MODUL 1

Fungsi Banyak Variabel

Drs. Warsito, M.Pd.

PENDAHULUAN

Pada mata kuliah Pengantar Matematika dan Kalkulus I, Anda telah mempelajari fungsi satu variabel (istilah lain variabel adalah peubah). Di Modul 1 Kalkulus III ini, Anda akan mempelajari fungsi banyak variabel. Pengalaman dan kompetensi tentang fungsi satu variabel yang diperoleh di Pengantar Matematika dan Kalkulus I sangat membantu dalam mempelajari Modul 1 ini. Selain Pengantar Matematika dan Kalkulus I, Aljabar Linear Elementer I juga membantu dalam memahami fungsi banyak variabel ini.

Modul 1 ini dibagi menjadi 2 kegiatan belajar. Kegiatan Belajar 1 terdiri dari konsep fungsi dua variabel dan cara membuat grafiknya. Sedangkan Kegiatan Belajar 2 membahas fungsi 3, 4, …, dan n variabel secara analitis.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memahami konsep fungsi banyak variabel dan grafik fungsi dua variabel sehingga memiliki landasan yang kokoh untuk mempelajari modul-modul Kalkulus III berikutnya. Secara rinci, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan pengertian fungsi dua variabel;
2. menentukan domain, kodomain, dan jelajah fungsi dua variabel;
3. menjelaskan pengertian grafik fungsi dua variabel;
4. menggambar grafik fungsi dua variabel;
5. menjelaskan pengertian fungsi 3, 4, …, dan n variabel;
6. membuat contoh-contoh fungsi 3, 4, …, dan n variabel; dan
7. menjelaskan kemustahilan menggambar fungsi 3, 4, …, dan n variabel.

KEGIATAN BELAJAR 1

Fungsi Dua Variabel

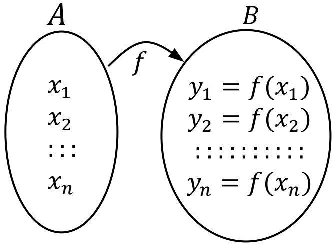
Sebelum membahas fungsi dua variabel, ada baiknya kita ingat kembali pengertian fungsi satu variabel. Dari pengertian fungsi satu variabel ini kemudian akan diperluas kepada fungsi dua variabel. Pengertian atau istilah kedua pengertian fungsi tersebut selain terdapat kesamaan, tentu saja juga terdapat perbedaan. Dalam Kegiatan Belajar 1 ini akan dibahas Pengertian Fungsi Dua Variabel dan Grafik Fungsi Dua Variabel.

A. PENGERTIAN FUNGSI DUA VARIABEL

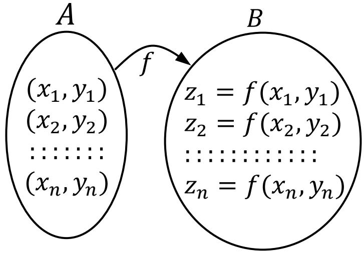
Jika kita ingat kembali pengertian fungsi **satu variabel** f dari himpunan A ke himpunan B adalah sebagai berikut.

> Jika $f: A \to B$ adalah suatu fungsi, maka kita sebut A sebagai domain f diberikan notasi $D(f)$; B sebagai kodomain f ; dan *range* f diberikan notasi $R(f)$ sehingga $R(f) = \{f(x) | x \in D(f)\}$.

Untuk setiap $f(x) \in B$ memiliki kaitan (prapeta) dengan $x \in A$. Apabila digambarkan dalam diagram Venn, pengertian fungsi satu variabel terlihat pada Gambar 1.1.1a. Kemudian, lihat Gambar 1.1.1b dan bandingkan dengan Gambar 1.1.1a.



Gambar 1.1.1a
Fungsi Satu Variabel



Gambar 1.1.1b
Fungsi Dua Variabel

Pada Gambar 1.1.1a fungsi satu variabel, himpunan A atau $D(f)$ terdiri dari satu nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan B atau $R(f)$ terdiri $f(x_1)$, $f(x_2), \dots, f(x_n)$. Sedangkan pada Gambar 1.1.1b fungsi dua variabel, himpunan A atau $D(f)$ terdiri dari nilai **pasangan terurut** (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dan B atau $R(f)$ terdiri $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, ..., $f(x_n, y_n)$. Pasangan terurut di sini dalam arti bahwa pada umumnya $(x_1, y_1) \neq (y_1, x_1)$ atau $(x_1, y_1) = (y_1, x_1)$ jika dan hanya jika $x_1 = y_1$.

Jadi fungsi dua variabel tersebut jika didefinisikan secara formal adalah sebagai berikut.

Definisi 1.1.1a

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong. Suatu **fungsi dari** A **ke** B adalah suatu **aturan** yang memetakan setiap **pasangan terurut** anggota A (prapeta) dengan satu dan hanya satu anggota B (peta).

Definisi 1.1.1b

Jika $f: A \to B$ suatu fungsi maka A disebut **domain** f disingkat $D(f)$, B disebut **kodomain** f , dan $R(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D(f)\}$ disebut ***range*** f.

Istilah **domain** juga sering disebut **daerah definisi** atau **wilayah** atau **daerah asal**, **kodomain** juga sering disebut **daerah nilai** atau **daerah hasil** atau **daerah kawan**, dan ***range*** disebut **jelajah**, dan barangkali masih ada lagi yang menggunakan sebutan lain.

Karena pada buku ini yang dibahas adalah fungsi real, maka $A = R \times R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ berupa himpunan pasangan terurut bilangan-bilangan real dan $B = R = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ berupa himpunan bilangan real. Variabel x, y disebut variabel bebas dan z disebut variabel tak bebas (terikat). Dengan demikian, Definisi 1.1.1b dapat dimodifikasi menjadi sebagai berikut.

Definisi 1.1.1c

Jika $f: R \times R \to R$ suatu fungsi maka $R \times R$ disebut **domain** f dinotasikan $D(f)$, R disebut **kodomain** f; dan $R(f)$ disebut ***range*** f dengan $R(f) = \{z = f(x,y) | (x,y) \in D(f)\}$.

Apabila tidak diberikan dengan jelas batasan domain dalam definisi suatu fungsi, maka $D(f)$ adalah **semua** pasangan terurut bilangan real (x,y) yang mempunyai kaitan yang tunggal (unik) dengan $f(x,y)$. Fungsi dua variabel biasanya ditulis sebagai $z = f(x,y)$.

1. Domain $D(f)$ dan *Range* $R(f)$ Fungsi-fungsi yang Sederhana

Untuk fungsi-fungsi yang sederhana, kita dapat dengan mudah menentukan $D(f)$ dan $R(f)$, misalnya fungsi-fungsi berikut ini.

Contoh 1.1.1

Jika diberikan fungsi $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x,y) \in R \times R$, di sini $D(f)$ tidak dibatasi.
- $R(f) = \{z = f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 | (x,y) \in R \times R\}$ himpunan bilangan real yang lebih besar atau sama dengan 0. Berapapun nilai x dan y akan memberikan nilai $f(x,y)$ positif atau 0, nilai $f(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = 0$.
  Misalkan untuk pasangan terurut (x,y):
  - $(1,2)$ maka $z = f(1,2) = (1)^2 + (2)^2 = 5$
  - $(3,-2)$ maka $z = f(3,-2) = (3)^2 + (-2)^2 = 13$
  - $(-2,-\frac{3}{4})$ maka $z = f(-2,-\frac{3}{4}) = (-2)^2 + (-\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{16}$
  - $(0,0)$ maka $z = f(0,0) = (0)^2 + (0)^2 = 0$

  Apabila Anda memberikan nilai pasangan terurut (x,y) yang lain, maka akan selalu diperoleh $z = f(x,y) \geq 0$.

Contoh 1.1.2

Jika diberikan fungsi $z = 2x^2y$ untuk $x \geq 0$, maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x,y) \in R \times R$; $x \geq 0$.
- $R(f) = \{z = f(x,y) = 2x^2y | (x,y) \in R \times R\} = R$
  Misalkan untuk pasangan terurut (x,y):
  - $(1,2)$ maka $z = f(1,2) = 2(1)^2(2) = 4$.

- $(2,-3)$ maka $z = f(2,-3) = 2(2)^2(-3) = -24$.
- $(\frac{1}{2},-8)$ maka $z = f(\frac{1}{2},-8) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2(-8) = -4$.
- $(0,-\frac{2}{3})$ maka $z = f(0,-\frac{2}{3}) = 2(0)^2(-\frac{2}{3}) = 0$.
- $(-2,-\frac{1}{3})$ dan $(-\frac{1}{3},10)$ tidak berada di $D(f)$ karena pasangan terurut (x,y) dibatasi untuk $x \geq 0$ (batasan ini sengaja diberikan).

Apabila Anda memberikan nilai pasangan terurut (x,y) yang lain, maka akan selalu $z = f(x,y) \in R$.

Contoh 1.1.3
Jika diberikan fungsi $z = f(x,y) = x^2\sqrt{y}$, maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x,y) \in R \times R$, dengan $y \geq 0$.
- $R(f) = \left\{z = f(x,y) = x^2\sqrt{y} | (x,y) \in R \times R\right\}$ atau $z \geq 0$.

