jika

(i) $P(1)$ benar, dan

(ii) diandaikan $P(n)$ benar, berakibat $P(n+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematika III:

Misalkan $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ menyatakan sifat yang berlaku untuk sebarang bilangan asli $n \geq n_0$. Jika

(i) $P(n_0)$ benar, dan

(ii) untuk $n \geq n_0$, kebenaran $P(n)$ berakibat $P(n+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

TES FORMATIF 2

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat dan detail!

1) Tunjukkan

a. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

b. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

c. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

2) Tunjukkan $3^n \cdot n! > n^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

3) Untuk semua $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan

a. $(11)^n - 4^n$ habis dibagi 7.

b. $7^n - 6 \cdot n - 1$ habis dibagi 36.

4) Tebaklah rumus untuk $1 + 3 + ... + (2 \cdot n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$ dengan cara menghitungnya untuk $n = 1,\ 2,\ 3,$ dan 4. Buktikan jawaban Saudara.

5) Tentukan bilangan asli terbesar *m* sehingga $n^3 - n$ habis dibagi *m* untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jelaskan jawaban Saudara.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Himpunan Terhitung dan Himpunan Tak Terhitung

Pengertian himpunan berhingga, yaitu himpunan yang mempunyai cacah elemen sebanyak berhingga, secara intuitif didefinisikan berdasarkan proses menghitung. Pada kegiatan belajar ini, akan diberikan pengertian himpunan berhingga secara lebih presisi. Selanjutnya, pengertian tersebut akan diperluas untuk sebarang himpunan.

1.9 HIMPUNAN BERHINGGA DAN HIMPUNAN TAK HINGGA

Ketika seseorang menghitung cacah elemen di dalam suatu himpunan, maka orang tersebut akan melakukannya dengan mengucapkan "satu, dua, tiga, …". Hal itu berarti, orang tersebut sedang berusaha memasangkan himpunan tersebut dengan suatu himpunan bagian di dalam himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$, dengan menggunakan fungsi bijektif atau korespondensi $1-1$. Apabila proses penghitungan berhenti pada suatu bilangan asli n, maka cacah elemen dalam himpunan tersebut n dan himpunannya dikatakan berhingga (*finite*). Himpunan yang tidak berhingga disebut himpunan tak hingga.

Berikut diberikan definisi formal himpunan berhingga dan himpunan tak hingga.

Definisi 1.9.1

Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

(i) Himpunan A dikatakan mempunyai n elemen jika A berkorespondensi 1-1 dengan I_n.

(ii) Himpunan A disebut himpunan berhingga, jika $A = \phi$ atau A mempunyai n elemen.

(iii) Himpunan A disebut himpunan tak hingga, jika A bukan himpunan berhingga.

Diberikan himpunan A yang mempunyai elemen sebanyak n. Menurut Definisi 1.9.1 (i), terdapat korespondensi 1-1 $f : I_n \to A$. Ini berarti bahwa untuk setiap $k \in I_n$ terdapat tepat satu $a_k \in A$ sehingga $f(k) = a_k$. Demikian pula sebaliknya, untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat satu $k \in I_n$ sehingga $f(k) = a$. Dengan demikian, himpunan A dapat dituliskan sebagai berikut

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}.$$

Selanjutnya, dapat ditunjukkan teorema berikut.

Teorema 1.9.2

Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan tak hingga.

Bukti.

Diandaikan $\mathbb{N}$ himpunan berhingga. Karena $\mathbb{N} \neq \emptyset$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\mathbb{N}$ berkorespondensi 1-1 dengan I_n. Oleh karena itu, $\mathbb{N}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbb{N} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}. \tag{1.11}$$

dengan $x_i \neq x_j$ untuk semua $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$. Di lain pihak $x_n + 1 \in \mathbb{N}$, dengan $x_n + 1 \neq x_i$ untuk semua $i = 1, 2, ..., n$. Hal ini kontradiksi dengan (1.11). ■

Beberapa sifat dasar himpunan berhingga dan himpunan tak hingga diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.9.3

Jika A himpunan berhingga dan $B \subset A$, maka B himpunan berhingga.

Bukti.

Ada 2 kemungkinan, yaitu $B = \emptyset$ atau $B \neq \emptyset$.

Jika $B = \emptyset$, bukti selesai. Jika $B \neq \emptyset$, maka A mempunyai n elemen, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Artinya, ada korespondensi 1-1 $f : I_n \to A$. Menurut Teorema 1.5.2, invers f merupakan korespondensi 1-1 dari A ke I_n. Jadi,

$f^{-1}: A \to I_n$ merupakan korespondensi 1-1. Didefinisikan fungsi $g: B \to I_n$ dengan

$$g(x) = f^{-1}(x), \text{ untuk semua } x \in B$$

Karena $f^{-1}: A \to I_n$ fungsi injektif, maka $g: B \to I_n$ juga fungsi injektif. Artinya, ada bilangan asli $m \leq n$ sehingga $g(B) = I_m$. Akibatnya, $g: B \to I_m$ merupakan korespondensi 1-1, yang berarti cacah anggota *B* sebanyak *m*. Karena $B = \varnothing$ atau *B* mempunyai sebanyak *m* anggota, maka *B* merupakan himpunan berhingga. ∎

Berdasarkan Teorema 1.9.3 dan menggunakan hukum kontraposisi, maka diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 1.9.4
Jika *A* himpunan tak hingga dan $B \supseteq A$, maka *B* himpunan tak hingga.

