MODUL 1

Ruang Vektor Real

Drs. R.J. Pamuntjak, M.Sc.

PENDAHULUAN

Pada bagian pertama Modul 5 Aljabar Linear Elementer I sudah kita bahas sepuluh sifat untuk R^2 dan R^3 mengenai penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Telah disinggung pula bahwa kesepuluh sifat itu mencirikan ruang vektor real.

Pada modul ini akan kita bahas ruang vektor real yang lain. Sebagai perluasan langsung dari R^2 dan R^3 adalah R^n untuk $n \geq 3$ yang memenuhi ke sepuluh sifat itu. Contoh-contoh lain, seperti ruang matriks, ruang fungsi, dan lain-lain akan dikemukakan pula di sini.

Pengertian penting pada ruang vektor seperti ruang bagian, kombinasi linear, basis, dan dimensi akan kita telaah untuk ruang vektor real yang umum.

Setelah mempelajari modul ini Anda akan dapat, memahami ruang vektor real beserta sifat-sifatnya dan menyelesaikan masalah sederhana berkaitan dengan pengertian penting seperti ruang bagian linear, kombinasi linear, kebebasan linear, basis dan dimensi.

Lebih khusus lagi, Anda diharapkan dapat:

1. menetapkan apakah suatu himpunan dengan operasi tambah dan hasil kali dengan skalar diberikan ruang vektor real atau bukan;
2. menentukan apakah suatu himpunan bagian dari ruang vektor yang diberikan merupakan ruang bagian atau bukan;
3. menentukan apakah suatu vektor merupakan kombinasi linear dari suatu himpunan berhingga dari vektor yang diberikan;
4. menetapkan apakah himpunan berhingga vektor dalam ruang vektor yang diberikan, membangun ruang vektor itu atau tidak;
5. menetapkan apakah suatu himpunan berhingga vektor bebas linear atau tidak;
6. menetapkan apakah suatu himpunan vektor dalam ruang vektor yang diberikan merupakan basis untuk ruang itu atau tidak;

7. menentukan basis dan dimensi suatu ruang vektor real yang berdimensi berhingga;
8. menentukan basis dan dimensi suatu ruang baris menggunakan eliminasi Gauss pada matriks itu; dan
9. menentukan basis dan dimensi ruang vektor yang dibangun oleh suatu himpunan vektor di R^n, yang merupakan himpunan bagian dari himpunan pembangun itu, dengan cara membuang beberapa vektor dalam himpunan pembangun itu.

KEGIATAN BELAJAR 1

Ruang Vektor dan Ruang Bagian Linear

A. RUANG VEKTOR

Pada Modul 5 Aljabar Linier Elementer I sudah disimpulkan bahwa ruang vektor $V = R^3$ memenuhi sifat berikut:
Untuk setiap vektor **a**, **b**, **c** $\in V$ dan $s, t \in R$ berlaku:

1)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$	Tertutup (terhadap +)
2)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	Komutatif
3)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	Asosiatif
4)	$\exists\, \mathbf{0} \in V \ni \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	Kewujudan vektor nol
5)	$\exists\, -\mathbf{a} \in V \ni -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$	Kewujudan invers
6)	$s\mathbf{a} \in V$	Tertutup terhadap perkalian dengan skalar
7)	$s(t\,\mathbf{a}) = (s\,t)\,\mathbf{a}$	
8)	$s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$	Distributif
9)	$(s + t)\,\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$	"
10)	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	

Sekarang pandang himpunan V yang untuk setiap dua unsurnya dapat dilakukan operasi + dan setiap unsurnya dapat dikalikan dengan skalar sehingga memenuhi sifat (1) sampai dengan sifat (10) di atas. Himpunan seperti itu disebut ruang vektor real atau ruang linear real.

Definisi 1
Himpunan tak kosong V dengan operasi + dan perkalian dengan skalar disebut **ruang vektor** (**linear**) **real**, bila untuk setiap **a**, **b**, **c** $\in V$ dan $s, t \in R$ berlaku sifat (1) sampai dengan (10) di atas.

Contoh 1
Misalkan $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ (n kali) yakni himpunan pasangan (tuple) terurut n bilangan real dan $\mathbf{a} \in R^n$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dengan menggunakan pengertian penjumlahan, perkalian dengan skalar dan kesamaan vektor seperti pada R^3, yakni:

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

(ii) $s\mathbf{a} := (sa_1, sa_2, \ldots, sa_n)$

(iii) $\mathbf{a} = \mathbf{b} := a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

dan sifat-sifat bilangan real dapat dibuktikan, bahwa sifat 1 sampai dengan 10 berlaku untuk R^n. Misalnya untuk sifat-sifat berikut:

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in R^n$ karena $a_i + b_i \in R$,

(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ karena $a_i + b_i = b_i + a_i$,

(3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ karena $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$
$\forall i = 1, 2, \ldots, n$

Sifat-sifat lainnya dapat Anda buktikan sendiri.

Sekarang akan kita tinjau contoh-contoh lain ruang vektor dan contoh himpunan yang bukan ruang vektor.

Contoh 2

Misalkan $V = M_{mn}$ himpunan matriks real $m \times n$. Lihat lagi sifat-sifat penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar pada bagian 2 Modul 1 Aljabar Linear Elementer I dan periksalah sifat 1 sampai dengan 10. Akan ternyata bahwa semua sifat itu dipenuhi, misalnya jika A matriks $m \times n$ maka sA juga matriks $m \times n$, bila A dan B matriks $m \times n$ *maka* $A + B$ juga matriks $m \times n$ dan seterusnya. Jadi himpunan matriks real $m \times n$ adalah ruang vektor real.

Contoh 3

Misalkan $V = \{(x, y, z, u), x \in R, y \geq 0, z \in R, u \in R\}$ bukan ruang vektor karena sifat 6 tidak dipenuhi karena untuk $\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0) \in V$, dan $s = -1$, $s\mathbf{a} = -1\mathbf{a} = -1(0, 1, 0, 0) = (0, -1, 0, 0) \notin V$ karena $y_a = -1 < 0$.

Untuk menunjukkan suatu himpunan bukan ruang vektor, cukup satu saja dari sifat 1 sampai dengan 10 tak dipenuhi. Untuk Contoh 3 ini sesungguhnya sifat 5 juga tak dipenuhi karena vektor $\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)$ tak punya invers karena $(0, -1, 0, 0) \notin V$.

Contoh 4

Misalkan $W = \{ f, \ f: R \to R \}$ himpunan fungsi real yang didefinisikan pada garis real, dengan definisi penjumlahan dan perkalian dengan skalar seperti berikut:

Penjumlahan $f + g$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in R$.
Perkalian dengan skalar sf: $(sf)(x) = s\, f(x), \ \forall x \in R$.
Kesamaan dua fungsi $f = g$: $f(x) = g(x), \ \forall x \in R$.

Sifat 1 dan 6 dipenuhi karena $f + g$ dan sf adalah fungsi real bernilai real. Sifat-sifat lainnya dari ruang vektor dapat dibuktikan menggunakan sifat-sifat bilangan real. Jadi himpunan fungsi real bernilai real adalah ruang vektor. Sebagai vektor nol adalah fungsi konstan yang bernilai 0 untuk setiap bilangan real. Invers dari fungsi f adalah fungsi $-f$ yang di definisikan sebagai berikut:

$(-f)(x) = -f(x) \ \forall x \in R$.

Sifat-sifat 1 sampai dengan 10 dari ruang vektor adalah **sistem aksioma** untuk ruang vektor (atas lapangan koefisien) real. Masing-masing sifat itu disebut aksioma. Dalam matematika, **aksioma** adalah suatu sifat yang kita anggap berlaku yang dijadikan asumsi. Sifat-sifat lainnya yang dapat diturunkan dari sistem aksioma ini disebut **dalil (teorema).** Pada kesempatan ini akan kita bahas beberapa dalil untuk ruang vektor.

Dalil 1

Dalam ruang vektor real :

a) ada tepat satu vektor nol,
b) setiap vektor mempunyai tepat satu vektor invers.