  Misalkan untuk pasangan terurut (x,y):
  - $(1,2)$ maka $z = f(1,2) = (1)^2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
  - $(2,-3)$ **tidak** berada di $D(f)$, karena syarat $y \geq 0$ tidak dipenuhi.
  - $(-\frac{1}{2},8)$ maka $z = f(-\frac{1}{2},8) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{8} = \frac{2}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
  - $(-3,0)$ maka $z = f(-3,0) = (-3)^2\sqrt{0} = 0$.

  Apabila Anda memberikan nilai pasangan terurut (x,y) dengan syarat $y \geq 0$ yang lain, maka akan selalu berlaku $z = f(x,y) \in R, z \geq 0$.

Contoh 1.1.4
Jika diberikan fungsi $z = \frac{1}{2}y$ maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x,y) \in R \times R$.
- $R(f) = \left\{z = f(x,y) = \frac{1}{2}y | (x,y) \in R \times R\right\} = R$

  Misalkan untuk pasangan terurut (x,y):
  - $(1,2)$ maka $z = f(1,2) = \frac{1}{2}(2) = 1$.
  - $(2,-6)$ maka $z = f(2,-6) = \frac{1}{2}(-6) = -3$.
  - $(\frac{1}{2},-8)$ maka $z = f(\frac{1}{2},-8) = \frac{1}{2}(-8) = -4$.
  - $(0,-\frac{1}{2})$ maka $z = f(0,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.
  - $(-2,20)$ maka $z = f(-2,20) = \frac{1}{2}(20) = 10$

  Berapapun harga x tidak berpengaruh terhadap nilai $f(x,y)$, yang berpengaruh terhadap nilai $f(x,y)$ hanya harga y.

Contoh 1.1.5
Jika diberikan fungsi $z = 4x^3$ maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x, y) \in R \times R$.
- $R(f) = \{z = f(x, y) = 4x^3 | (x, y) \in R \times R\} = R$

  Misalkan untuk pasangan terurut (x, y):
  - $(1,2)$ maka $z = f(1,2) = 4(1)^3 = 4$.
  - $(2, -6)$ maka $z = f(2, -6) = 4(2)^3 = 32$.
  - $(\frac{1}{2}, -8)$ maka $z = f(\frac{1}{2}, -8) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.
  - $(0, -\frac{1}{2})$ maka $z = f(0, -\frac{1}{2}) = 3(0)^3 = 0$.
  - $(-3{,}20)$ maka $z = f(-3{,}20) = 4(-3)^3 = -108$

  Berapapun harga y tidak berpengaruh terhadap nilai $f(x, y)$, yang berpengaruh terhadap nilai $f(x, y)$ hanya harga x.

Contoh 1.1.6
Jika diberikan fungsi $z = 5$ maka:

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x, y) \in R \times R$.
- $R(f) = \{z = f(x, y) = 5 | (x, y) \in R \times R\} = 5$.

  Misalkan untuk pasangan terurut (x, y):
  - $(3,2)$ maka $z = f(3,2) = 5$.
  - $(2, -6)$ maka $z = f(2, -6) = 5$.
  - $(\frac{1}{2}, 8)$ maka $z = f(\frac{1}{2}, 8) = 5$.
  - $(0, -\frac{1}{2})$ maka $z = f(0, -\frac{1}{2}) = 5$.
  - $(-2, -20)$ maka $z = f(-2, -20) = 5$

  Berapapun harga pasangan terurut (x, y) selalu memberikan nilai $z = f(x, y) = 5$. Ini merupakan fungsi konstan, fungsi konstan ini berupa bidang datar yang berjarak 5 dari bidang xy.

Selanjutnya, silakan Anda membuat bentuk fungsi yang lain dan sekaligus menentukan $D(f)$ dan $R(f)$ masing-masing.

Beberapa fungsi yang bentuknya lebih rumit mengakibatkan kita tidak dapat dengan mudah menentukan $D(f)$ dan $R(f)$ dan terkadang memang tidak perlu untuk mencarinya. Misalnya sebagaimana contoh-contoh yang diberikan berikut ini.

Contoh 1.1.7

a. $z = x^3y - \frac{x}{y^2} + 2x - 3y$

b. $z = x\, ln\, x\, y - xe^{-xy}$

c. $z = \frac{xy}{x^2 - y^3}$

d. $z = x\, sin\left(\frac{1}{y}\right) + 2y^2\, cos(\, xy^2)$

2. Fungsi Implisit

Sampai di sini kita masih membahas fungsi-fungsi yang antara variabel tak bebas z dan variabel bebas x dan y terpisah pada ruas yang berbeda (biasanya diletakkan, variabel tak bebas z di sebelah kiri sedangkan variabel bebas x dan y di sebelah kanan). Fungsi-fungsi yang demikian disebut fungsi **eksplisit**, yang secara umum dituliskan sebagai $z = f(x, y)$.

Seperti halnya fungsi satu variabel, pada fungsi dua variabel juga terdapat fungsi **implisit** yaitu fungsi yang antara variabel tak bebas z dan variabel bebas x dan y tidak dapat dipisah pada ruas yang berbeda.

Fungsi implisit mempunyai bentuk umum $F(x, y, z) = 0$. Contoh-contoh fungsi implisit sebagai berikut.

a. $x^2yz^3 - xz + y^2x^3 = 5$ atau $x^2yz^3 - xz + y^2x^3 - 5 = 0$

b. $ln\, x\, y^2z + 2x^2yz^3 - 2 = 0$

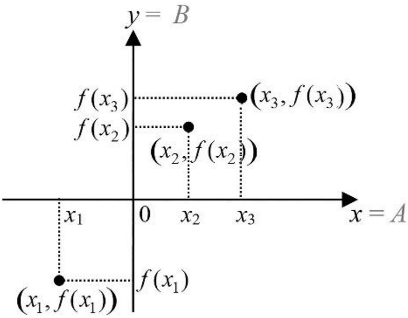
c. $x^2y^3z^4 - e^{xyz} = xy$ atau $x^2y^3z^4 - e^{xyz} - xy = 0$

d. $tan\, x\, yz + sin(\, xy^2) = xy - z$ atau
$tan\, x\, yz + sin(\, xy^2) - xy + z = 0$

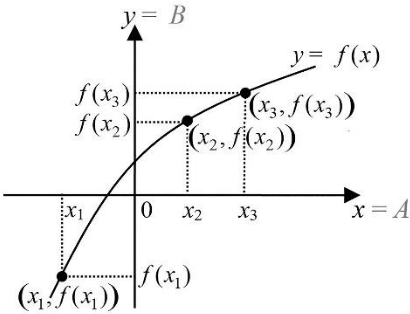
B. GRAFIK FUNGSI DUA VARIABEL

Sebelum menggambar grafik fungsi dua variabel, ada baiknya kita lihat ulang cara menggambar grafik fungsi satu variabel terlebih dahulu. Analogi cara menggambar fungsi satu variabel akan digunakan untuk menggambar grafik fungsi dua variabel.

Perhatikan kembali fungsi satu variabel pada Gambar 1.1.1a. Pada sistem bilangan real, nilai x_1, x_2, x_3, ... dan seterusnya di $D(f)$ (domain A) dinyatakan sebagai garis bilangan real x atau sering dikenal dengan sumbu x (sb-x), sedangkan nilai $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, ... dan seterusnya di $R(f)$ (kodomain$B$) dinyatakan sebagai garis bilangan real y atau sering dikenal dengan sumbu-y (sb-y). Sumbu-x dan sumbu-y membentuk bidang-xy atau xoy. Pasangan terurut $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_2, f(x_3)), \ldots$ dan seterusnya membentuk **titik-titik** di bidang-xy, lihat Gambar 1.1.2a.



Gambar 1.1.2a
Pasangan Terurut $(x, f(x))$

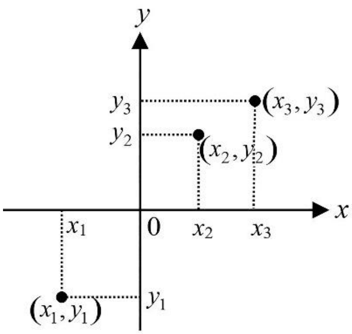


Gambar 1.1.2b
Grafik Fungsi $y = f(x)$

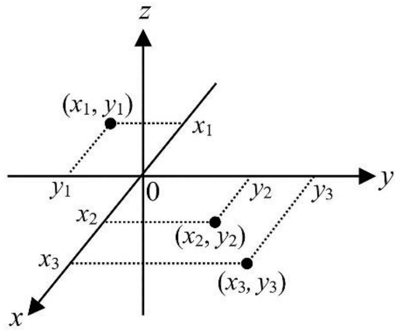
Karena banyaknya unsur $D(f)$ tak hingga, maka banyaknya pasangan terurut $(x, f(x))$ di $R(f)$ juga tak hingga. Kumpulan **titik-titik** di bidang xy membentuk garis/kurva yang merupakan **grafik** fungsi $y = f(x)$, lihat Gambar 1.1.2b. Jadi, **grafik fungsi** pada dasarnya adalah **himpunan titik pasangan terurut** antara **prapeta** $D(f)$ dan **peta** $R(f)$ suatu fungsi.

Setelah mengingat kembali cara menggambar fungsi satu variabel, marilah sekarang kita menggambar fungsi dua variabel yang konsepnya dianalogikan dari fungsi satu variabel tersebut.