Teorema 1.9.5
Diberikan himpunan *A* dan *B*.
(i) Jika *A* mempunyai *m* elemen, *B* mempunyai *n* elemen, dan $A \cap B = \varnothing$, maka $A \cup B$ mem-punyai $m + n$ elemen.
(ii) Jika *A* mempunyai *m* elemen dan $B \subset A$ mempunyai 1 elemen, maka $A - B$ mempunyai $m - 1$ elemen.
(iii) Jika *A* himpunan tak hingga dan *B* himpunan berhingga, maka $A - B$ himpunan tak hingga.

Bukti.
(i) Karena *A* mempunyai *m* elemen dan *B* mempunyai *n* elemen, maka ada korespondensi 1-1 $f: I_m \to A$ dan $g: I_n \to B$. Dibentuk fungsi $h: I_{m+n} \to A \cup B$, dengan

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & , \ i = 1, 2, \ldots, m \\ \\ g(i-m) & , \ i = m+1, m+2, \ldots, m+n \end{cases}$$

Akan ditunjukkan h merupakan korespondensi 1-1. Diambil sebarang $i, j \in I_{m+n}$, dengan $i \neq j$. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $i < j$. Ada 3 kemungkinan yang dapat terjadi, yaitu $i < j \leq m$, $i \leq m < j$, dan $m+1 \leq i < j$.

- Jika $i < j \leq m$, karena f fungsi injektif, maka
  $h(i) = f(i) \neq f(j) = h(j)$.
- Jika $i \leq m < j$, karena $A \cap B = \varnothing$, maka $h(i) = f(i) \neq g(j) = h(j)$.
- Jika $m+1 \leq i < j$, karena g fungsi injektif, maka
  $h(i) = g(i) \neq g(j) = h(j)$.

Jadi, h merupakan fungsi injektif. Selanjutnya, akan ditunjukkan h merupakan fungsi surjektif. Untuk itu diambil sebarang $a \in A \cup B$, maka $a \in A$ atau $a \in B$. Jika $a \in A$, maka terdapat $i \in I_m$ sehingga $a = f(i) = h(\text{i})$. Dan jika $a \in B$, maka terdapat $j \in I_n$ sehingga $a = g(j) = h(m+j)$. Terbukti h merupakan fungsi surjektif. Karena h merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif, h merupakan korespondensi $1-1$. Dengan demikian terbukti $A \cup B$ mempunyai $m+n$ elemen.

(ii) Jika $m = 1$, maka $B = A$. Akibatnya, $A - B = \varnothing$. Ini berarti $A - B$ mempunyai $0 = m - 1$ elemen.
Jika $m > 1$, maka $A - B \neq \varnothing$. Karena $A - B \subset A$ dan A merupakan himpunan berhingga, maka $A - B$ merupakan himpunan berhingga. Dimisalkan $A - B$ mempunyai n elemen. Karena $(A - B) \cap B = \varnothing$ dan $(A - B) \cup B = A$, maka menurut (i) banyaknya elemen A sama dengan banyaknya elemen $A - B$ ditambah banyaknya elemen B. Jadi,

$$m = n + 1 \Leftrightarrow n = m - 1$$

Dengan demikian terbukti $A - B$ mempunyai $m - 1$ elemen.

(iii) Diketahui A himpunan tak hingga dan B himpunan berhingga, maka $A - B \neq \varnothing$. Karena B himpunan berhingga, maka ada 2 kemungkinan, yaitu $B = \varnothing$ atau B mempunyai n elemen untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Jika $B = \varnothing$, maka $A - B = A$ merupakan himpunan tak hingga. Jika B mempunyai n elemen, dengan mengandaikan $A - B$ mempunyai m elemen dan dengan mengingat $(A - B) \cap B = \varnothing$ dan $(A - B) \cup B = A$, maka menurut (i) himpunan A mempunyai $m+n$ anggota. Hal ini berarti A merupakan himpunan berhingga, kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, $A-B$ himpunan tak hingga. █

1.10 HIMPUNAN TERHITUNG DAN HIMPUNAN TAK TERHITUNG

Setelah mengenal himpunan berhingga dan himpunan tak hingga, pada bagian ini akan dibicarakan himpunan terhitung dan himpunan tak terhitung.

Definisi 1.10.1

(i) Himpunan A dikatakan denumerabel (terhitung tak hingga), jika A berkorespondensi 1-1 dengan $\mathbb{N}$ atau dengan kata lain ada fungsi bijektif $f:\mathbb{N}\rightarrow A$. Dalam hal ini, pemasangan anggota $\mathbb{N}$ dengan anggota A dengan menggunakan fungsi bijektif disebut enumerasi pada A.