Bukti :

a) Sifat (4) menyatakan ada sekurangnya satu vektor nol. Sekarang tinggal menunjukkan bahwa tak mungkin ada lebih dari satu vektor nol.
Andaikan ada 2 vektor nol: $\mathbf{0}_1$ dan $\mathbf{0}_2$ maka $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$, dan $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.
Karena sifat komutatif (sifat 2) maka $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Jadi, ada tepat satu vektor nol.
b) Sifat (5) menyatakan untuk tiap vektor **a** ada sekurangnya satu vektor invers. Andaikan ada dua vektor invers $-\mathbf{a}_1$ dan $-\mathbf{a}_2$ maka $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}_1) = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}_2) = \mathbf{0}$.
Selanjutnya,

$\{(-\mathbf{a}_2) + \mathbf{a}\} + (-\vec{a}_1) \underset{sifat\ komutatif}{=} \{\mathbf{a} + (-\mathbf{a}_2)\} + (-\mathbf{a}_1) = \mathbf{0} + (-\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_1$

dan $-\mathbf{a}_2 + \{\mathbf{a} + (-\mathbf{a}_1)\} = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{0} = -\mathbf{a}_2$.

Sifat asosiatif $\{(-\mathbf{a}_2) + \mathbf{a}\} + (-\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_2 + \{\mathbf{a} + (-\mathbf{a}_1)\}$ mengakibatkan $-\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$.

Beberapa sifat lainnya dari ruang vektor akan kita nyatakan dalam dalil berikut.

Dalil 2

$\forall$ **a** dan **b** $\in V$ (ruang vektor real) dan s dan $t \in R$, berlaku:

a) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
b) $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
c) $(-s)\,\mathbf{a} = -(s\mathbf{a}) = s(-\mathbf{a})$,
d) Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ maka sekurangnya satu dari $s = 0$ atau $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, berlaku.
e) Jika $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ dan $s \neq 0$ maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$,
f) Jika $s\mathbf{a} = t\mathbf{a}$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ maka $s = t$,
g) $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
h) $\mathbf{a} + \mathbf{a} = 2\,\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} = 3\mathbf{a}$, pada umumnya $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_i = n\mathbf{a}$.

Bukti :

a) Ambil $\mathbf{u} = 0\mathbf{a}$ maka $\mathbf{u} + \mathbf{u} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a} \overset{sifat\ 9}{=} 0\mathbf{a} = \mathbf{u}$. Selanjutnya $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0} = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{u}) = (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, dan $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ terbukti.

b) Ambil $\mathbf{v} = s\mathbf{0}$ maka $\mathbf{v} + \mathbf{v} = s\mathbf{0} + s\mathbf{0} \overset{sifat\ 8}{=} s(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = s\mathbf{0} = \mathrm{v}$. Selanjutnya serupa dengan pembuktian pada butir b).

c) $(-s)\mathbf{a} + s\mathbf{a} \overset{sifat\ 9}{=} (-s+s)\mathbf{a} = 0\mathbf{a}$. Sedangkan pada butir b) sudah terbukti $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$, jadi $(-s)\mathbf{a} + s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sehingga $(-s)\mathbf{a} = -(s\mathbf{a})$ terbukti. Selanjutnya $s\mathbf{0} = s(-\mathbf{a} + \mathbf{a}) = s(-\mathbf{a}) + s\mathbf{a}$. Karena $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (butir b), $s(-\mathbf{a}) + s\mathbf{a} = \mathbf{0}$, jadi $-(s\mathbf{a}) = s(-\mathbf{a})$ terbukti.

d) Butir d) ini ekuivalen dengan berlakunya kedua sifat berikut:
   i) Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ maka $s = 0$
   ii) Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan $s \neq 0$ maka $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Bukti:

i): Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, andaikan $s \neq 0$ maka terdapat $s^{-1} = 1/s \in R$ dan $s^{-1}(s\mathbf{a}) = s^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$

Akan tetapi $s^{-1}(s\mathbf{a}) = (s^{-1}\ s)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} = \mathbf{a},$ yang berarti $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, bertentangan dengan yang diketahui. Jadi terbukti $s = 0$.

ii): Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan $s \neq 0$, andaikan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ maka menurut i) $s = 0$ bertentangan dengan yang diketahui. Jadi $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ terbukti.

e) $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ berarti $s\mathbf{a} - s\mathbf{b} = s(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0},$ $s \neq 0$, menurut d.ii) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ terbukti.

f) Seperti pada butir e) menggunakan hasil pada butir d. ii).

g) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} + \{\mathbf{a} + (-\mathbf{a})\} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$
Jadi terbukti $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b})$. Bahwa yang terakhir ini $= -\mathbf{a} - \mathbf{b}$, hanyalah berdasarkan cara penulisan $\mathbf{p} + (-\mathbf{q}) = \mathbf{p} - \mathbf{q}$.

h) Gunakan sifat (9) dan (10) dari ruang vektor.

Sebagai contoh penggunaan teorema di atas kita pandang Contoh berikut.

Contoh 5

Jika pada sistem aksioma untuk ruang vektor aksioma 5 (sifat 5) diganti dengan 5a) : $\forall\, \mathbf{a} \in V$ berlaku $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan aksioma 10 diganti dengan 10 a): $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ buktikan $1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$

Bukti **:**

$1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \{1 + (-1)\}\mathbf{a} = 0\ \mathbf{a}$ (sifat 9). Sedangkan menurut 10 a) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$ Jadi $1\mathbf{a}$ adalah invers dari $(-1)\mathbf{a}.$ Aksioma 5a) menyatakan bahwa $\mathbf{a}$ juga invers dari $(-1)\mathbf{a}.$ Dengan aksioma-aksioma yang lain perubahan 2 aksioma ini masih memberlakukan ketunggalan invers. (Dalil 1b). Oleh karena itu, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ terbukti.

Sekarang kita pandang sifat 1 dan sifat 6:

i) Bila 1 dan 6 berlaku: 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ dan 2) $s\mathbf{a} \in V$, $\forall\, s \in R$ bila $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in V$.
Jika $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in V$ dan $s, t \in R$ maka menurut sifat 6: $s\mathbf{a}$ dan $t\mathbf{b} \in V$, sedangkan menurut sifat 1 : $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in V$. Selanjutnya

ii) Andaikan berlaku $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in V$; $\forall\, s, t \in R$ bila $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in V$. Sifat 1 adalah hal khusus dari sifat ini: yakni kasus $s = 1$ dan $t = 1$. Sifat 2 adalah kasus $s = 1$ dan $t = 0$.

Selanjutnya jika 1 dan 6 berlaku akan ditunjukkan untuk N asli berlaku:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{u}_i \in V$$

iii) Bila $\boldsymbol{u}_i \in V$ dan $c_i \in R$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, N$.

Kita buktikan dengan induksi matematik (induksi lengkap):

a) $N = 1$: $c_1\mathbf{u}_1 \in V$ karena $c_1 \in R$ dan $\mathbf{u}_1 \in V$ (sifat 6) .

b) Jika $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{u}_i \in V$ akan ditunjukkan $\sum_{i=1}^{k+1} c_i \mathbf{u}_i \in V$

$c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} \in V$ karena,

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{u}_i + c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}.$$

Jadi, berlakunya sifat 1 dan sifat 6 ekivalen dengan berlakunya sifat $s\mathbf{a}+t\mathbf{b} \in V$; $\forall\, s, t \in R$ bila $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in V$ dan ekivalen pula dengan sifat:

Untuk tiap N asli $\sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{u}_i \in V$ bila $\mathbf{u}_i \in V$ dan $c_i \in R$; $\forall\, i = 1, 2, \ldots, N$.

B. RUANG BAGIAN

Pada Modul 5 Aljabar Linear I sudah dibahas ruang bagian linear dari R^3, yaitu garis dan bidang yang melalui titik pangkal koordinat. Pada umumnya jika V ruang vektor, dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar untuk V, himpunan bagian $W \subset V$ dapat merupakan ruang vektor atau tidak. Karena $W \subset V$ sifat 2 sampai dengan 5 dan sifat 7 sampai dengan 10 dipenuhi dengan sendirinya (diwariskan oleh V). Supaya W merupakan ruang vektor yang menjadi masalah adalah apakah sifat 1 dan 6 dipenuhi pula.

Bahwa sifat ini ekivalen dengan sifat:

$S\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in V$; $\forall\, s, t \in R$ bila $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in V$, (sifat #: ketertutupan terhadap kombinasi linear) sudah dibuktikan sebelum ini.

Dengan demikian, kita telah mengukuhkan/membuktikan dalil berikut:

Dalil 3
Untuk himpunan V dengan penjumlahan tiap dua unsur dan perkalian un-sur dengan skalar berlaku: sifat 1 dan 6 berlaku jika dan hanya jika $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}\in V$ $\forall\, s, t\in R$ bila **a** dan $\mathbf{b}\in V$ (sifat # berlaku).