Perhatikan kembali fungsi dua variabel pada Gambar 1.1.1b. Domain $D(f)$ merupakan himpunan titik-titik pasangan terurut $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\}$. Jika himpunan nilai $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ dinyatakan sebagai sumbu-x (atau x) dan himpunan nilai $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ dinyatakan sebagai sumbu-y (atau y), maka $D(f)$ merupakan bidang-xy (atau xoy), lihat Gambar 1.1.3a.



Gambar 1.1.3a
Pasangan Terurut (x, y)

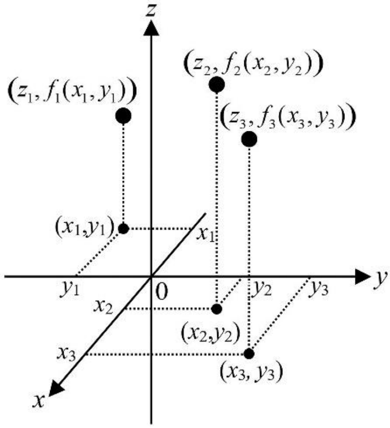


Gambar 1.1.3b
$D(f)$ dan $R(f)$

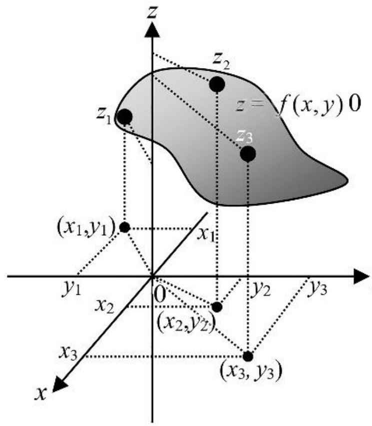
Gambar 1.1.3a menyatakan $D(f)$, bagaimana dengan $R(f)$? Gambar $R(f)$ merupakan sumbu-z (atau z) yaitu garis bilangan real yang tegak lurus dengan bidang-xy, lihat Gambar 1.1.3b.

Misalkan pasangan terurut (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3) masing-masing memiliki peta z_1, z_2, dan z_3, sehingga menghasilkan pasangan terurut baru $(z_1, (x_1, y_1))$, $(z_2, (x_2, y_2))$, $(z_3, (x_3, y_3))$ yang dinyatakan sebagai $z_1 = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(x_2, y_2)$ dan $z_3 = f(x_3, y_3)$, lihat Gambar 1.1.4a.

Karena banyaknya prapeta pasangan terurut (x, y) atau $D(f)$ tak hingga, maka banyaknya peta z atau $R(f)$ juga tak hingga. Himpunan $\{z_1, z_2, z_3, ...\}$ atau $R(f)$ merupakan **grafik** fungsi $z = f(x, y)$ yang disebut **permukaan** (*surface*), Gambar 1.1.4b.



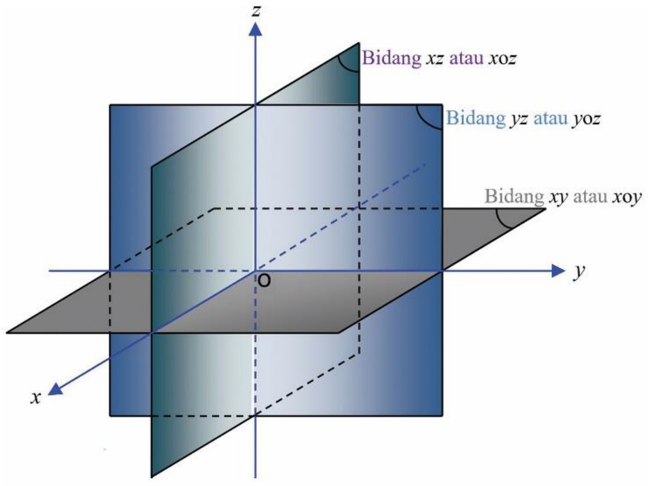
Gambar 1.1.4a.
Pasangan Terurut $(z, (x, y))$



Gambar 1.1.4b.
Grafik/Permukaan $(z = f(x, y))$

Untuk selanjutnya, menggambar permukaan/grafik $z = f(x, y)$ tentu tidak harus dengan secara konsep yaitu dengan menentukan pasangan terurut $D(f)$ dan $R(f)$. Secara praktis ada teknik-teknik khusus untuk menggambar grafik fungsi dua variabel (jika pada fungsi satu variabel, misalnya untuk menggambar garis lurus, maka cukup menentukan dua titik, kemudian dua titik tersebut dihubungkan).

Beberapa contoh menggambar permukaan $z = f(x, y)$ berbagai bentuk fungsi secara praktis. Sebelumnya kita lihat terlebih dahulu Gambar 1.1.4c, yaitu ruang dimensi 3. Sumbu-x dan sumbu-y membentuk bidang-xy atau xoy. Sumbu-x dan sumbu-z membentuk bidang-xz atau xoz. Sumbu-y dan sumbu-z membentuk bidang yz atau yoz.



Gambar 1.1.4c
Ruang Dimensi 3

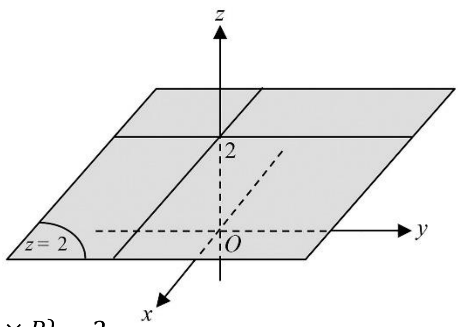
Beberapa Bentuk Khusus (Bidang, Silinder, Paraboloida, Bola, dan Kerucut)

1. **Bidang**

a. Bidang $z = 2$

Gambar grafik $z = 2$ adalah bidang yang sejajar dengan bidang-xy dan berjarak 2 dari bidang-xy.

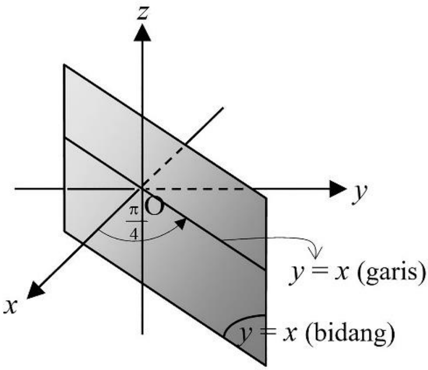
- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x, y) \in R \times R$ (bidang xy).
- $R(f) = \{z = f(x, y) | (x, y) \in R \times R\} = 2$.



Gambar 1.1.5
Grafik $z = 2$

b. Bidang $y = x$

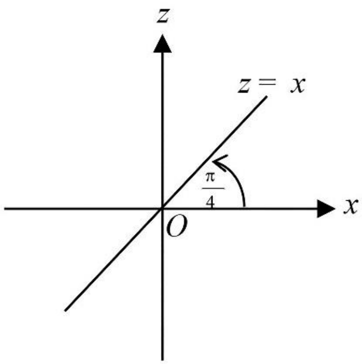
Gambar grafik bidang $y = x$ adalah bidang yang tegak lurus bidang-xy dan membentuk sudut $\frac{\pi}{4}$ dengan bidang -xz dan bidang -yz.



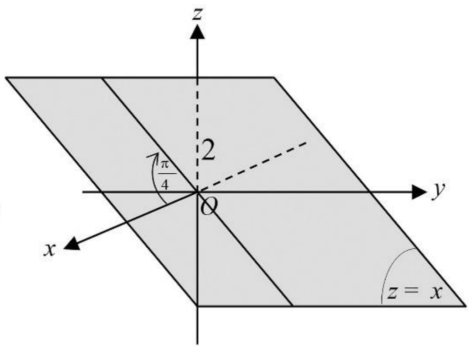
Gambar 1.1.6a
Grafik $y = x$ (Fungsi Satu Variabel)

c. Bidang $z = x$.

Ketika kita belajar menggambar grafik $z = x$ (fungsi satu variabel), maka akan terlihat pada Gambar 1.1.6b. Sedangkan permukaan $z = x$ (fungsi dua variabel, y dianggap konstan) terlihat pada gambar 1.1.6c, yaitu suatu bidang yang membentuk sudut $\frac{\pi}{4}$ terhadap bidang xy.