(ii) Himpunan A dikatakan terhitung (*countable*), jika A berhingga atau denumerabel.

Contoh 1.10.2

Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ denumerabel.

Bukti.

Dibentuk fungsi $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$, dengan

$$f(n)=\begin{cases} 0 & , \ n=1 \\ k & , \ n=2k \\ -k & , \ n=2k+1 \end{cases} \quad , \ k\in\mathbb{N}\ .$$

Diambil sebarang $m,n\in\mathbb{N}$ dengan $m\neq n$. Jika $m=1$, maka $n\neq 1$. Diperoleh $f(m)=0$ dan $f(n)\neq 0$, sehingga $f(m)\neq f(n)$. Jika $m,n\neq 1$ dan $m=2k$ untuk suatu $k\in\mathbb{N}$, maka $n=2l$ untuk suatu $l\in\mathbb{N}-\{k\}$ atau $n=2p+1$ untuk suatu $p\in\mathbb{N}$. Akibatnya, $f(m)=k$, sedangkan $f(n)=l$ atau $f(n)=-p$. Karena $k\neq l$ dan $k\neq -p$, maka $f(m)\neq f(n)$. Dengan demikian, f merupakan fungsi injektif.

Akan ditunjukkan f merupakan fungsi surjektif. Untuk itu diambil sebarang $m\in\mathbb{Z}$, maka $m=0$, $m\in\mathbb{N}$, atau $-m\in\mathbb{N}$. Jika $m=0$, diambil $1\in\mathbb{N}$, maka $f(1)=0=m$. Jika $m\in\mathbb{N}$, diambil $n=2m\in\mathbb{N}$, maka

$f(n) = m$. Jika $-m \in \mathbb{N}$, diambil $n = 2(-m)+1 \in \mathbb{N}$, maka $f(n) = m$. Dengan demikian, terbukti *f* merupakan fungsi surjektif.

Karena *f* merupakan fungsi injektif dan surjektif, maka *f* merupakan fungsi bijektif atau korespondensi 1-1. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ denumerabel. ■

Contoh 1.10.3

Himpunan $[0,1]$ tidak terhitung.

Bukti.

Diandaikan $[0,1]$ terhitung, maka $[0,1]$ berhingga atau denumerable. Jika $[0,1]$ berhingga, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $[0,1]$ mempunyai n anggota. Misalkan

$$[0,1] = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

dengan $0 = x_1 < x_2 < ... < x_n = 1$. Didefinisikan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

maka $0 < x < \frac{1+1}{2} = 1$. Ini berarti $x \in [0,1]$. Tetapi di lain pihak, karena $x \neq x_k$ untuk semua $k \in \{1,2,...,n\}$, maka $x \notin [0,1]$. Terjadi kontradiksi.

Jika $[0,1]$ denumerable, maka ada korespondensi 1-1 dari $\mathbb{N}$ ke $[0,1]$. Artinya, ada enumerasi pada $[0,1]$, misalkan enumerasi tersebut adalah

$$[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}.$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, x_n dapat dinyatakan dalam sistem biner, yaitu

$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}\cdots,$$

dengan $a_{nj} = 0$ atau 1 untuk setiap $j \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, diambil

$$x = 0, a_1a_2a_3...a_n\cdots,$$

dengan $a_n = 0$ atau 1 dan $a_n \neq a_{nn}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $a_n = 0$ atau 1 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $x \in [0,1]$. Di lain pihak, karena $a_n \neq a_{nn}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $x \neq x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti $x \notin [0,1]$. Terjadi kontradiksi dengan pernyataan sebelumnya.

Berdasarkan bukti-bukti di atas, terbukti bahwa $[0,1]$ tidak berhingga dan tidak denumerabel. Artinya $[0,1]$ tidak terhitung. ∎

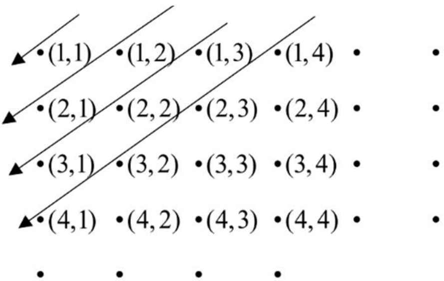
Teorema 1.10.4

Himpunan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denumerabel.

Bukti.

Dibuat enumerasi pada $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{N}\}$ sehingga m dan $m+n$ keduanya tidak turun, yaitu sebagai berikut:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),...$$