Jadi bila himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V memenuhi sifat 1 dan 6 (atau sifat #) maka W juga merupakan ruang vektor. Dalam hal ini dikatakan W adalah **ruang bagian** dari V.

Definisi 2
Himpunan bagian tak hampa W dari ruang vektor V disebut **ruang bagian** (**ruang bagian linear**) dari V bila W merupakan ruang vektor dengan penjumlahan dan perkalian skalar untuk V.

Untuk jelasnya pelajari contoh berikut.

Contoh 6
Bila $V = R^n$, periksa apakah himpunan bagian dari V berikut merupakan ruang bagian atau bukan

(i) $W_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 + x_2 = 1\}$,

(ii) $W_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 - 2x_2 = 0\}$,

(iii) $W_3 = \{\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)\}$.

Penyelesaian :

(i) (a) W_1 tidak memenuhi 1 karena : Ambil $\mathbf{a}\in W_1$ maka $a_1 + a_2 = 1$, $\mathbf{b}\in W_1$, $b_1 + b_2 = 1$.
Untuk **a + b** berlaku:
$(a_1+ b_1) + (a_2+ b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$. $\mathbf{a} + \mathbf{b}\notin W_1$ tak dipenuhi. W_1 bukan ruang vektor, jadi bukan ruang bagian dari V, atau

b) W_1 tidak memenuhi 2 karena: Ambil $s = 2$, $s\mathbf{a}\notin W_1$ karena $sa_1 + sa_2 = s(a_1 + a_2) = 2 \neq 1$. Sifat 6 tak dipenuhi. Jadi W_1 bukan ruang vektor.

(ii) W_2 memenuhi 1 dan 6 karena: $\mathbf{a}\in W_2$ **,** $a_1 - 2a_2 = 0$. $\mathbf{b}\in W_2$ **,** $b_1 - 2b_2 = 0$.

$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_2$ **,**

karena: $((a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2) = (a_1 - 2a_2) + (b_1 - 2b_2) = 0 + 0 = 0$, dan selanjutnya: $s \in R$, $\mathbf{a} \in W_2$, $s\mathbf{a} \in W_2$ karena $sa_1 - 2sa_2 = s(a_1 - 2a_2) = s0 = 0$

Jadi W_2 ruang bagian dari R^n.

(iii) $W_3 = \{\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)\}$memenuhi 1 dan 6 karena $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Jadi, W_3 merupakan ruang vektor. Perhatikan bahwa W_3 ini merupakan ruang bagian yang sangat khusus yaitu hanya memuat tepat satu vektor saja.

Sudah kita lihat bahwa ketika memeriksa apakah himpunan bagian W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V, sifat 2 sampai dengan 5 dan sifat 7 sampai dengan 10 dari ruang vektor dipenuhi oleh $W \subset V$. Yang perlu diperiksa lagi adalah sifat 1 dan sifat 6 (atau sifat #) yakni sifat ketertutupan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Jadi dalil berikut berlaku.

Dalil 4

Himpunan bagian tak hampa W dari ruang vektor V adalah ruang bagian dari V jika dan hanya jika W memenuhi sifat 1 dan 6 (atau sifat #) dari ruang vektor.

Bukti :

a) Jika W ruang bagian linear dari V menurut definisi W memenuhi sifat 1 sampai dengan 10 dari ruang vektor jadi memenuhi sifat 1 dan 6 (juga sifat #).

b) Andaikan W himpunan bagian dari V yang memenuhi sifat 1 dan 6 (atau sifat #). Maka karena $W \subset V$, W memenuhi sifat 2 sampai dengan 5 dan 7 sampai dengan 10. Dengan demikian W memenuhi sifat 1 sampai dengan 10 dari ruang vektor, Jadi W ruang bagian dari V.

Untuk menunjukkan bahwa W bukan ruang bagian, kita menggunakan kontraposisi dalil 4 dengan menunjukkan bahwa: ***Jika*** terdapat $s \in R$ dan $\mathbf{a} \in W$ dengan $s\mathbf{a} \notin W$, atau terdapat $\mathbf{a} \in W$ dan $\mathbf{b} \in W$ dengan $\mathbf{a}+\mathbf{b} \notin W$ maka W ruang bagian dari V .

Untuk menunjukkan bahwa W ruang bagian, kadang-kadang menunjukkan sifat # dipenuhi akan sedikit lebih menguntungkan, misalnya untuk menunjukkan $W_3 = \{\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)\}$ruang bagian dari R^n (Contoh 6): Kita langsung menunjukkan bahwa $s\mathbf{0} + t\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ menggunakan dalil 2.

Di samping itu, dari dalil 2 (butir a) dan dalil 4 dapat kita buktikan dalil berikut:

Dalil 5
Jika W ruang bagian dari V maka $\mathbf{0} \in W$ (unsur satuan pada penjumlahan di V).

Bukti :
W ruang bagian dari V, menurut dalil 4 $\forall\ \mathbf{a} \in W$ dan $s \in R$, $s\mathbf{a} \in W$. Ambil $s = 0$ maka $0\mathbf{a} \in W$. Sedangkan menurut butir a) dalil 2 , $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Dengan demikian $\mathbf{0} \in W$ terbukti.

Kontraposisi dalil ini: Jika $\mathbf{0} \notin W$ maka W bukan ruang bagian dari W. Fakta ini sangat ampuh untuk menunjukkan suatu himpunan bagian bukan ruang vektor.

Untuk memantapkan pemahaman Anda pelajarilah contoh-contoh berikut.

Contoh 7
Periksa apakah himpunan bagian W berikut merupakan ruang bagian dari ruang vektor V yang diberikan. (Tunjukkan bahwa himpunan itu ruang bagian atau bukan ruang bagian). A adalah matriks $m \times n$.

(i) $W = \{\mathbf{x}, A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$, $V = R^n$.
(ii) $W = \{\mathbf{x}, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$,
(iii) $W = \{f \mid f\colon R \to R, f(0) - 2f(1) = 0\}$, $V = \{ f \mid f\colon R \to R \}$.
(iv) $W = \{ f \mid f\colon R \to R, f(0) + f(1) = 1\}$, $V = \{ f \mid f\colon R \to R \}$.

Penyelesaian :

(i) Ambil $\mathbf{u} \in W$, dan $\mathbf{v} \in W$ maka $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, dan $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
$A(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = sA\mathbf{u} + tA\mathbf{v} = s\mathbf{0} + t\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$
Maka $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \in W$, menurut dalil 4, W ruang bagian dari R^n. Hal ini akan kita singgung lagi ketika membahas lanjutan modul ini.

(ii) Menggunakan (kontraposisi) dalil 4: $\mathbf{a} \in W$, dan $s = 2$ maka $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $A(2\mathbf{a}) = 2\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$ karena $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Jadi $2\mathbf{a} \notin W$. Dengan demikian sifat 6 tak dipenuhi W sehingga W bukan ruang bagian.

(iii) Menggunakan dalil 4: Ambil $f \in W$, dan $g \in W$ maka $f(0) - 2f(1) = 0$, dan $g(0) - 2g(1) = 0$. $(f + g)(0) - 2(f + g)(1) = f(0) + g(0) - 2(f(1) + g(1)) = f(0) - 2f(1) + g(0) - 2g(1) = 0 + 0 = 0$. Maka $f + g \in W$.

Ambil $s \in R$, $(sf)(0) - 2(sf)(1) = sf(0) - 2sf(1) = s(f(0)-2f(1)) = s0 = 0$, yang berarti $sf \in W$, jadi sifat 6 dipenuhi. Menurut dalil 3 W ruang bagian dari V.

(iv) Menggunakan dalil 5: Vektor **0** untuk W adalah fungsi k yang memenuhi $k(x) = 0$, $\forall x \in R$.
$k(0) + k(1) = 0 + 0 = 0 \neq 1$. Maka $\mathbf{0} \notin W$, jadi W bukan ruang bagian. Gunakan dalil 4: Ambil $s = 2$, $f \in W$, $(2f)(0) + (2f)(1) = 2f(0) + 2f(1) = 2(f(0) + f(1)) = 2 \times 1 = 2 \neq 1$.

Contoh 8

Tunjukkan bahwa himpunan matriks segitiga atas berukuran 2×2 merupakan ruang bagian dari ruang matriks real 2×2.