Gambar 1.1.6b
Grafik $z = x$ (Fungsi Satu Variabel)

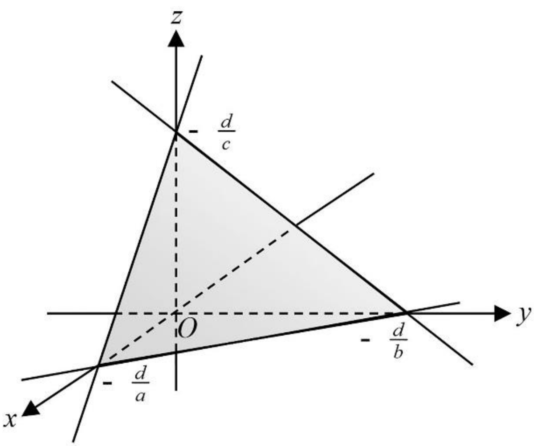


Gambar 1.1.6c
Grafik $z = x$ (Fungsi Dua Variabel)

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x, y) \in R \times R$ (bidang-xy).
- $R(f) = \{z = f(x, y) | (x, y) \in R \times R\} = R$

  Apabila kita berdiri memandang tegak lurus ke bidang -xz maka $z = x$ (fungsi dua variabel) seolah-olah seperti fungsi satu variabel x, maka grafiknya terlihat seperti grafik fungsi satu variabel, Gambar 1.1.6b.

d. Bidang $ax + by + cz + d = 0$ di oktan I.
Diketahui $ax + by + cz + d = 0$.
Jika, $x = 0$ dan $y = 0$ maka $cz = -d \Rightarrow z = -\frac{d}{c}$, merupakan titik potong permukaan (grafik) dengan sumbu-z.
Jika, $x = 0$ dan $z = 0$ maka $by = -d \Rightarrow y = -\frac{d}{b}$, merupakan titik potong permukaan (grafik) dengan sumbu-y.
Jika, $y = 0$ dan $z = 0$ maka $ax = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{a}$, merupakan titik potong permukaan (grafik) dengan sumbu-x.

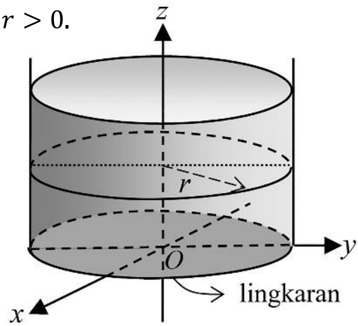


Gambar 1.1.7
Permukaan $ax + by + cz + d = 0$

- $D(f)$ semua pasangan terurut $(x, y) \in R \times R; x \geq 0, y \geq 0$
- $R(f) = \{z = f(x, y) | (x, y) \in R \times R; z \geq 0\}$

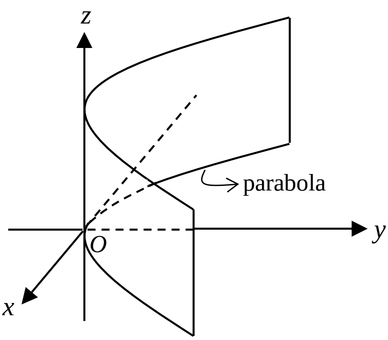
2. Silinder

a. Silinder lingkaran tegak $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$. Lengkungan pengarah berupa lingkaran.



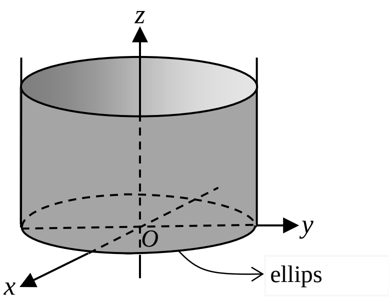
Gambar 1.1.8
Silinder Lingkaran Tegak

b. Silinder parabolik $y = x^2$. Lengkungan pengarah berupa parabola .



Gambar 1.1.9
Silinder Parabolik

c. Silinder eliptik $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

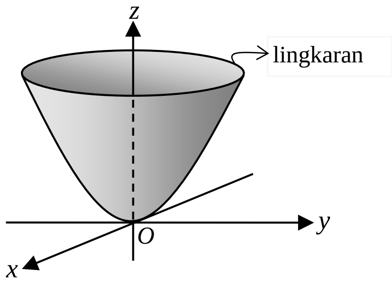


Gambar 1.1.10
Silinder Eliptik

3. Paraboloida

a. Paraboloida lingkaran:

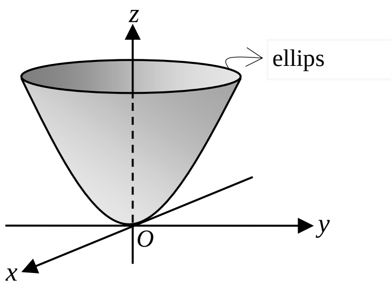
$z = x^2 + y^2$



Gambar 1.1.11
Paraboloida Lingkaran

b. Paraboloida elliptik:

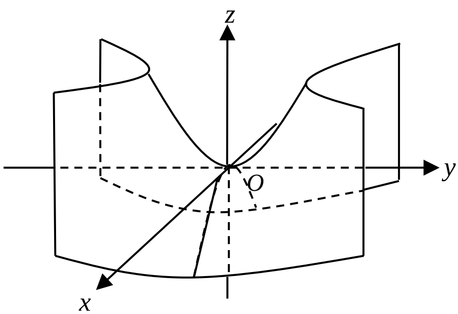
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Gambar 1.1.12
Paraboloida Elliptik

c. Paraboloida hiperbolik:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

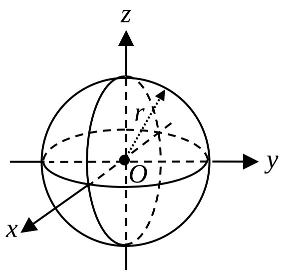


Gambar 1.1.13
Paraboloida Hiperbolik

4. Bola

a. Bola berjari-jari r dan berpusat di titik asal $O(0,0,0)$.

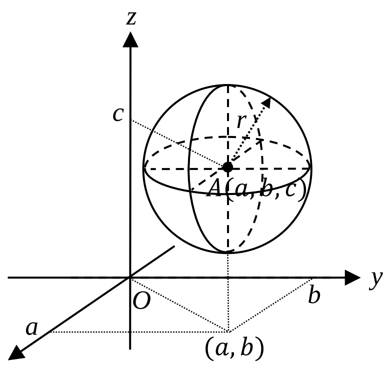
Cara menggambar:
- Buat lingkaran berpusat di O dan berjari-jari r pada bidang xy.
- Buat lingkaran berpusat di O dan berjari-jari r pada bidang yz.
- Buat lingkaran berpusat di O dan berjari-jari r pada bidang zx.



Gambar 1.1.14
Bola Berjari-jari r dan Berpusat di $O(0,0,0)$

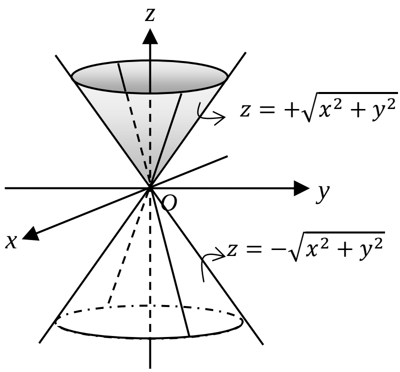
b. Bola yang berjari-jari $r$dan berpusat di $A(a,b,c)$;
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Cara menggambar:
- tentukan a pada sumbu$x$;
- tentukan b pada sumbu$y$;
- tentukan titik pasangan terurut (a,b);
- tentukan c pada sumbu$z$;
- tentukan titik $A(a,b,c)$;
- kemudian buatlah lingkaran-lingkaran seperti halnya pada 4a.



Gambar 1.1.15
Bola yang Berjari-jari r dan Berpusat di $A(a,b,c)$

5. **Kerucut** $z^2 = x^2 + y^2$.
Persamaan $z^2 = x^2 + y^2$
Memberikan
$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.
Kerucut di atas bidang xy mempunyai persamaan
$z = +\sqrt{x^2 + y^2}$,
sedangkan di bawah bidang xy mempunyai persamaan
$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.



Gambar 1.1.16
Kerucut

Selanjutnya Anda dapat mencoba sendiri menggambar grafik fungsi yang lain. Untuk memeriksa kebenaran gambar grafik, Anda dapat menggunakan bantuan *software*/aplikasi yang ada.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui fungsi $z = f(x, y) = 3x^2y$
Tentukan:
a) $f(0,0)$
b) $f(1,2)$
c) $f(-1,1)$
d) $f(1,-3)$
e) $f(-2,-1)$
f) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
g) $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
h) $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
i) $D(f)$
j) $R(f)$

2) Diketahui fungsi $f(x, y) = x^4 - y\sqrt{x - 1}$
Tentukan:
a) $f(3,1)$
b) $f(2,-1)$
c) $f(0,3)$
d) $D(f)$
e) $R(f)$

3) Diketahui fungsi $f(x,y) = \frac{2x^2-y^3+1}{x^2+y^2}$.