Gambar 1.5
Enumerasi pada $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Untuk mendapatkan enumerasi sebagaimana disebutkan di atas, didefinisikan fungsi $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dengan

$$f(m,n) = m + \big(1+2+3+...+(m+n-2)\big).$$

Diambil sebarang $(m,n),(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dengan $(m,n) \neq (k,l)$, maka $m \neq k$ atau $m+n \neq k+l$. Baik $m \neq k$ maupun $m+n \neq k+l$, keduanya berakibat $f(m,n) \neq f(k,l)$. Artinya f injektif. Selanjutnya, diambil sebarang $p \in \mathbb{N}$. Jika $p = 1$, diambil $m = n = 1$, maka

$$f(m,n) = f(1,1) = 1 + 0 = p .$$

Jika $p \geq 2$, didefinisikan

$$E_p = \{k \in \mathbb{N} : 1+2+...+k \geq p\}.$$

Karena $1+2+...+p > p$, maka $p \in E_p$. Artinya $E_p \neq \phi$. Menurut Teorema 1.8.1, E_p mempunyai elemen terkecil. Dimisalkan elemen terkecil tersebut k_p, maka

$$1+2+...+(k_p - 1) < p \leq 1+2+...+k_p. \qquad (1.12)$$

Jika diambil $m_p = p-(1+2+...+(k_p-1))$, maka berdasarkan (1.12),

$$1 \leq m_p \leq k_p.$$

Diambil $n_p = k_p - m_p + 1$, maka $n_p \geq 1$ dan $m_p + n_p - 2 = k_p - 1$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} f(m_p, n_p) &= m_p + \Big(1+2+3+...+(m_p+n_p-2)\Big) \\ &= m_p + \Big(1+2+3+...+(k_p-1)\Big) = p. \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti *f* surjektif. Karena *f* injektif dan surjektif, maka *f* bijektif. Jadi, terbukti $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denumerabel. ■

Sifat-sifat berikut menggambarkan keterhitungan suatu himpunan.

Teorema 1.10.5

Diberikan himpunan-himpunan A dan B, dengan $A \subseteq B$.

(i) Jika B terhitung, maka A terhitung.

(ii) Jika A tak terhitung, maka B tak terhitung.

Bukti.

(i) Jika A berhingga, maka pernyataan terbukti. Jika A tak hingga, maka menurut Akibat 1.9.4, B tak hingga. Karena B terhitung dan tak hingga, maka B denumerabel. Artinya, ada enumerasi pada B. Misalkan enumerasi pada B adalah

$$B = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}.$$

Selanjutnya, karena $A \subseteq B$ dan A tak hingga, maka ada himpunan bilangan-bilangan asli $\{n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...\} \subseteq \mathbb{N}$, sehingga

$$A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, ...\}.$$

Jadi, ada enumerasi pada *A*, atau dengan kata lain *A* denumerabel.

(ii) Dengan memperhatikan kontraposisi pernyataan (i), maka pernyataan terbukti. ■

Teorema 1.10.6

Diberikan himpunan tak kosong A. Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen.

(i) Himpunan A terhitung.

(ii) Terdapat fungsi surjektif $f : \mathbb{N} \to A$.

(iii) Terdapat fungsi injektif $g : A \to \mathbb{N}$.

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Diketahui A terhitung. Karena A tidak kosong, maka A mempunyai n anggota untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ atau A denumerabel. Jika A mempunyai n anggota untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka ada fungsi bijektif $h : I_n \to A$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{N} \to A$, dengan

$$f(k) = \begin{cases} h(k), & k \in I_n \\ \\ h(n), & k > n \end{cases}.$$

Diambil sebarang $a \in A$. Karena $h : I_n \to A$ bijektif, maka ada $k \in I_n \subset \mathbb{N}$ sehingga $f(k) = h(k) = a.$ Ini berarti bahwa $f : \mathbb{N} \to A$ surjektif.

(ii) $\Rightarrow$(iii) Diketahui ada fungsi surjektif $f : \mathbb{N} \to A$. Karena $f : \mathbb{N} \to A$ surjektif, maka untuk sebarang $a \in A$, himpunan

$$f^{-1}(a) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}$$

tidak kosong. Akibatnya, menurut Teorema 1.8.1, $f^{-1}(a)$ mempunyai elemen terkecil.

Didefinisikan fungsi $g : A \to \mathbb{N}$, dengan rumus

$$g(a) = n_a$$

dengan n_a elemen terkecil di dalam $f^{-1}(a)$. Akan ditunjukkan g fungsi injektif. Diambil sebarang $a, b \in A$ dengan $a \neq b$. Diandaikan $g(a) = g(b)$, maka $n_a = n_b$. Akibatnya,

$$a = f(n_a) = f(n_b) = b,$$

kontradiksi dengan $a \neq b$. Jadi, $g(a) \neq g(b)$, atau dengan kata lain g fungsi injektif.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Diketahui ada fungsi injektif $g : A \to \mathbb{N}$, maka $g : A \to g(A)$ merupakan fungsi bijektif. Karena $g(A) \subseteq \mathbb{N}$, maka menurut Teorema 1.10.5 (i), $g(A)$ terhitung. Akibatnya, A terhitung. ■

Teorema 1.10.7

Himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ denumerabel.

Bukti.