Penyelesaian :

Himpunan matriks segitiga atas berukuran 2×2 dapat dituliskan sebagai berikut: $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{21} = 0 \right\}$. Pandang matriks P dan $Q \in W$ maka $p_{21} = q_{21} = 0$.

Bila $R = sP + tQ$, $s, t \in R$ maka $r_{21} = s\,p_{21} + t\,q_{21} = s0 + t0 = 0$.

Jadi $sP + tQ \in W$.

Contoh 9

Tunjukkan bahwa:

(i) $W = \{ f \mid f : R \to R, f(x) = a + b\cos x + c\sin x, a, b, c, \in R\}$,

(ii) $U = \{ f \mid f : R \to R, f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, a, b, c, d \in R\}$ merupakan ruang vektor.

Penyelesaian :

Untuk U dan W kita manfaatkan kenyataan bahwa keduanya adalah himpunan bagian dari ruang vektor $V = \{ f \mid f: R \to R \}$.

(i) Ambil $f(x) = a + b\cos x + c\sin x$, $g(x) = p + q\cos x + r\sin x$,
maka $(f + g)(x) = a + p + (b + q)\cos x + (c + r)\sin x$, jadi $f + g \in W$.
Selanjutnya $(sf)(x) = sa + sb\cos x + sc\sin x$.
Dengan demikian $sf \in W$, jadi W ruang bagian dari V.

(ii) Ambil f dan $g \in U$.

Tuliskan $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, $g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, kemudian seperti pada butir (i) tunjukkan bahwa $f + g \in U$ dan $sf \in U$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Periksa sifat-sifat mana saja dari 10 sifat ruang vektor yang berlaku dan yang mana pula yang tak berlaku untuk himpunan dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang diberikan berikut ini.
   a) $U = R^3$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1+b_1, 0, a_3+b_3)$, $s\mathbf{a} = (a_1, sa_2, sa_3)$
   b) $U = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}, a \in R \right\}$, penjumlahan dan perkalian dengan skalar di M_{22}.
2) Buktikan bahwa:
   a) Jika $s \neq 0$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ **maka** $s\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
   b) Jika $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ dan $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ maka $s = 0$.
3) Periksa, apakah himpunan berikut dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar di R^4 merupakan ruang vektor atau bukan.
   a) W = himpunan jawab sistem persamaan linear:
   $2x - y + u = 0$, $x + y + z = 0$.
   b) $W = \{(x, y, z, u) \mid x - y = 0, y - z - u = 1\}$.
   c) $W = \{(x, y, z, u) \mid x - y < 0, y - z - u = 0\}$.
4) Bila W dan V seperti yang diberikan, tunjukkan bahwa V ruang vektor dan W ruang bagian dari V atau tidak.
   a) $V = P_3$:= himpunan semua fungsi polinom koefisien real berpangkat lebih kecil atau sama dengan ($\leq$) 3,
   $W = \{ p \mid p(x) = 1 + ax + bx^3, a \in R, b \in R\}$.
   b) $V = P_3$, $W = \{ q \mid q(x) = a - bx^3, a \in R, b \in R \}$
   c) $V = PT_2 = \{ g \mid g(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x$.
   d) $W = \{r \mid r(x) = 2a\cos^2 x - b\sin x, a \in R, b \in R \}$.(Nyatakan dulu $\cos^2 x$ dalam $\cos 2x$)
   e) $V = PT_2$, $W = \{ f \mid f(x) = 2\sin^2 x - a\sin x, a \in R\}$. (Nyatakan dulu $\sin^2 x$ dalam $\cos 2x$)

5) Bila V = himpunan semua matriks real 2×2 dan W himpunan matriks berikut, tunjukkan bahwa W ruang bagian dari V atau bukan.
   a) W = Himpunan semua matriks segitiga bawah berukuran 2×2.
   b) $W = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, a \in R, b \in R \right\}$,
   c) $W = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2a & 0 \end{bmatrix}, a \in R \right\}$.
   d) $W = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a \in R, b \in R \right\}$.

6) Bila $V = \{ f \mid f: R \to R \}$, periksa apakah himpunan W berikut merupakan ruang bagian dari V atau bukan.
   a) $W = \{ f \mid f \in V, f(0) = 2f(2) \}$.
   b) $W = \{ f \mid f \in V, f(0) + f(1) = 2 \}$.
   c) $W = \{ f \mid f \in V, f(-x) = 1 - f(x), \forall x \in R \}$.
   d) $W = \{ f \mid f \in V, f(x) = f(-x), \forall x \in R \}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) Yang tidak dipenuhi adalah sifat 9: $(s + t)\mathbf{a} = (a_1, (s+t)a_2, a_3)$, sedangkan $s\mathbf{a} + t\mathbf{a} = (a_1, sa_2, a_3) + (a_1, ta_2, a_3) = (2a_1, 0, 2a_3)$. Jadi $(s + t)\mathbf{a} \neq s\mathbf{a}+t\mathbf{a}$.
   b) Yang tak dipenuhi sifat 1 dan 6:
   Ambil $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$, $A + B = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 0 & 2(a+b) \end{bmatrix} \notin U$.
   Ambil $s = 2$, $sA = \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 0 & 4a \end{bmatrix} \notin U$.

2) a) Andaikan $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ maka menurut butir d Dalil 2, sekurangnya satu dari: $s = 0$ atau $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ berlaku. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui: $s \neq 0$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Jadi pengandaian $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tidak benar sehingga haruslah $s\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
   b) Andaikan $s \neq 0$ karena $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$, menurut butir e Dalil 2, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui yakni $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Pengandaian $s \neq 0$ tidak benar, jadi haruslah $s = 0$.

3) W himpunan bagian dari R^4 yang perlu ditunjukkan hanyalah berlakunya sifat 1 dan 6.

a) Ambil $\mathbf{a} = (x, y, z, u) \in W$, maka $2x - y + u = 0$ dan $x + y + z = 0$, $\mathbf{b} = (a, b, c, d) \in W$, $2a - b + d = 0$, dan $a + b + c = 0$.
Pandang $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (x + a, y + b, z + c, u + d)$, harus dibuktikan :
$2(x+a) - (y+b) + (u+d) = 0$, dan $(x + a) + (y + b) + (z + c) = 0$.
$2(x + a) - (y + b) + (u + d) = 2x - y + u + 2a - b + d = 0 + 0 = 0$.
$(x + a) + (y + b) + (z + c) = x + y + z + a + b + c = 0 + 0 = 0$.

b) Untuk menunjukkan W bukan ruang bagian cukup ditunjukkan sifat 1 atau 6 tak berlaku. Misalkan $\mathbf{a} = (x, y, z, u) \in W$ maka $x - y = 0$ dan $y - z - u = 1$.
Ambil $s = 2$ maka $s\mathbf{a} = (2x, 2y, 2z, 2u)$ dan $2y - 2z - 2u = 2 \neq 1$. Jadi $s\mathbf{a} \notin W$. Maka W bukan ruang bagian.

c) Akan ditunjukkan sifat 6 tak berlaku.
Ambil $s = -1$ maka $s\mathbf{a} = (-x, -y, -z, -u)$, dan $sx - sy = -1(x - y) > 0$ karena $x - y < 0$. Maka $s\mathbf{a} \notin W$. Jadi W bukan ruang bagian.