Tentukan:
a) $f(1,2)$
b) $f(3,2)$
c) $f(0,0)$
d) $D(f)$
e) $R(f)$

4) Periksalah, fungsi-fungsi berikut yang termasuk eksplisit atau implisit! [anggap x dan y variabel bebas, sedangkan z variabel tak bebas]
a) $x^2yz + xz - x^3y^2 + 10 = 0$
b) $x^2yz + x - x^3y^2z^2 - 5 = 0$
c) $sin(x+z) - x^2yz + 20 = 0$
d) $xe^{xy} + z\, ln\, x^2\, y - z\, sin(x-y) + xy^2z = 1.$

5) Gambarkanlah grafik fungsi:
a) $x = 1$
b) $z = 2y$
c) $2x - 4y + 6z = 12$
d) $z = x^2$
e) $z = 1 + x^2 + y^2$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui fungsi $z = f(x,y) = 3x^2y$.
a) $f(0,0) = 3(0)^2(0) = 0$
b) $f(1,2) = 3(1)^2(2) = 6$
c) $f(-1,1) = 3(-1)^2(1) = 3$
d) $f(1,-3) = 3(1)^2(-3) = -9$
e) $f(-2,-1) = 3(-2)^2(-1) = -12$
f) $f(\frac{1}{2},\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{3}) = \ldots$
g) $f(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}) = 3(-\frac{1}{2})^2(\frac{1}{3}) = \ldots$
h) $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}) = \ldots$
i) $D(f) = \{(x,y) \in R \times R\}$
j) $R(f) = \{z \in R\}$

2) Diketahui fungsi $f(x,y) = x^4 - y\sqrt{x-1}$
a) $f(3,1) = 3^4 - (1)\sqrt{3-1} = 81 - \sqrt{2}$
b) $f(2,-1) = 2^4 - (-1)\sqrt{2-1} = \cdots$
c) $f(0,3) = 0^4 - (3)\sqrt{0-1} = -3\sqrt{-1}$, tidak terdefinisi karena kita hanya membahas Kalkulus III yang didasari pada himpunan bilangan real sedangkan $-3\sqrt{-1}$ merupakan bilangan kompleks.

d) $D(f) = \{(x, y) \in R \times R; x \geq 1\}$
e) $R(f) = \{z \in R\}$

3) Diketahui fungsi $f(x, y) = \frac{2x^2 - y^3 + 1}{x^2 + y^2}$
a) $f(1,2) = \frac{2(1)^2 - (2)^3 + 1}{1^2 + 2^2} = \cdots$
b) $f(3,2) = \cdots$
c) $f(0,0) = \frac{2(0)^2 - (0)^3 + 1}{0^2 + 0^2} = \cdots$ tidak terdefinisi di (0,0).
d) $D(f) = \{(x, y) \in R^2; (x, y) \neq (0,0)\}$
e) $R(f) = R$

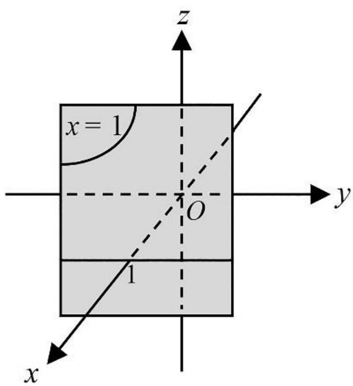
4) a) $x^2yz + xz - x^3y^2 + 10 = 0$ fungsi eksplisit, karena dapat diubah menjadi $x^2yz + xz - x^3y^2 + 10 = 0$,

$$x^2yz + xz = x^3y^2 - 10,$$
$$z(x^2y + x) = x^3y^2 - 10,$$
$$z = \frac{x^3y^2 - 10}{(x^2y + x)}, \text{ bentuk } z = f(x, y).$$

b) $x^2yz + x - x^3y^2z^2 - 5 = 0$ fungsi implisit, karena tidak dapat diubah menjadi bentuk $z = f(x, y)$.
c) $sin(x + z) - x^2yz + 20 = 0$, fungsi implisit.
d) $xe^{xy} + z\, ln\, x^2\, y - z\, sin(x - y) + xy^2z = 1$, fungsi eksplisit karena dapat diubah menjadi bentuk $z = \frac{1 - xe^{xy}}{xy^2 + ln\, x^2 y - sin(x - y)}$.

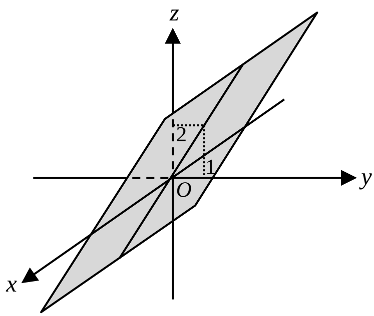
5) Gambar grafik fungsi:
a) $x = 1$

Grafik fungsi $x = 1$ adalah suatu bidang yang sejajar dengan bidang-yz dan berjarak 1 dari titik asal O.



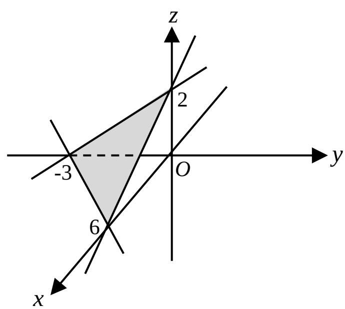
Gambar 1.1.17
Grafik $x = 1$

b) $z = 2y$



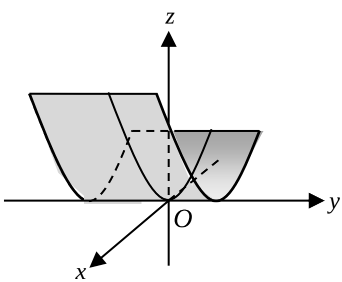
Gambar 1.1.18
Grafik $z = 2y$

c) $2x - 4y + 6z = 12$



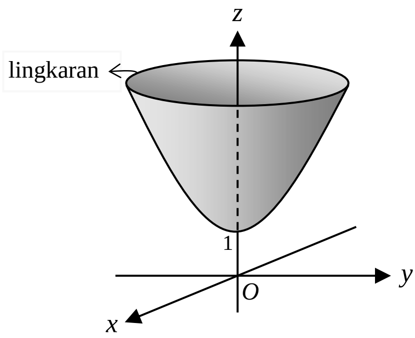
Gambar 1.1.19
Grafik $2x - 4y + 6z = 12$

d) $z = x^2$



Gambar 1.1.20
Grafik $z = x^2$

e) $z = 1 + x^2 + y^2$



Gambar 1.1.21
Grafik $z = 1 + x^2 + y^2$

RANGKUMAN

Pengertian fungsi dua variabel analog dengan fungsi satu variabel.

Definisi (Fungsi)

> Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong. Suatu **fungsi dari** A **ke** B adalah suatu **aturan** yang memetakan/mengaitkan setiap **pasangan terurut** anggota A (prapeta) dengan satu dan hanya satu anggota B (peta).

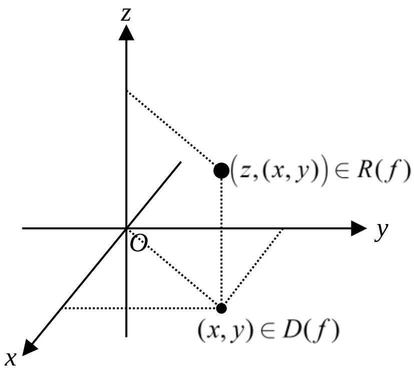
Definisi (domain, kodomain, dan *range*)

> Jika $f: A \to B$ suatu fungsi, kita sebut A sebagai **domain** f disingkat $D(f)$; B sebagai **kodomain** f ; dan ***range*** f disingkat $R(f)$, diberikan oleh $R(f) = \{f(x,y) | (x,y) \in D(f)\}$.

Yang membedakan adalah domain fungsi, untuk fungsi satu variabel terdiri dari himpunan satu variabel sedangkan fungsi dua variabel terdiri dari himpunan pasangan terurut dua variabel.

Dalam fungsi dua variabel juga dikenal bentuk fungsi eksplisit dan implisit. Bentuk eksplisit $z = f(x,y)$, variabel tak bebas z dapat dipisahkan dalam ruas yang berbeda dengan variabel bebas x dan y. Bentuk implisit $F(x,y,z) = 0$, variabel tak bebas z tidak dapat dipisahkan dalam ruas yang berbeda dengan variabel bebas x dan y.

Grafik fungsi dua variabel pada dasarnya adalah **himpunan titik pasangan terurut** antara **prapeta** $D(f)$ (variabel bebas) dan **peta** $R(f)$ (variabel tak bebas z). Sedangkan prapeta $D(f)$ sendiri juga merupakan himpunan titik dari pasangan terurut variabel bebas x dan y.



Gambar 1.1.22
Konsep Grafik Fungsi Dua Variabel

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

***Perhatikan*:** Jika dijawab benar, setiap soal bernilai 3.

Untuk soal No.1 sampai dengan No.5: Diketahui fungsi $f(x,y) = y\sqrt{x+1} + x^2$, maka dapat ditentukan:

1) Nilai $f(3,1) = \cdots$.
   A. 10
   B. 11
   C. 12
   D. $3(\sqrt{2} + 3)$

2) Nilai $f(1,-1) = \cdots$.
   A. $1 + \sqrt{2}$
   B. $\sqrt{2} - 1$

C. 1
D. $1-\sqrt{2}$

3) Nilai $f(-2,1)=\cdots$.
A. $\sqrt{1}+4$
B. $4-\sqrt{1}$
C. tidak terdefinisi
D. $\sqrt{1}-4$

4) Nilai $D(f)=\cdots$.
A. $\{(x,y)|x\geq -1, y\in R\}$
B. $\{(x,y)\in (R\times R)\}$
C. $\{(x,y)|x\geq 1, y\in R\}$
D. $\{(x,y)|x\geq 0, y\in R\}$

5) Nilai $R(f)=\cdots$.
A. $\{z\geq 0\}$
B. $\{z\leq 0\}$
C. $\{z\in R\}$
D. $\{z\in R,$kecuali$z=1\}$

Untuk soal No.6 sampai dengan No.10: Diketahui fungsi $f(x,y)=\frac{2x-y^2}{x^2}$, maka:

6) Nilai $f(1,-2)=\cdots$.
A. 2
B. -2
C. 3
D. -3

7) Nilai $f(3,2)=\cdots$.
A. $\frac{1}{3}$
B. $-\frac{1}{3}$
C. 3
D. $\frac{2}{9}$

8) Nilai $f(0,1)=\cdots$.
A. tidak terdefinisi
B. 0

C. $\frac{1}{2}$
D. 1

9) Nilai $D(f) = \cdots$.
A. $\{(x, y) | x \neq y, y \in R\}$
B. $\{(x, y) \in (R \times R); x \neq -y\}$
C. $\{(x, y) | x \neq 0, y \in R\}$
D. $\{(x, y) \in (R \times R)\}$

10) Nilai $R(f) = \cdots$.
A. $\{z \in R; z \leq 0\}$
B. $\{z \in R\}$
C. $\{z \in R; z \geq 0\}$
D. $\{z \in R; z > 0\}$

Untuk soal No.11 sampai dengan No.15, periksalah fungsi-fungsi tersebut termasuk eksplisit atau implisit! [anggap x dan y variabel bebas, sedangkan z variabel tak bebas]:

11) Fungsi $x^2yz + xz^3 - x^3y = 10$ ….
A. eksplisit
B. implisit

12) Fungsi $x^2yz - x^3y - x^3y^2z - 5z + 5 = 0$ …
A. eksplisit
B. implisit

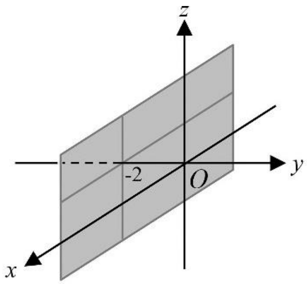
13) Fungsi $sin(x + y) - x^2yz^2 + 20 = 0$ ….
A. eksplisit
B. implisit

14) Fungsi $xe^{xy} - ln\, x^2\, y - sin(x - z) + xy^2z = 10$ ….
A. eksplisit
B. implisit

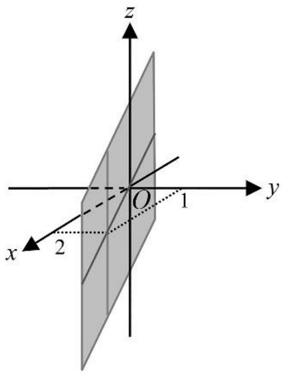
15) Fungsi $xyz - z^2 = 2$ ….
A. eksplisit
B. implisit

Untuk soal No.16 sampai dengan No.20, periksalah gambar grafik fungsi-fungsi tersebut benar atau salah:

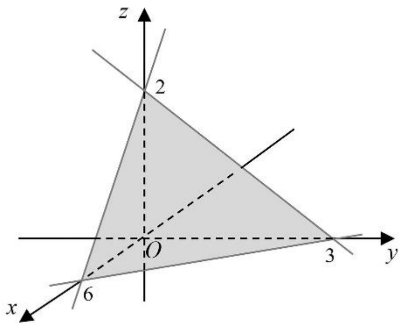
16) Gambar fungsi $y = -2$ ….
   A. benar
   B. salah



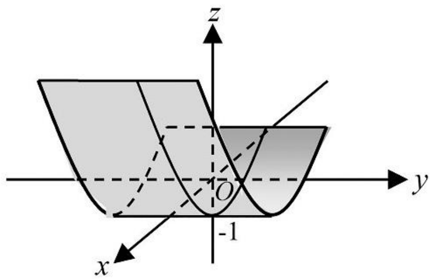
17) Gambar fungsi $x = 2y$ ….
   A. benar
   B. salah



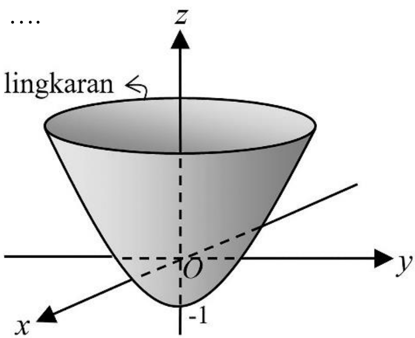
18) Gambar fungsi $z = 6 - (2x + 3y)$ …
   A. benar
   B. salah



19) Gambar fungsi $z = x^2 - 1$ ….
A. benar
B. salah



20) Gambar fungsi $z = 1 - (x^2 + y^2)$ ….
A. benar
B. salah



Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Fungsi $3,4,5 \ldots, n$ Variabel

Kita telah membahas fungsi dan grafik fungsi dua variabel pada Kegiatan Belajar 1. Pada Kegiatan Belajar 2 ini, kita akan membahas fungsi **banyak** variabel. Yang dimaksudkan **banyak** di sini adalah 3,4,5, ..., dan n sehingga nantinya akan dikenal fungsi 3 variabel, fungsi 4 variabel, fungsi 5 variabel dan seterusnya sampai dengan fungsi n variabel.

Seperti halnya pada fungsi dua variabel, pembahasan fungsi banyak variabel juga akan melibatkan tentang fungsi eksplisit, fungsi implisit, dan grafik fungsi. Pengertian fungsi, fungsi eksplisit, dan fungsi implisit dapat dianalogikan dari fungsi dua variabel. Sedangkan untuk grafik fungsi banyak variabel akan berbeda dengan fungsi dua variabel.

A. FUNGSI BANYAK VARIABEL

1. Fungsi Tiga Variabel

Pengertian fungsi tiga variabel analog dengan fungsi dua variabel yaitu:

Definisi 1.2.1a

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong. Suatu **fungsi dari A ke B** adalah suatu **aturan** yang memetakan/mengaitkan setiap **pasangan terurut** anggota A (prapeta) dengan satu dan hanya satu anggota B (peta).

Pengertian fungsi tiga variabel sama dengan pengertian fungsi dua variabel. Adapun yang membedakan adalah banyak komponen pasangan terurut himpunan prapeta. Pada fungsi dua variabel terdapat dua komponen pasangan terurut, sedangkan pada fungsi tiga variabel terdapat tiga komponen pasangan terurut.

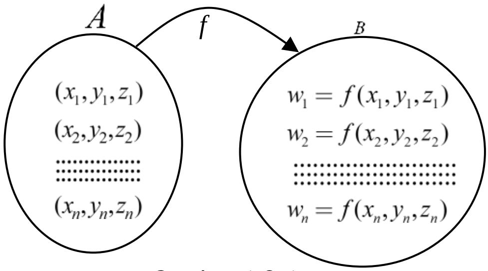
Himpunan pasangan terurut prapeta,

$$A = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)\}$$

Himpunan peta,

$$B = \{w_1 = f(x_1, y_1, z_1), w_2 = f(x_2, y_2, z_2), \dots, w_n = f(x_n, y_n, z_n)\}.$$

Apabila digambarkan dalam diagram Venn, akan terlihat seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2.1 berikut ini.



Gambar 1.2.1
Fungsi Tiga Variabel

Definisi 1.2.1b

Jika $f : A \to B$ suatu fungsi, kita sebut A sebagai **domain** f disingkat $D(f)$; B sebagai **kodomain** f ; dan ***range*** f disingkat $R(f)$, diberikan oleh $R(f) = \{w = f(x, y, x) | (x, y, z) \in D(f)\}$.

Apabila domain tidak diberikan dengan jelas dalam definisi suatu fungsi, maka $D(f)$ adalah semua pasangan terurut bilangan real (x, y, z) yang mempunyai kaitan unik dengan $f(x, y, z)$.

Fungsi tiga variabel bentuk eksplisit biasanya ditulis sebagai $w = f(x, y, z)$, sedangkan bentuk implisitnya $F(x, y, z, w) = 0$. Namun penulisan variabel bebas x, y, dan z serta variabel tak bebas w tidak baku, masih ada cara penulisan bentuk lain. Misalnya, variabel bebas r, θ, dan z sedangkan variabel tak bebas V atau variabel bebas ρ, ϕ, dan θ sedangkan variabel tak bebas w dan lain-lain.

Contoh 1.2.1
Fungsi tiga variabel bentuk **eksplisit** (x , y , dan z variabel bebas dan w variabel tak bebas).

a. $w = f(x,y,z) = 2x^2yz - xy^3$

- $f(2,1,3) = 2(2)^2(1)(3) - (2)(1)^3 = 22$
- $f(1,-1,-1) = 2(1)^2(-1)(-1) - (1)(-1)^3 = 3$.
- $f(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{2})^2(0)(-\frac{1}{3}) - (\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})^3 = 0 - (\frac{1}{2})(-\frac{1}{27}) = \frac{1}{54}$.
- $D(f) = \ (x,y,z) \in R^3$
- $R(f) = \ w \in R$

b. $w = f(x,y,z) = \ln x^2 y - \sin(xz)$

- $f(1,2,\pi) = \ln(1)^2(2) - \sin(2\pi) = \ln 2 - 0 = \ln 2$.
- $f(\frac{1}{2}, 2, \pi) = \ln(\frac{1}{2})^2(2) - \sin(\frac{1}{2} \cdot \pi) = \ln \frac{1}{2} - \sin \ \frac{\pi}{2} \ = \ln \frac{1}{2} - 1$.
- $f(2, -\frac{1}{2}, 0) = \ln(2)^2(-\frac{1}{2}) - \sin(2 \cdot 0) = \ln(-2) - 0 = \ln(-2)$.

c. $w = f(x,y,z) = x^3y^2 - xy^3z + \cos(xy)$.