Dimisalkan $\mathbb{Q}^+$ dan $\mathbb{Q}^-$ masing-masing melambangkan himpunan semua bilangan rasional positif dan himpunan semua bilangan rasional negatif, yaitu

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{dan} \quad \mathbb{Q}^- = \left\{ -\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Akan ditunjukkan $\mathbb{Q}^+$ dan $\mathbb{Q}^-$ masing-masing terhitung,

Telah dibuktikan pada Teorema 1.10.4 bahwa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denumerabel, sehingga menurut Definisi 1.10.1 (ii), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ terhitung. Akibatnya, menurut Teorema 1.10.6 terdapat pemetaan surjektif $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Selanjutnya, didefinisikan pemetaan $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ dengan

$$g(m, n) = \frac{m}{n},$$

maka g surjektif (Mengapa?). Karena $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dan $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ masing-masing surjektif, maka $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ merupakan pemetaan surjektif. Akibatnya, menurut Teorema 1.10.6 $\mathbb{Q}^+$ terhitung.

Analog dengan langkah pembuktian di atas, didefinisikan pemetaan $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$ dengan

$$h(m,n) = -\frac{m}{n},$$

maka h surjektif. Karena $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dan $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$ masing-masing surjektif, maka $h \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$ merupakan pemetaan surjektif. Akibatnya, menurut Teorema 1.10.6, $\mathbb{Q}^-$ terhitung.

Selanjutnya, karena $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, maka $\mathbb{Q}$ terhitung. Karena $\mathbb{Q}$ memuat $\mathbb{N}$, maka $\mathbb{Q}$ denumerabel. ∎

Sifat berikut menyatakan bahwa gabungan sebanyak terhitung himpunan-himpunan terhitung adalah terhitung.

Teorema 1.10.8

Jika A_n terhitung untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ terhitung.

Bukti.

Karena A_n terhitung untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka menurut Teorema 1.10.6 ada pemetaan surjektif $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan pemetaan $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ dengan

$$f(n,m) = f_n(m), \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Akan ditunjukkan, pemetaan f surjektif. Untuk itu, diambil sebarang $a \in A$, maka ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $a \in A_n$. Karena $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ surjektif, maka ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $f_n(m) = a$. Akibatnya,

$$f(n,m) = a.$$

Dengan demikian terbukti bahwa f surjektif.

Selanjutnya, karena $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ terhitung, maka menurut Teorema 1.10.6 ada pemetaan surjektif $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Akibatnya, pemetaan $f \circ g : \mathbb{N} \to A$ surjektif. Berdasarkan Teorema 1.10.6, A terhitung. ∎

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan himpunan $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ denumerabel.
2) Jika A_i himpunan berhingga untuk semua $i \in \mathbb{N}$, selidiki apakah $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ juga berhingga. Jelaskan jawaban Saudara.
3) Tunjukkan himpunan $A = \{(x_1, x_2, x_3, ...) : x_i = 0 \text{ atau } 1,\ i \in \mathbb{N}\}$ tidak terhitung.
4) Jika himpunan A dan B masing-masing mempunyai m dan n elemen, tunjukkan $A \cup B$ mempunyai paling banyak $m + n$ elemen.
5) Jika $F = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ himpunan berhingga}\}$, tunjukkan F merupakan himpunan tak hingga.
6) Tunjukkan himpunan $D = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 20\}$ denumerabel.
7) Tunjukkan himpunan $A = \mathbb{N} - \{3, 5\}$ denumerabel.
8) Jika D denumerabel dan $x \notin D$, tunjukkan $F = D \cup \{x\}$ denumerabel.
9) Jika A tidak terhitung dan $B \subset A$ terhitung, tunjukkan $A - B$ tidak terhitung.
10) Diketahui himpunan A dan B masing-masing mempunyai m dan n elemen. Jika B himpunan bagian sejati di dalam A, tunjukkan $n < m$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Dibentuk fungsi $f : \mathbb{N} \to D$ dengan rumus
$$f(n) = n - 2,$$
maka *f* fungsi bijektif. Jadi, D denumerabel.
2) Belum tentu. Perhatikan himpunan $A_i = \{i\}$, $i \in \mathbb{N}$, maka A_i merupakan himpunan berhingga untuk semua $i \in \mathbb{N}$. Tetapi, karena $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$, maka A bukan himpunan berhingga.