4) P_3 dan PT_2 dapat dipandang sebagai himpunan bagian dari ruang fungsi $V = \{f \mid f : R \to R\}$. Menunjukkan bahwa P_3 dan PT_2 ruang vektor berarti menunjukkan keduanya ruang bagian dari V. Jadi hanya tinggal menunjukkan sifat 1 dan karena sifat 6 berlaku untuk P_3 dan PT_2.
Untuk $P_3 : p \in P_3$ berarti $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, 3$
Andaikan $q \in P_3$ maka $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, $b_i \in R$, $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$, $a_i + b_i \in R$.
Jadi 1 dipenuhi. $(sp)(x) = sa_0 + sa_1 x + sa_2 x^2 + sa_3 x^3$, $sa_i \in R$, 6 dipenuhi.
Maka P_3 ruang bagian dari V, jadi merupakan ruang vektor. Bahwa PT_2 merupakan ruang vektor, dapat ditunjukkan dengan cara yang serupa dengan yang dilakukan untuk P_3.

a) Sesungguhnya $W = \{p \mid p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_0 = 1, a_2 = 0, a_1 \in R, a_3 \in R\}$. Sifat 6 tak dipenuhi karena untuk $s = 2$, $(sp)(x) = 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3$, koefisien untuk x adalah $2a_0 = 2 \neq 1$. Jadi $sp \notin W$, sehingga 6 tak dipenuhi, W bukan ruang bagian dari $V = P_3$.

b) $W = \{q \mid q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_1 = 0, a_2 = 0, a_0 \in R, a_3 \in R\}$.
Ambil $p(x) = a - bx^3$, $q(x) = r - tx^3$, $(p + q)(x) = (a + r) - (b + t)x^3$, $p + q \in W$ dan $(sp)(x) = sa - sbx^3$, $sp \in W$. Jadi 1 dan 6 dipenuhi, sehingga W ruang bagian dari P_3.

c) $r(x) = 2a\cos^2 x - b\sin x = 2a \times \frac{1}{2}(1+\cos 2x) - b\sin x = a + a\cos 2x - b\sin x$.

Ambil $m(x) = c + c\cos 2x - d\sin x$, $(m + r)(x) = (a+c) + (a+c)\cos 2x - (b+d)\sin x$ maka $m+r \in W$ dan $sr(x) = sa + sa\cos 2x - sb\sin x$, $sr \in W$. Maka W ruang bagian dari PT_2.

d) $f(x) = 2\sin^2 x - a\sin x = 1 - \cos 2x - a\sin x$, $(2f)(x) = 2 - 2\cos 2x - 2a\sin x$, $2f \notin W$, sifat 6 tak dipenuhi sehingga W bukan ruang bagian dari PT_2.

5) Ruang vektor kita $V = M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \text{ real} \right\}$, yang akan kita tinjau adalah himpunan bagian $W \subset V$.

a) Bila W himpunan (semua) matriks segitiga bawah maka:

$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, c, d \text{ real}, \right\}$.

Ambil $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} p & 0 \\ r & s \end{bmatrix} \in W$.

Maka $A + B = \begin{bmatrix} a+p & 0 \\ c+r & d+s \end{bmatrix} \in W$.

Selanjutnya $sA = \begin{bmatrix} sa & 0 \\ sc & sd \end{bmatrix} \in W$. Jadi W ruang bagian dari V.

b) Ambil $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ dan $s = 2$, maka $sA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \notin W$ karena $b = 2 \neq 1$.

Jadi W bukan ruang bagian dari V.

c) Ambil $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \in W$ dan $s = 2$ maka $sA = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \notin W$ karena $a_{11} = 2 \neq 1$.

Maka W bukan ruang bagian dari V.

d) Apabila $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \text{ real} \right\}$, ambil $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix} \in W$ maka $A+B = \begin{bmatrix} a+p & -(b+q) \\ b+q & a+p \end{bmatrix} \in W$ dan $sA = \begin{bmatrix} sa & -sb \\ sb & sa \end{bmatrix} \in W$. Jadi W ruang bagian dari V.

6) $V = \{ f \mid f: R \to R \}$.
   a) Ambil f dan $g \in W$ maka $f(0) = 2f(2)$, dan $g(0) = 2g(2)$.
      $sf(0) = 2sf(2) = 2(sf)(2)$ maka $sf \in W$.
      $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 2f(2) + 2g(2) = 2(f+g)(2)$ maka $f + g \in W$. Jadi W ruang bagian dari V.
   b) Ambil $f \in W$ maka $f(0) + f(1) = 2$, dan $(sf)(0) + (sf)(1) = sf(0) + sf(1) = s(f(0) + f(1)) = 2s$. Jika $s = 2$ maka $(2f)(0) + (2f)(1) = 4 \neq 2$, $sf \notin W$, dan W bukan ruang bagian dari V.
   c) $f \in W$ maka $f(-x) = 1 - f(x)$. $(2f)(-x) = 2(1 - f(x)) = 2 - (2f)(x) \neq 1 - f(x)$. Jadi $2f \notin W$ sehingga W bukan ruang bagian dari V.
   d) Ambil $f \in W$ dan $g \in W$ maka $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$, jadi $f + g \in W$. $(sf)(x) = sf(x) = sf(-x) = (sf)(-x)$ maka $sf \in W$. Jadi W ruang bagian dari V.

RANGKUMAN

Kegiatan belajar ini mencakup pengertian Ruang Vektor dan Ruang Bagian.

- **Ciri ruang vektor**
  Untuk setiap vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ dan $s, t \in R$ berlaku:

1)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$	Tertutup (terhadap +)
2)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	Komutatif
3)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	Asosiatif
4)	$\exists\, \mathbf{0} \in V \ni \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	Kewujudan vektor nol
5)	$\exists\, -\mathbf{a} \in V \ni -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$	Kewujudan invers
6)	$s\mathbf{a} \in V$	Tertutup terhadap perkalian dengan skalar
7)	$s(t\,\mathbf{a}) = (s\,t)\,\mathbf{a}$	
8)	$s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$	Distributif
9)	$(s + t)\,\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$	"
10)	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	

- **Sifat-sifat penting ruang vektor**
  Setiap ruang vektor mempunyai tepat satu vektor nol dan setiap vektor mempunyai tepat satu invers terhadap penjumlahan.

Untuk bilangan real s dan t serta vektor **a** dan **b** berlaku:

- $0\mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $(-s)\mathbf{a} = -(s\mathbf{a}) = s(-\mathbf{a})$
- Jika $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ maka $s = 0$ atau $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
- Jika $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ dan $s \neq 0$ maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- Jika $s\mathbf{a} = t\mathbf{a}$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ maka $s = t$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

- **Ruang bagian**

  Ruang bagian dari suatu ruang vektor V adalah himpunan bagian $W \subset V$ yang merupakan ruang vektor dengan penjumlahan dan perkalian skalar pada V.
- **Sifat-sifat penting ruang bagian**

  a. Himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V adalah ruang bagian dari V jika dan hanya jika W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada V.

  b. Himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V adalah ruang bagian dari V jika dan hanya jika W tertutup terhadap kombinasi linear.

  c. Jika W ruang bagian dari V maka W memuat vektor nol pada V.

TES FORMATIF 1

Jawablah pertanyaan berikut ini!

1) Untuk himpunan S dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang diberikan, tentukan sifat-sifat ruang vektor yang dipenuhi dan yang tidak.

   a) $S = \{(x, y, z, u) \mid x + y + u = 1\}$dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar di R^4

   b) $S = \{f \mid f: R \to R, f(x) = -f(1 - x)\ \forall x \in R$ dengan operasi vektor di ruang fungsi real bernilai real.

2) Bila $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ dan $s, t \in R$ untuk pernyataan berikut periksa mana yang benar dan mana yang tidak dan beri alasan untuk jawab Anda.

   a) Jika $s\mathbf{a} = t\mathbf{a}$ maka $s = t$.

   b) Jika $s\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

   c) Jika $s\mathbf{b} = t\mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ maka $s = t$.

3) Tunjukkan bahwa himpunan $W \subset V$ berikut dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar di ruang vektor V merupakan ruang bagian atau bukan.

a) $W = \{g \mid g(x) = a - 4a\sin x\cos x - b\sin^2 x,\ a \in R,\ b \in R\ \},\ V = PT_2$. (Gunakan dulu rumus-rumus trigonometri).

b) $W = \{p \mid p(x) = a - ax^2 + x^3\ \forall x \in R\},\ V = P_3$.

4) Gunakan jalan paling singkat untuk menunjukkan bahwa himpunan bagian W dari ruang vektor V ruang berikut tidak merupakan ruang bagian.

a) $W = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & -a \\ 1-a & 0 \end{bmatrix} \right\}$, V = himpunan matriks 2×2.

b) $W = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (1 + p, 1 - p^2\},\ V = R^2$.

5) Pandang $S = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = (a, a^2 - 1),\ a \in R\}$sebagai himpunan bagian dari R^2. Apakah $\mathbf{0} = (0, 0) \in S$? Periksa apakah S merupakan ruang bagian dari R^2. Apakah hasil ini tak bertentangan dalil 5? Jelaskan jawab Anda!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Kombinasi Linear dan Kebebasan Linear

A. KOMBINASI LINEAR DAN BENTANG LINEAR

Konsep kombinasi linear telah mulai disinggung pada pembahasan R^2 dan R^3 pada Modul 5 Aljabar Linear Elementer 1. Syarat perlu dan cukup untuk suatu himpunan bagian W dari ruang vektor V merupakan ruang bagian dari V seperti yang dinyatakan dengan Dalil 3 dan Dalil 4 sesungguhnya menyangkut ketertutupan terhadap kombinasi linear dua vektor dalam W. Pengertian kebebasan linear berkaitan dengan kombinasi linear. Semuanya ini diperlukan dalam membahas basis dan dimensi ruang vektor.