Contoh 1.2.2
Fungsi tiga variabel bentuk **implisit** (x , y , dan z variabel bebas dan w variabel tak bebas).

a. $xw^2 - 2yw^3 + xyz = 5$

b. $ze^{xw} - \tan(xyw) + xz + 10 = 0$

c. $w\ln(xy) - y^2zw + 5xw^3 - 2 = 0$

2. Fungsi $4, 5, \ldots$, dan n Variabel

Pengertian atau definisi fungsi $4, 5, \ldots$, dan n variabel sama dengan fungsi tiga variabel yaitu:

Definisi 1.2.2a

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong. Suatu **fungsi dari A ke B** adalah suatu **aturan** yang memetakan/mengkaitkan setiap **pasangan terurut** anggota A (prapeta) dengan satu dan hanya satu anggota B (peta).

Banyaknya komponen pasangan terurut pada prapeta:

- fungsi 4 variabel adalah 4 komponen pasangan terurut
- fungsi 5 variabel adalah 5 komponen pasangan terurut
- …………………………………………………………
- fungsi n variabel adalah n komponen pasangan terurut

a. *Fungsi 4 Variabel*

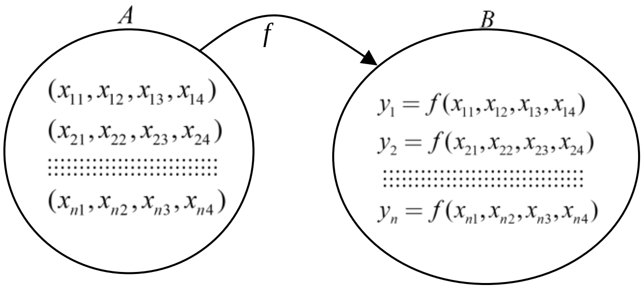
Himpunan pasangan terurut prapeta,

$$A = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}), (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), \ldots, (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4}) \quad .$$

Himpunan peta,

$$B = y_1 = f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}),\ y_2 = f(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), \ldots,$$
$$y_n = f(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4})$$

Apabila digambarkan dalam diagram Venn, akan terlihat seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2.2 berikut ini.



Gambar 1.2.2
Fungsi 4 Variabel

Definisi 1.2.2b

Jika $f : A \to B$ suatu fungsi, kita sebut A sebagai **domain** f disingkat $D(f)$; B sebagai **kodomain** f ; dan ***range*** f disingkat $R(f)$, diberikan oleh $R(f) = \left\{ y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D(f) \right\}$.

Apabila tidak diberikan dengan jelas batasan dalam definisi suatu fungsi, maka $D(f)$ adalah semua pasangan terurut bilangan real (x_1, x_2, x_3, x_4) yang mempunyai kaitan unik dengan $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Fungsi 4 variabel dalam bentuk eksplisit biasanya ditulis sebagai $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, sedangkan bentuk implisitnya $F(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = 0$.

Contoh 1.2.3
Fungsi 4 variabel bentuk eksplisit (x_1, x_2, x_3, x_4 variabel bebas dan y variabel tak bebas).

1) $y = 3x_1^2 x_4 - 2\dfrac{x_2^3}{x_3}$
2) $y = \sin(x_1 x_4^2) - \cos(x_2 x_3)$
3) $y = x_2^3 x_4^2 + x_4 e^{x_1}$

Contoh 1.2.4
Fungsi 4 variabel bentuk implisit (x_1, x_2, x_3, x_4 variabel bebas dan y variabel tak bebas).

1) $2x_1 x_3^2 - x_2 y^2 + 3x_4 y - 12 = 0$
2) $x_1 \ln(x_2^3 y) + x_4 y^2 - 10x_3^2 = 30$
3) $x_2^3 \sin(x_1 y) + x_4^2 y^3 = x_3^5 y^2 - 5$

b. Untuk Fungsi $5, 6, \ldots,$ *dan* n *Variabel*

Contoh 1.2.5
Fungsi 5 variabel bentuk eksplisit (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 variabel bebas dan y variabel tak bebas).

1) $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_2 x_5^2 - 3x_1 x_2$
2) $y = \frac{2}{3} x_4 + 2x_3^4 x_5^3 - 2x_1^2 x_2$
3) $y = \sin(x_4) - x_3^4 x_5^4 - \tan(x_2)$

Contoh 1.2.6
Fungsi 5 variabel bentuk implisit (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 variabel bebas dan y variabel tak bebas).

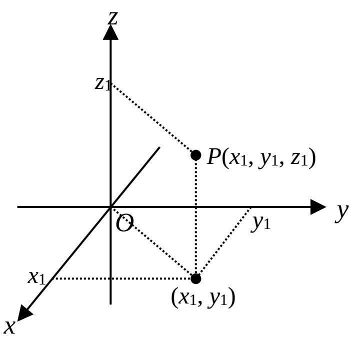
1) $x_1 y - x_4^5 e^{x_2} + x_5^2 y^3 = 3$
2) $\ln(x_2^3 y) - e^{x_1 x_5} + 2x_4 y = x_3^4 - 6$
3) $yx_5 - \sin(x_2^3 y) + x_1 x_4^2 = x_2^5 x_1 + 9$

Selanjutnya, Anda tentu dengan mudah dapat menganalogikan dan membuat contoh-contoh fungsi $6, 7, \ldots,$ dan n variabel.

B. GRAFIK FUNGSI BANYAK VARIABEL

1. Grafik Fungsi Tiga Variabel

Bentuk fungsi tiga variabel $w = f(x, y, z)$ dan bentuk diagram Venn (lihat Gambar 1.2.1). Ambil titik P yang menyatakan pasangan terurut (x_1, y_1, z_1) dengan petanya w_1. Apabila himpunan titik-titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dinyatakan sebagai sumbu x, himpunan titik-titik $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dinyatakan sebagai sumbu y, dan himpunan titik-titik $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dinyatakan sebagai sumbu z maka timbul pertanyaan yaitu dimanakah titik w_1 (peta) harus diletakkan? (lihat Gambar 1.2.3). Pertanyaan lebih lanjut, apabila domain $D(f)$ himpunan pasangan terurut x, y, z (ruang dimensi tiga) maka dimanakah letak sumbu, kodomain, dan *range* $R(f)$?



Gambar 1.2.3.
$D(f)$ dan $R(f)$ di mana?

Ternyata tidak mudah menggambar grafik fungsi tiga variabel, bukan? Oleh karena itu, dalam Kalkulus III ini, kita tidak perlu dapat menggambar fungsi tiga variabel.

2. Grafik Fungsi $4, 5, \ldots$, dan n Variabel

Untuk menggambar grafik fungsi tiga variabel saja tidak mudah, apalagi menggambar fungsi $4, 5, \ldots$, dan n variabel. Karena tidak mudah menggambarkan grafik fungsi $3, 4, \ldots$, dan n variabel, maka di Kalkulus III ini Anda tidak dituntut dapat menggambar grafik fungsi $3, 4, \ldots$, dan n variabel. Anda dapat menggambar fungsi dua variabel dengan baik, itu sudah cukup.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jika diketahui $w = f(x, y, z) = xy^2z^3 - 3x^2y$, maka:
   a) $f(-1, 1, 2) = \ldots.$
   b) $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2) = \ldots$
   c) $f(\frac{1}{3}, 0, 3) = \ldots$
   d) $D(f) = \ldots.$
   e) $R(f) = \ldots.$

2) Jika diketahui $w = f(x, y, z) = \dfrac{x}{y^2} - 2x^3yz$, maka:
   a) $f(-1, 2, 0) = \ldots.$
   b) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1) = \ldots$
   c) $f(-1, 0, 2) = \ldots$
   d) $D(f) = \ldots.$
   e) $R(f) = \ldots.$

3) a) Jika diketahui $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y^2} - 2x^3y$, maka $f(2, 1, 3) = \ldots$
   b) Jika diketahui $w = x\sin(xy) + 2x^2z + x$, maka $w(2, \pi, 3) = \ldots$

c) Jika diketahui $y = 2x_1^2 x_3 - x_2 x_4$, maka $y(1,1,2,1) = \dots$

d) Jika diketahui $y = 2x_1^2 x_3 - x_2 x_4$, maka $y(1,0,1,2,1) = \dots$

e) Jika diketahui $y = \ln(x_1^2 x_3) - 3e^{x_2 x_4} + x_5$, maka $y(1,0,1,2,1) = \dots$

4) Fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi eksplisit atau fungsi implisit?

a) $x_1 y^2 - x_4^5 e^{x_2} + x_5^2 y^2 = 3x_2 - 5$, dengan y variabel tak bebas.

b) $y \ln(x_2^3 x_1) - e^{x_1 x_5} + 2x_4 y = x_3^4 - 6y$, dengan y variabel tak bebas.

c) $w = 2x^2 y - yz^2 w^3$, dengan w variabel tak bebas.

d) $yx_5 - y\sin(x_2^3) + x_1 x_4^2 = x_2^5 x_1 + 9$, dengan y variabel tak bebas.