3) Jelas bahwa A himpunan tak hingga. Diandaikan A terhitung, maka A denumerabel. Artinya, ada enumerasi pada A, atau dengan kata lain A dapat dinyatakan sebagai
$$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\},$$
dengan $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, ...)$, $x_{ik} = 0$ atau 1, untuk semua $i, k \in \mathbb{N}$. Didefinisikan
$$a = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...),$$
dengan $a_{ii} = 0$ atau 1, dan $a_{ii} \neq x_{ii}$ untuk semua $i \in \mathbb{N}$. Dari definisi, diperoleh $a \in A$. Tetapi, karena $a \neq a_i$ untuk semua $i \in \mathbb{N}$, maka $a \notin A$. Terjadi kontradiksi. Jadi, A tidak terhitung.
4) Jika $A \cap B = \varnothing$, maka menurut Teorema 1.9.5, $A \cup B$ mempunyai $m + n$ elemen. Jika $A \cap B \neq \varnothing$, maka $A \cap B$ mempunyai elemen sebanyak p, dengan $p \leq m$ dan $p \leq n$. Karena $(A - B) \cap B = \varnothing$, maka menurut Teorema 1.9.5, $A - B$ mempunyai anggota sebanyak $m - p$ elemen. Selanjutnya, karena $A \cup B = (A - B) \cup B$ dengan $(A - B) \cap B = \varnothing$, maka menurut Teorema 1.9.5, $A \cup B$ mempunyai anggota sebanyak $m - p + n$ elemen, kurang dari $m + n$ elemen. Jadi, terbukti $A \cup B$ mempunyai paling banyak $m + n$ elemen.
5) Diandaikan F merupakan himpunan berhingga, maka $F = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Untuk setiap $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$, A_j merupakan himpunan berhingga, misalkan memuat n_j elemen. Menurut soal nomor 1, $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ memuat paling banyak $\sum_{j=1}^{k} n_j$ elemen, yang berarti $\mathbb{N}$ merupakan himpunan berhingga. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\mathbb{N}$ himpunan tak hingga.
6) Dibentuk fungsi $f : \mathbb{N} \to D$, dengan $f(n) = n + 19$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka f fungsi bijektif. Jadi, D denumerabel.
7) Dibentuk fungsi $f : \mathbb{N} \to A$, dengan
$$f(1) = 1,\ f(2n) = 2n,\ f(2n+1) = 2n + 5$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka f fungsi bijektif. Jadi, A denumerabel.

8) Diketahui D denumerabel, maka D dapat dienumerasikan, misal dengan $D = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Dibentuk fungsi $f : \mathbb{N} \to F$, dengan

$$f(1) = x,\ f(n) = x_{n-1},\ n = 2, 3, 4, ...$$

maka f fungsi bijektif. Jadi, F denumerabel.

9) Diketahui $B \subset A$ terhitung, maka terdapat pemetaan surjektif $g : \mathbb{N} \to B$. Diandaikan $A - B$ terhitung, maka terdapat pemetaan surjektif $h : \mathbb{N} \to A - B$. Dibentuk pemetaan $f : \mathbb{N} \to A$ dengan rumus

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & ,\ h(x) \in A - B \\ \\ g(x) & ,\ g(x) \in B \end{cases}.$$

Dapat ditunjukkan f surjektif. Akibatnya, A terhitung. Kontradiksi dengan yang diketahui.

10) Karena $B \subset A$ himpunan bagian sejati di dalam A, maka $A - B$ mempunyai p elemen dengan $p < m$. Karena $A \cup B = (A - B) \cup B$ dengan $(A - B) \cap B = \varnothing$, maka menurut Teorema 1.9.5, $m = p + n$. Jadi, $n < m$.

RANGKUMAN

Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

- Himpunan A dikatakan mempunyai n elemen jika A berkorespondensi 1-1 dengan I_n.
- Himpunan A disebut himpunan berhingga, jika $A = \phi$ atau A mempunyai n elemen.
- Himpunan A disebut himpunan tak hingga, jika A bukan himpunan berhingga.
- Himpunan A dikatakan denumerabel (terhitung tak hingga), jika A berkorespondensi 1-1 dengan $\mathbb{N}$ atau dengan kata lain ada fungsi bijektif $f : \mathbb{N} \to A$. Dalam hal ini, pemasangan anggota $\mathbb{N}$ dengan anggota A dengan menggunakan fungsi bijektif disebut enumerasi pada A.

- Himpunan A dikatakan terhitung (*countable*), jika A berhingga atau denumerabel.

Untuk sebarang himpunan tak kosong A, ketiga pernyataan berikut ekuivalen:
(i) Himpunan A terhitung.
(ii) Terdapat fungsi surjektif $f : \mathbb{N} \to A$.
(iii) Terdapat fungsi injektif $g : A \to \mathbb{N}$.

Jika A_n terhitung untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ terhitung.

TES FORMATIF 3

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat dan detail!

1) Diberikan himpunan $A = \{a, b\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 3\}$. Ada berapa banyak fungsi injektif dari A ke B? Sebutkan!
2) Diberikan $A = \{15, 17, 19, 21, ...\}$. Buatlah contoh fungsi bijektif $f : \mathbb{N} \to A$.
3) Jika $A \cap B$ himpunan tak hingga, tunjukkan A himpunan tak hingga.
4) Jika A terhitung dan B denumerabel, apakah $B - A$ demumerabel? Jelaskan jawaban Saudara.
5) Jika A denumerabel dan $B \subset A$ himpunan tak hingga, tunjukkan B denumerabel.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) $(A-B)\cap(B-A) = A\cap(B^C\cap B)\cap A^C = A\cap\varnothing\cap A^C = \varnothing$.

2) $(A\cup B)\cap C^C = (A\cap C^C)\cup(B\cap C^C) = (A-C)\cup(B-C)$.

3) a. $x\in f^{-1}(A\cup B) \Leftrightarrow f(x)\in A\cup B \Leftrightarrow f(x)\in A$ atau $f(x)\in A$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$ atau $x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

b. $x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A) \Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$.