Definisi 1

Vektor $\mathbf{v} \in V$ disebut **kombinasi linear** dari m buah vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ pada V, bila terdapat bilangan real $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sehingga $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} s_i \, \mathbf{u}_i$.

Dikatakan juga: $\mathbf{v}$ kombinasi linear dari himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$.
Bila $1 \leq k \leq m$, jelaslah $\mathbf{u}_k$ kombinasi linear dari $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ karena $\mathbf{u}_k = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 1\mathbf{u}_k + \ldots + 0\mathbf{u}_m$.
Pandang $V = R^n$. Pemeriksaan apakah $\mathbf{v}$ kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, berarti memeriksa adakah bilangan-bilangan real $s_1, s_2, \ldots, s_m$ yang memenuhi $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} s_i \, \mathbf{u}_i$. Dengan $\mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots m$,

maka: $$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\mathbf{v}$ kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ *jika dan hanya jika* sistem persamaan linear di atas punya jawab.

Contoh 1

a) Apakah $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$?

Untuk menjawab pertanyaan ini kita harus memeriksa ada atau tak adanya jawab sistem persamaan linear $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ yang kita lakukan dengan melaksanakan eliminasi Gauss seperti berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_2-2B_1 \\ B_3+B_1 \\ B_4-B_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_4 \leftrightarrow B_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{B_3-3B_2 \\ B_4+3B_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{6}B_3 \\ \frac{1}{5}B_4+\frac{1}{6}B_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, sistem persamaan linear itu tak punya jawab, yang berarti $\mathbf{v}$ bukan kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$.

b) Apakah $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$ pada butir a) ?

Penyelesaian :

Kita lakukan eliminasi Gauss pada matriks lengkap sistem persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_2-2B_1 \\ B_3+B_1 \\ B_4-B_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2 \leftrightarrow B_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_3-3B_2 \\ B_4+3B_2}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan punya jawab karena unsur 1 terkiri tiap baris tak nol pada matriks eselon tak ada yang terletak pada kolom terakhir. Jadi $\mathbf{w}$ kombinasi linear dari $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$.

Contoh 2

a) Bila $p_0(x) = 1 + x$, $p_1(x) = -x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = x - x^2$, apakah setiap polinom berpangkat kurang atau sama dengan 2 merupakan kombinasi linear dari p_0, p_1, p_2, dan p_3?

b) Tunjukkan bahwa polinom berpangkat kurang atau sama dengan 2 merupakan kombinasi linear dari q_0, q_1, q_2 yang memenuhi $q_0(x) =1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x^2$, $\forall x \in R$.

Penyelesaian :

a) Polinom berpangkat kurang atau sama dengan 2 dapat dituliskan sebagai $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in R$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat s_0, s_1, s_2 , s_3 real sehingga $a_0 + a_1x + a_2x^2 = s_0 (1 + x) + s_1 (-x) + s_2 (1 + x^2) + s_3 (x - x^2)$; $\forall x \in R$.

Menyamakan koefisien untuk x^0 pada ruas kiri dengan yang pada ruas kanan menghasilkan

$$a_0 = s_0 + s_2$$

Menyamakan koefisien untuk x^1, diperoleh

$$a_1 = s_0 - s_1 + s_3$$

Menyamakan koefisien untuk x^2 didapat

$$a_2 = s_2 - s_3$$

Dengan demikian matriks lengkap sistem persamaan itu beserta pengerjaan eliminasi Gauss untuk mendapatkan matriks eselonnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2-B_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)B_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & a_0-a_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Apa pun nilai a_0, a_1, a_2 matriks eselon ini tidak mempunyai baris tak nol yang unsur satu terkirinya terletak pada kolom terakhir. Jadi sistem persamaan untuk s_0, s_1, s_2 , s_3 ini selalu mempunyai solusi berapa pun nilai a_0, a_1, a_2. Maka $a_0 + a_1x + a_2x^2$ kombinasi linear dari p_0, p_1, p_2, dan p_3 sehingga setiap polinom berpangkat kurang atau sama dengan 2 adalah kombinasi linear dari p_0, p_1, p_2, p_3.

b) Dengan mudah dapat dilihat bahwa polinom berpangkat kurang atau sama dengan 2 adalah juga kombinasi linear dari q_0, q_1, q_2 yang memenuhi $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$,
$q_2(x) = x^2, \forall x \in R$.
Di sini koefisien s_0, s_1, s_2 adalah persis a_0, a_1, a_2.
Pada umumnya dapat dikatakan bahwa bila V ruang vektor dan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$, himpunan semua kombinasi linear dari $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ itu membentuk ruang bagian W dari V, dan W adalah ruang bagian terkecil yang memuat $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, setiap ruang bagian lain yang memuat himpunan vektor ini pasti memuat W.

Dalil 1

Jika V ruang vektor dan $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$,
maka:

a) Himpunan W dari semua kombinasi linear $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ adalah ruang bagian dari V.
b) W ruang bagian terkecil yang memuat S.

Bukti :

a) i) Jika $\mathbf{a} \in W$ maka $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m} s_k \ \mathbf{u}_k \in V$,

ii) Jika **a** dan **b** $\in W$ maka $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k$, $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{m} t_k\, \mathbf{u}_k$ sehingga

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{m} (s_k + t_k)\, \mathbf{u}_k.$$

$r\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m} r\, \mathbf{u}_k$. Jadi **a**+**b** dan r**a** merupakan kombinasi linear dari $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ atau $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in W$ dan $r\mathbf{a} \in W$. Karena i) dan ii) maka W ruang bagian dari V.

b) Andaikan U ruang bagian yang memuat S maka U memuat setiap kombinasi linear dari S .
Jadi $W \subset U$.

Ruang bagian W seperti yang disebut pada dalil di atas dikatakan dibangun atau dibentang oleh $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$, dan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ disebut himpunan pembangun dari W.

Definisi 2

Jika V ruang vektor, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset V$, ruang vektor W yang merupakan himpunan semua kombinasi linear dari S disebut ruang vektor yang **dibangun oleh** atau **bentang linear** dari S, biasa dituliskan dengan notasi W = span(S), dan S disebut **himpunan pembangun** (pembentang) ruang vektor W.

Jadi himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset V$: adalah himpunan pembangun dari ruang vektor W jika dan hanya jika: setiap unsur W adalah kombinasi linear dari S, dan W memuat semua kombinasi linear dari S atau sistem persamaan $\sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k = \mathbf{w}$ mempunyai jawab $\forall \mathbf{w} \in W$, dan $\sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k \subset W$.

Contoh 3

a) Di R^3, U adalah ruang yang dibangun oleh $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Tunjukkan bahwa:

i) $P = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

ii) $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ juga himpunan pembangun dari *U*.

b) Perlihatkan bahwa himpunan berikut bukan himpunan pembangun dari ruang vektor *U*:

i) $K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, ii) $L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Penyelesaian:

a) i)

* Harus dibuktikan bahwa setiap unsur *P* adalah kombinasi linear dari *S*:
Sistem persamaan

$$s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ punya jawab $\forall p$ dan q real.

Eliminasi Gaussnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & p-2q \\ 2 & 4 & 2p \\ 0 & -1 & -p+q \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2+2B_1]{-B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p+2q \\ 0 & 4 & 4p-4q \\ 0 & -1 & -p+q \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[B_3+\frac{1}{4}B_2]{\frac{1}{4}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p+2q \\ 0 & 1 & p-q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa sistem persamaan itu punya jawab untuk tiap nilai *p* dan *q*, yakni s = –*p* + 2*q*,
t = *p* – *q*.

* Selanjutnya harus ditunjukkan pula bahwa *U* memuat semua kombinasi linear dari *P*:

$$s\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}\in U,\ \ \forall s \text{ dan } t \text{ real.}$$

Ini berarti sistem $p\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}$

mempunyai jawab $\forall$ s dan t real.