e) $y = 6x_1 x_2 x_3^2 - 3\ln x_4^3 - y^3 x_5^2 + 10$, dengan y variabel tak bebas.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $f(-1,1,2) = (-1)(1)^2(2)^3 - 3(-1)^2(1) = \ldots = -11$.

b) $f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -2) = \ \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2}\ ^{2} \quad -2\ ^{3} - 3\ \ \tfrac{1}{2}\ ^{2} (-\tfrac{1}{2}) = \dots$.

c) $f(\tfrac{1}{3}, 0, 3) = \dots$

d) $D(f) = \ (x, y, z) \in R^3$

e) $R(f) = \ w \in R$

2) a) $f(-1,2,0) = \dfrac{(-1)}{2^2} - 2(-1)^3(2)(0) = -\tfrac{1}{4}$

b) $f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -1) = \dfrac{\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{3}\ ^{2}} - 2\ \ \tfrac{1}{2}\ ^{3}\ \ \tfrac{1}{3}\ (-1) = \ldots$.

c) $f(-1,0,2) = \dfrac{-1}{0\ ^{2}} - 2\ \ -1\ ^{3}\ \ 0\ \ (2) =$ tidak terdefinisi di $(x, 0, z)$.

d) $D(f) = \ (x, y, z) \in R^3$, kecuali $(x, 0, z)$

e) $R(f) = \ w \in R$

3) a) $f(2,1,3) = \dfrac{2}{(1)^2} - 2(2)^3(1) = \ldots$

b) $w(2,\pi,3) = (2)\sin(2\pi) + 2(2)^2(3) + (2) = \ldots .$

c) $y(1,1,2,1) = 2(1)^2(2) - (1)(1) = \ldots$

d) $y(1,0,1,2,1) = 2(1)^2(1) - (0)(2) = \ldots$

e) $y(1,0,1,2,1) = \ln\ (1)^2(1)\ - 3e^{(0)(2)} + 1 = \ln 1 - 3e^0 + 1 = \ldots$

4) a. $x_1y^2 - x_4^5e^{x_2} + x_5^2y^2 = 3x_2 - 5 \Rightarrow y^2 = \dfrac{3x_2 - 5 + x_4^5e^{x_2}}{x_1 + x_5^2}$

atau $y = \pm\sqrt{\dfrac{3x_2 - 5 + x_4^5e^{x_2}}{x_1 + x_5^2}}$.

[eksplisit]

b. $y\ln(x_2^3x_1) - e^{x_1x_5} + 2x_4y = x_3^4 - 6y \Rightarrow$

$y\ \ \ln(x_2^3x_1) + 2x_4 + 6\ = e^{x_1x_5} + x_3^4 \Rightarrow y = \dfrac{\cdots}{\cdots}$ [eksplisit]

c. $w = 2x^2y - yz^2w^3 \Rightarrow w + yz^2w^3 = 2x^2y$ [implisit]

d. $yx_5 - y\sin(x_2^3) + x_1x_4^2 = x_2^5x_1 + 9 \Rightarrow$

$yx_5 - y\sin(x_2^3) = -x_1x_4^2 + x_2^5x_1 + 9 \Rightarrow y = \dfrac{\cdots}{\cdots}$ [eksplisit]

e. $y = 6x_1x_2x_3^2 - 3\ln x_4^3 - y^3x_5^2 + 10 \Rightarrow$

$y + y^3x_5^2 = 6x_1x_2x_3^2 - 3\ln x_4^3 + 10$ [implisit]

RANGKUMAN

Fungsi $3, 4, \ldots, n$ variabel memiliki dasar pengertian sama yaitu:

Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong. Suatu **fungsi dari** A **ke** B adalah suatu **aturan** yang memetakan/mengkaitkan setiap **pasangan terurut** anggota A (prapeta) dengan satu dan hanya satu anggota B (peta).

Adapun yang membedakan adalah banyaknya komponen pasangan terurut pada himpunan prapeta. Komponen pasangan terurut himpunan prapeta fungsi tiga variabel sebanyak 3 buah yaitu (x, y, z), 4 variabel sebanyak 4 buah yaitu (x_1, x_2, x_3, x_4), 5 variabel sebanyak 5 buah yaitu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dan untuk fungsi n variabel terdapat n komponen pasangan terurut yaitu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Penulisan variabel bebas (x, y, z), (x_1, x_2, x_3, x_4), $\ldots$, atau $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan variabel tak bebas tidak baku, masih ada cara penulisan bentuk lain yang biasanya tergantung dari konteks penerapannya.

Proses menggambar fungsi $3, 4, \ldots, n$ tidak mudah. Oleh karena itu, pada Kalkulus III ini Anda tidak dituntut untuk dapat menggambar grafik fungsi-fungsi $3, 4, \ldots$, dan n variabel.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

***Perhatikan*:** Setiap soal bernilai 3, kecuali No.9 dan No.10 masing-masing bernilai 5.

1) Jika $w = f(x, y, z) = xy^2z^3 - 3x^2y$, maka $w(1, -1, 2) = \ldots$.
   A. 10
   B. 11
   C. 12
   D. 13

2) Jika $w = \cos(x^2yz) - \ln(xz^2)$, maka $w\ 1, \pi, 2\ = \ldots$.

3) Jika $w(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin\phi \cos\theta + \rho^2 \sin 2\theta$, maka $w\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \ldots$.
   A. 0
   B. 2
   C. 4
   D. 1

4) Jika $f(w,x,y,z)=xe^{yw}\cos^2 z$, maka $f\left(\frac{1}{2},2,2,\pi\right)=\ldots.$
A. 2
B. $-2e$
C. $2e$
D. e

5) Jika $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{2}{3}x_4+2x_3^4x_5^3-2x_1^2x_2$,
maka $f(1,2,-2,3,-1)=\ldots.$
A. 34
B. 32
C. -32
D. -34

6) Jika $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=2x_4+2x_3^4x_6^3-2x_1^2x_5$,
maka $f(1,3,-2,2,-1,1)=\ldots.$
A. 36
B. 32
C. 38
D. 34

7) Fungsi $y\ln(x_2^3x_1)-e^{x_1x_5}+5y=x_3^4y$ dengan y variabel tak bebas merupakan fungsi ….
A. eksplisit
B. implisit

8) Fungsi $w=xy^2z^3-3x^2yw^3$, dengan w variabel tak bebas merupakan fungsi ….
A. eksplisit
B. implisit

9) Fungsi $y^2x_5-y\sin(x_2^3)+x_1x_4^2=x_2^5x_1-9x_5$, dengan y variabel **tak bebas** merupakan fungsi eksplisit atau implisit?

10) Fungsi $w=2x^2yw-yz^2w-10$, dengan w variabel **tak bebas** merupakan fungsi eksplisit atau implisit?

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B
2) D
3) C
4) A
5) C
6) B
7) D
8) A
9) C
10) B
11) B
12) A
13) A
14) B
15) B
16) A
17) A
18) B
19) A
20) B

Tes Formatif 2 — Nilai

1) B
2) Diketahui $w = \cos(x^2yz) - \ln(xz^2)$,

   Maka $w(1,\pi,2) = \cos\ (1^2)(\pi)(2^2)\ - \ln\ (1)(2^2)$ (1)

   $= \cos(4\pi) - \ln(4)$ (1)

   $= 1 - \ln 4$. (1)
3) A
4) C
5) D
6) C
7) A
8) B
9) $y^2x_5 - y\sin(x_2^3) + x_1x_4^2 = x_2^5x_1 - 9x_5$

   $y^2 - y\quad x_5 - \sin(x_2^3)\ = x_2^5x_1 - 9x_5 - x_1x_4^2$ (1)

   $y(y-1)\ x_5 - \sin(x_2^3)\ = x_2^5x_1 - 9x_5 - x_1x_4^2$ (1)

   $$y = \frac{x_2^5x_1 - 9x_5 - x_1x_4^2}{(y-1)\ x_5 - \sin(x_2^3)},$$ (1)

   fungsi implisit, karena variabel tak bebas y tidak dapat dibuat terpisah dari variabel bebasnya. (2)

10) $w = 2x^2yw - yz^2w - 10$

$w - 2x^2yw + yz^2w = 10$ (1)

$w(1 - 2x^2y + yz^2) = 10$ (1)

$w = \dfrac{10}{(1 - 2x^2y + yz^2)}$, (1)

fungsi eksplisit, karena variabel tak bebas w dapat dibuat terpisah dari variabel bebasnya. (2)

Daftar Pustaka

Goldstein, L.J., Lay, D.C., & Schneider, D.I. (2001). *Calculus and its applications* (9th ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Howard, A. (1992). *Calculus with analitic geometry*. New York: John Wiley & Sons.

Leithold. (1988). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik*. Alih bahasa S.M. Nababan dkk., edisi kelima Jilid 3. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2004). *Kalkulus* Jilid 2. Alih bahasa Ir. Julian Gressando, M.Sc. Jakarta: Erlangga.

Stein, S.K., & Barcelolos, A. (1992). *Calculus and analytic geometry* (5th ed.). New York: McGraw-Hill, Inc.

Varberg, D., Purcell, E.J., & Rigdon, S.E. (2007). *Calculus* (9th ed.). USA: Pearson Education, Inc.

Weir, M.D., & Hass, J. (2010). *Thomas' calculus* (12th ed.). Boston: Pearson Education, Inc.