4) Diberikan $S=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$.
Fungsi $f:S\to B$, didefinisikan dengan
$f=\{(4,a),(1,a),(2,b),(3,b)\}$, maka

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B) = S \neq A .$$

5) Diambil sebarang $m,n\in\mathbb{N}$ dengan $m\neq n$. Ada 4 kemungkinan: (i) *m* ganjil, *n* genap, (ii) *m* genap, *n* ganjil, (iii) *m*, *n* genap, atau (iv) *m*, *n* ganjil. Untuk masing-masing kejadian berakibat $f(m)\neq f(n)$. Jadi, *f* injektif.
Tidak ada bilangan asli genap *n* sehingga $f(n)=2$. Jadi, *f* tidak surjektif.

6) a. $D_f = \{x\in\mathbb{R} : x^2-1\geq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x\leq -1 \text{ atau } x\geq 1\}$.

b. Dengan mengingat jumlahan dua suku ada, jika masing-masing suku ada, maka diperoleh

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0 \text{ dan } 4-3x-x^2\geq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0 \text{ dan } -(x-1)(x+4)\geq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0 \text{ dan } (x-1)(x+4)\leq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0 \text{ dan } -4\leq x\leq 1\} \\ &= [-4,0)\cup(0,1]. \end{aligned}$$

7) Akan ditunjukkan $f(x) = y$ dengan y sebarang bilangan real yang tidak sama dengan 2. Diandaikan $y = 2$, maka

$$\frac{2x-1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1-2(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+1} = 0$$

Ini bertentangan dengan $\frac{-3}{x+1} \neq 0$. Akibatnya, tidak mungkin $y = 2$. Selanjutnya, diambil sebarang $y \neq 2$. Mengingat $x \neq -1$, maka

$$\frac{2x-1}{x+1} = y \Leftrightarrow 2x-1 = y(x+1) \Leftrightarrow (2-y)x = 1+y \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{2-y}$$

Karena $y \neq 2$, maka nilai x di atas ada dan $x \neq -1$. Ini berarti bahwa untuk setiap bilangan real $y \neq 2$, terdapat $x \neq -1$ sehingga $f(x) = y$. Jadi, $R_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.

8) Untuk $x > 0$, $f(x) = x + (1/x) > 0$. Untuk $x \leq 0$, $f(x) = x - 1 \leq -1$. Sebaliknya, dapat ditunjukkan bahwa untuk sebarang $y \in (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$ dapat ditemukan $x > 0$ atau $x \leq 0$ sehingga $f(x) = y$. Jadi, $f(\mathbb{R}) = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

9) Untuk $x \geq 0$, $f(x) = x \geq 0$, sehingga $g(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - x$.
Untuk $x < 0$, $f(x) = 3 + x < 3$. Ada 2 kemungkinan, yaitu $f(x) < 0$ atau $0 \leq f(x) < 3$.
Jika $f(x) < 0$, maka
- $3 + x < 0 \Leftrightarrow x < -3$, dan
- $g(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = \frac{(3+x)-1}{3+x} = \frac{2+x}{3+x}$.

Jika $0 \leq f(x) < 3$, maka
- $0 \leq 3 + x < 3 \Leftrightarrow -3 \leq x < 0$, dan
- $g(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - (3 + x) = -2 - x$.

Jadi,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 - x & , x \geq 0 \\ -2 - x & , -3 \leq x < 0 \\ (2+x)/(3+x) & , x < -3 \end{cases}$$

10) Untuk $x \geq 0$, (i) $y = f(x) = x^2 \geq 0$, (ii) $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$.

Untuk $x < 0$, (i) $y = f(x) = 3x < 0$, (ii) $y = 3x \Leftrightarrow x = y/3 = f^{-1}(y)$.

Jadi,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} \ , & y \geq 0 \\ \\ y/3 \ , & y < 0 \end{cases}$$

Tes Formatif 2

1) a. Untuk $n = 1$, benar bahwa $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$. Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)$$

maka

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) + (n+1)^2$$

$$= (n+1) \cdot \left\{ \frac{1}{6} \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) + (n+1) \right\}$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{n \cdot (2 \cdot n + 1) + 6 \cdot (n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)$$

yang artinya pernyataan benar untuk $n + 1$.

b. Untuk $n = 1$, berlaku $1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2$. Artinya, pernyataan benar untuk $n = 1$. Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

maka

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \cdot \left\{\frac{n^2}{4} + (n+1)\right\} = (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

yang artinya pernyataan benar untuk $n+1$.

c. Untuk $n=1$, kesamaan $\frac{1}{\sqrt{1-1}+\sqrt{1}} = \sqrt{1}$ benar. Artinya, pernyataan benar untuk $n=1$. Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n}$$

maka

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{n+1+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \sqrt{n+1}$$

yang artinya pernyataan benar untuk $n+1$.

2) Untuk $n=1$, benar bahwa $3^1 \cdot 1! > 1^1$. Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, artinya

$$3^n \cdot n! > n^n$$

maka dengan mengingat $(n+1)^n < 3 \cdot n^n$ (Lihat Contoh 1.8.5 d), untuk $n+1$ diperoleh

$$3^{n+1} \cdot (n+1)! = 3 \cdot (n+1) \cdot 3^n \cdot n! > 3 \cdot (n+1) \cdot n^n$$

$$> (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{n+1}$$

yaitu pernyataan benar $n+1$.