Eliminasi Gauss untuk matriks lengkap sistem persamaan ini adalah seperti berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -s\\2 & 0 & 2s+4t\\-1 & 1 & -t\end{bmatrix}\xrightarrow[B_3+B_1]{B_2-2B_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & -s\\0 & 4 & 4s+4t\\0 & -1 & -s-t\end{bmatrix}\xrightarrow[B_1+\frac{1}{4}B_2]{\frac{1}{4}B_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -s\\0 & 1 & s+t\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

yang berarti bahwa sistem persamaan mempunyai jawab $\forall$ s dan t real. Setiap unsur U adalah kombinasi linear dari P.

Dengan demikian terlihat bahwa setiap unsur U adalah kombinasi linear dari P dan U memuat semua kombinasi linear dari P.

ii) Akan ditunjukkan bahwa tiap vektor $\mathbf{u}\in U$ adalah kombinasi linear dari T, dan U memuat semua kombinasi linear dari T. Untuk membuktikan yang pertama: pada i) diperoleh bahwa setiap unsur U kombinasi linear dari P. U juga kombinasi linear dari T karena:

Ambil $\mathbf{u}\in U$ maka $\mathbf{u}=a\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}-b\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}$.

Bahwa U memuat semua kombinasi linear dari T adalah karena:

Ambil $\mathbf{v}$ kombinasi linear dari T maka $\mathbf{v}=p\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}0\\-4\\1\end{bmatrix}$,

untuk suatu $p, q, r \in U$.

Akan tetapi $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}$, maka

$$\mathbf{v} = -p\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} + p\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix} - q\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} - r\begin{bmatrix}0\\-4\\1\end{bmatrix} = -(p+q)\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} + (p+r)\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}$$

Maka $\mathbf{v}$ kombinasi linear dari P. Jadi $\mathbf{v} \in U$.

b) i) Akan ditunjukkan bahwa ada kombinasi linear dari K yang bukan anggota U, yakni:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} = 0.\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa sistem persamaan $[P]\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = \mathbf{v}$ tak mempunyai jawab.

Eliminasi Gauss untuk matriks lengkap:

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&4&3\\0&-1&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\2&4&3\\0&-1&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&4&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

Baris terakhir mengakibatkan kontradiksi.

ii) Untuk L, $\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} = 0.\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linear L yang tidak dimuat U.

B. KEBEBASAN LINEAR

Himpunan pembangun (pembentang) sangat penting dalam menangani berbagai masalah karena kadang-kadang kita dapat membahas ruang vektor dengan lebih dahulu menelaah vektor-vektor dalam himpunan pembentang-nya, kemudian memperluas hasilnya pada ruang vektor itu.

Sudah kita lihat pada contoh 2 bahwa baik $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ maupun $\{q_0, q_1, q_2\}$ membangun P_2. Pada umumnya tiap ruang vektor mempunyai banyak (lebih dari satu) himpunan pembangun. Kalau kita harus memilih, apakah dasarnya?. Yang unsurnya sesedikit mungkin tentunya akan sangat menguntungkan. Untuk mendapatkan himpunan pembentang begini kita memerlukan pengertian kebebasan linear yang definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 3

a) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan **bebas linear** apabila

$\sum_{k=1}^{m} s_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi oleh $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$.

b) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan **tak bebas linear** (bergantungan linear) jika tidak bebas linear, yakni terdapat $s_1, s_2, \dots, s_m$ yang tak semuanya nol yang memenuhi $\sum_{k=1}^{m} s_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Dalam kalimat lain definisi di atas berarti:

a) Himpunan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan bebas linear jika dan hanya jika sistem persamaan homogen $\sum_{k=1}^{m} s_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ tak mempunyai jawab tak trivial.

b) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan **tak bebas linear** (bergantungan linear) jika dan hanya jika persamaan homogen $\sum_{k=1}^{m} s_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ mempunyai jawab tak trivial.

Dalam memeriksa apakah suatu himpunan vektor bebas linear atau tidak bebas linear, sifat di atas kita buat lebih praktis lagi dalam arti dapat menentukan apa yang akan kita kerjakan untuk menentukan kebebasan linear itu. Untuk itu kita langsung memeriksa matriks eselon untuk matriks koefisien sistem persamaan linear homogen yang berkaitan. Khusus untuk R^n hal itu dapat kita lakukan sebagai berikut.

Kalau $\mathbf{u}_i \in R^n$ kita tuliskan sebagai $\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ maka sistem persamaan linear homogen $\sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k = 0$, menjadi,

$$\begin{aligned} s_1u_{11} + s_2u_{12} + &\cdots + s_mu_{1m} = 0 \\ s_1u_{21} + s_2u_{22} + &\cdots + s_mu_{2m} = 0 \\ &\vdots \\ s_1u_{n1} + s_2u_{n2} + &\cdots + s_mu_{nm} = 0 \end{aligned}$$

Matriks koefisien sistem ini ialah

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m],$$

kolom-kolomnya adalah vektor-vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$. Dengan menggunakan sifat mengenai jawab sistem persamaan linear homogen yang dibahas pada Modul 3 Aljabar Linear Elementer I sifat yang mencirikan kebebasan linear itu dapat kita tuliskan sebagai dalil berikut.

Dalil 2

Pada R^n berlaku

a) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ bebas linear jika dan hanya jika banyaknya baris tak nol pada matriks eselon untuk matriks $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m]$ adalah m.

b) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ tak bebas linear jika dan hanya jika banyaknya baris tak nol pada matriks eselon untuk matriks $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m]$ kurang dari m.

Dalil ini memberikan kemudahan kepada kita untuk memeriksa bebas linear atau tidaknya suatu himpunan vektor di R^n seperti pada contoh berikut.

Contoh 4

Periksa apakah himpunan vektor berikut bebas linear atau tidak:

a). $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, (b) $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, (c) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$, jika diketahui

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian:

a) $m = 3$. Kita bentuk matriks dengan kolom-kolom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Pengerjaan eliminasi Gauss dilaksanakan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{B_3-B_1 \\ B_4-B_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{B_3-B_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{2}B_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa banyaknya baris tak nol pada matriks eselon adalah $3 = m$. Jadi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bebas linear.

b) $m = 3$. Eliminasi Gauss untuk matriks $[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftrightarrow B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{2}B_2 \\ B_3-B_1 \\ B_4-B_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{B_4+B_3}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Banyaknya baris tak nol adalah $3 = m$, jadi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bebas linear.

c) $m = 4$. Eliminasi Gauss untuk matriks $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_3-B_1 \\ B_4-B_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}(B_3+B_2) \\ B_4-\frac{1}{2}(B_3+B_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya baris tak nol adalah $3 < m = 4$. Jadi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ tak bebas linear (bergantungan linear).

Untuk ruang vektor yang umum, dalil 2 ini masih berlaku, hanya vektor di R^n diganti dengan vektor koordinat terhadap basis baku di ruang vektor itu. Vektor koordinat baru akan dibahas pada Modul 3. Oleh karena itu penanganan kebebasan linear pada ruang vektor yang bukan R^n kita lakukan menggunakan definisi langsung seperti pada contoh berikut.

Contoh 5

a) Pandang ruang vektor real $V = \{f \mid f: R \to R\}$. Periksa apakah $S = \{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ bebas linear atau tidak dalam V.

Penyelesaian :

Di V vektor **0**-nya adalah fungsi yang nilainya nol di seluruh R. Jadi untuk memeriksa kebebasan linear, kita perhatikan persamaan $(s_1 1 + s_2 \cos 2 + s_3 \sin 2)(x) = 0$, $\forall x$ real, apakah mengakibatkan $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ atau tidak. Karena $(s_1 1 + s_2 \cos 2 + s_3 \sin 2)(x) = s_1 + s_2 \cos 2x + s_3 \sin 2x = 0$, $\forall x$ real, ambil $x = 0$ sehingga kita peroleh persamaan $s_1 + s_2 = 0$. Untuk $x = \pi/2$ menghasilkan persamaan $s_1 - s_2 = 0$, dan untuk $x = \pi/4$ menghasilkan $s_1 + s_3 = 0$. Pengerjaan eliminasi Gauss pada matriks koefisien sistem persamaan homogen ini adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_2-B_1 \\ B_3-B_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}B_2 \\ B_3-\frac{1}{2}B_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jelaslah sistem persamaan linear homogen untuk s_1, s_2, s_3 itu tak mempunyai jawab tak trivial, jadi W bebas linear.

b) Periksa apakah himpunan fungsi $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ bebas linear dalam ruang fungsi $V = \{f \mid f: R \to R\}$ apabila $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \cos x(\sin x - \cos x)$, $f_3(x) = \sin 2x$, $f_4(x) = \sin^2 x$.