3) a. Untuk $n = 1$, benar bahwa $(11)^1 - 4^1 = 7$ habis dibagi 7.

Diandaikan pernyataan benar untuk *n*, maka $(11)^n - 4^n$ habis dibagi 7. Untuk $n+1$,

$$(11)^{n+1} - 4^{n+1} = (11)^{n+1} - (11) \cdot 4^n + (11) \cdot 4^n - 4^{n+1}$$

$$= (11) \cdot ((11)^n - 4^n) + (11 - 4) \cdot 4^n$$

Karena masing-masing suku di ruas paling kanan persamaan di atas habis dibagi 7, maka $(11)^{n+1} - 4^{n+1}$ habis dibagi 7.

b. Untuk $n = 1$, benar bahwa $7^1 - 6 \cdot 1 - 1 = 0$ habis dibagi 36. Diandaikan $7^n - 6 \cdot n - 1$ habis dibagi 36. Diperhatikan

$$7^{n+1} - 6 \cdot (n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n - 7 \cdot 6 \cdot n - 7 + 7 \cdot 6 \cdot n - 6 \cdot n$$

$$= 7 \cdot (7^n - 6 \cdot n - 1) + 36 \cdot n$$

Kedua suku di ruas paling kanan pada persamaan di atas habis dibagi 36. Oleh karena itu, $7^{n+1} - 6 \cdot (n+1) - 1$ habis dibagi 36. Jadi, pernyataan benar untuk $n+1$.

4) Untuk $n = 1$, 1=1. Untuk $n = 2$, $1 + 3 = 4$. Untuk $n = 3$, $1 + 3 + 5 = 9$. Untuk $n = 4$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Berdasarkan hasil-hasil perhitungan tersebut, diduga

$$1 + 3 + ... + (2 \cdot n - 1) = n^2 \text{, untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

Ditunjukkan dugaan tersebut benar. Dugaan jelas benar untuk $n = 1$. Diandaikan dugaan benar untuk *n*. Untuk $n+1$,

$$1 + 3 + ... + (2 \cdot n - 1) + (2 \cdot (n+1) - 1) = n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2,$$

yang artinya dugaan benar. Jadi, $1 + 3 + ... + (2 \cdot n - 1) = n^2$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

5) Untuk $n=1$, $n^3-n=0$. Untuk $n=2$, $n^3-n=6$. Untuk $n=3$, $n^3-n=24$. Dst. Akan ditunjukkan n^3-n habis dibagi 6 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Pernyataan jelas benar untuk $n=1$, karena $1^3-1=0$. Diandaikan pernyataan benar untuk *n*. Untuk $n+1$,

$$(n+1)^3-(n+1)=(n^3-n)+3\cdot n\cdot(n+1)$$

juga habis dibagi 6. Jadi, n^3-n habis dibagi 6 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tetapi n^3-n tidak habis dibagi $m \geq 7$, karena $2^3-2=6$ tidak habis dibagi $m \geq 7$. Jadi, bilangan asli terbesar yang habis membagi n^3-n untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah 6.

Tes Formatif 3

1) Ada 6, yaitu:

$$f_1=\{(a,1),(b,2)\},\ f_2=\{(a,1),(b,3)\},\ f_3=\{(a,2),(b,1)\},$$
$$f_4=\{(a,2),(b,3)\},\ f_5=\{(a,3),(b,1)\},\ f_6=\{(a,3),(b,2)\}.$$

2) Perhatikan fungsi $f:\mathbb{N}\to A$, dengan rumus

$$f(n)=2n+13,$$

maka *f* bijektif.

3) Karena $A\cap B\subset B$, maka *B* himpunan tak hingga.

4) Belum tentu. Perhatikan himpunan $A=\{3,4,5,6,...\}$ dan $B=\mathbb{N}$, maka A terhitung dan B denumerabel, tetapi $B-A=\{1,2\}$ himpunan berhingga, tidak denumerabel.

5) Karena A denumerabel, maka ada enumerasi pada A. Misalkan enumerasi pada A adalah

$$A=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n,...\}$$

Karena $B\subset A$ himpunan tak hingga, maka ada himpunan bilangan-bilangan asli $N=\{n_1,n_2,n_3,...,n_k,...\}$, sehingga

$$B=\{x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},...,x_{n_k},...\}$$

Jadi, ada enumerasi pada *B*, atau dengan kata lain *B* denumerabel.

Daftar Pustaka

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). John Wiley and Sons.

Bloch, E.D. (2000). *Proofs and fundamentals*: *A first course in abstract mathematics*. Birkhauser.

Bruckner, T. (2001). *Elementary real analysis*. Prentice-Hall Inc.

Devlin, K. (2004). *Sets*, *functions*, *and logic* (3rd ed.). London: Chapman & Hall/CRC,

Halmos, P.R. (1960). *Naïve set theory*. Princeton: D. Van Nostrand Company, Inc.

Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Lebl, J. (2016). *Basic analysis*: *Introduction to real analysi.* http://www.jirka.org/ra/.