Penyelesaian:

Dengan rumus goniometri diperoleh $f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, $f_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Kemudian tentukan sistem persamaan untuk s_1, s_2, s_3, s_4 yang diperoleh sebagai akibat dari berlakunya kesamaan $s_1 f_1(x) + s_2 f_2(x) + s_3 f_3(x) + s_4 f_4(x) = 0$, $\forall x$ real.

i) *Cara langsung:*

Kita masukkan nilai nilai $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ke dalam kesamaan $s_1 f_1(x) + s_2 f_2(x) + s_3 f_3(x) + s_4 f_4(x) = 0$ maka diperoleh,

untuk $x = 0$:

$s_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + s_2(0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + s_3(0) + s_4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = s_1 - s_2 = 0.$

untuk $x = \frac{\pi}{4}$:

$s_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.0) + s_2(\frac{1}{2}.1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.0) + s_3(\frac{1}{2}) + s_4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.0) = s_1 + s_3 + s_4 = 0$

untuk $x = \frac{\pi}{2}$:

$s_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + s_2(\frac{1}{2}.0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + s_3(0) + s_4.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = s_4 = 0.$

Andaikan $s_1 = t$ maka $s_2 = t$, $s_3 = -t$, $s_4 = 0$. Jadi $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (t, t, -t, 0)$ Ambil $t = 1$ maka dapat diperiksa bahwa $f_1 + f_2 - f_3 + 0f_4 = 0$. Terdapat kombinasi linear dari $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 0$ yang tak semua koefisiennya nol, sehingga $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ tak bebas linear.

ii) Menggunakan kebebasan linear himpunan S (butir a):

$s_1 f_1(x) + s_2 f_2(x) + s_3 f_3(x) + s_4 f_4(x) = 0$, berarti

$s_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) + s_2(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) + s_3(\frac{1}{2}\sin 2x) + s_4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)$

$= (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_4).1 + (\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_4)\cos 2x + (\frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3)\sin 2x = 0.$

Karena S bebas linear haruslah

$\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_4 = \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_4 = \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 = 0.$

Sistem persamaan ini menghasilkan $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (t, t, -t, 0)$. Ambil $t = 1$, maka kita peroleh kesimpulan yang sama dengan yang didapat pada cara i).

Dari definisi bebas linear dan tak bebas linear kita dapat menyimpulkan sifat-sifat yang kita gabungkan dalam dalil berikut ini.

Dalil 3

a. Himpunan $\{\mathbf{0}\}$ tak bebas linear ($\mathbf{0}$ = vektor nol pada ruang vektor sebarang).
b. Himpunan yang terdiri dari satu vektor tak nol, adalah bebas linear.
c. Himpunan berhingga vektor yang memuat vektor nol, $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N\}$ tak bebas linear.
d. Himpunan dua vektor tak nol $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ tak bebas linear jika dan hanya jika terdapat $r \neq 0$ sehingga $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$.
e. Jika himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ tak bebas linear, himpunan vektor $P \supset S$ juga tak bebas linear.
f. Jika himpunan vektor $P = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ bebas linear maka himpunan vektor tak kosong $S \subset P$ juga bebas linear.
g. Himpunan n buah vektor $P = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ di R^n bebas linear, jika dan hanya jika untuk matriks $A = [P]$ (matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$), det $(A) \neq 0$.

Bukti:

a. Himpunan $\{\mathbf{0}\}$ tak bebas linear karena $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$ dapat dipenuhi oleh $s \neq 0$, misalnya $s = 1$.
b. $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ berakibat $s = 0$ (butir d Dalil 2 pada bagian 1 Modul ini).
c. $s_0\mathbf{0} + s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \ldots + s_N\mathbf{u}_N = \mathbf{0}$ dapat berlaku untuk $s_0 = 1$, $s_1 = s_2 = \ldots = s_N = 0$.
d. i) Bila terdapat $r \neq 0$ sehingga $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$, atau $1\mathbf{a} - r\mathbf{b} = \mathbf{0}$, jadi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ tak bebas linear.
   ii) Jika $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ tak bebas linear maka terdapat s dan $t \in R$ yang tidak keduanya nol sehingga $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Akan kita buktikan bahwa $s \neq 0$ dan $t \neq 0$. Yang jelas sekurangnya ada satu dari s dan $t \neq 0$.

Andaikan s = 0 maka haruslah $t \neq 0$. $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = 0\mathbf{a} + t\mathbf{b} = t\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Karena $t \neq 0$ maka haruslah $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (butir d Dalil 2 pada bagian 1 Modul 1 ini). Hal ini bertentangan dengan yang diketahui yaitu $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Pengandaian $t = 0$, $s \neq 0$ mengakibatkan $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Maka haruslah $s \neq 0$ dan $t \neq 0$. Ambil $r = -t/s$ maka $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$.

e. Urutkan vektor-vektor di P sehingga $P = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+p}\}$, p bilangan cacah, $k + p = m$. $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \}$ tak bebas linear maka terdapat bilangan real s_i, i =1, 2, . . . , k yang tak semuanya nol sehingga $\sum_{j=1}^{k} s_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. Sekarang ambil $s_j = 0$ untuk $k \le j \le k + p = m$ maka

$\sum_{j=1}^{m} s_j\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} s_j\mathbf{v}_j + 0.\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + 0.\mathbf{v}_{k+p} = 0 + 0 = 0$. Jadi

$\sum_{j=1}^{m} s_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, untuk s_j , j = 1, 2, . . . , $k + p$, yang tak semuanya nol. P tak bebas linear terbukti.

f. Sekarang bila P bebas linear, harus dibuktikan $S \subset P$ juga bebas linear. Andaikan S tak bebas linear maka menurut butir e) yang baru saja dibuktikan, P juga tak bebas linear yang bertentangan dengan yang diketahui yaitu P bebas linear. Pengandaian bahwa S tak bebas linear tidak benar. Jadi S bebas linear terbukti.

g. Dengan menggunakan sifat determinan untuk matriks bujur sangkar dan dalil 2 dan sifat determinan.

Untuk lebih memahami dalil di atas, pelajarilah contoh berikut.

Contoh 6

Periksa apakah himpunan vektor berikut bebas linear atau tidak

a) $\{f\}$, $f(x) = 0 \ \forall\ x \in R$

b) $\{g\}$, $g(x) = \cos x \ \forall\ x \in R$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\},$

e) {sin2x, sin$x$cos$x$}, {sin$x$,1+ sin$x$}.
{1+sin$x$, sin$x$, sin$x$cos$x$, sin2x, cos2x}

f) {1, x, x^3}

g) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\},\ T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Penyelesaian:

a) f adalah vektor 0 dalam ruang fungsi $V = \{f \mid f: R \to R\}$, jadi menurut butir a) dalil 3 {f} tak bebas linear .

b) g adalah vektor tak nol dalam ruang fungsi $V = \{f \mid f: R \to R\}$, jadi menurut butir b) dalil 3 {f} bebas linear.

c) Himpunan vektor $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ memuat vektor nol, jadi menurut butir c) dalil 3 himpunan vektor ini tak bebas linear

d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, jadi menurut butir d) dalil 3 $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ tak bebas linear.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq k \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, menurut butir d) dalil 3 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ bebas linear.

e) sin2x = 2sin$x$cos$x$, $\forall x \in R$, menurut butir d) dalil 3 {sin2x, sin$x$cos$x$} tak bebas linear.
sin$x$ = k(1+ sin$x$), $\forall$x$\in R$ tidak benar, misalnya untuk $x = 0$ hal ini berarti 0 = 1 yang tak mungkin dapat dipenuhi. Jadi menurut butir d) dalil 3 {sin$x$, 1 + sin$x$} bebas linear.
Dari butir d) sudah kita peroleh bahwa S = {sin2x, sin$x$cos$x$}tak bebas linear dan himpunan P = {1 + sin$x$, sin$x$, sin$x$cos$x$, sin2x, cos2x} $\supset S$ jadi menurut butir e) dalil 3 himpunan P tak bebas linear.

f) Akan dibuktikan dahulu $P = \{1, x, x^2, x^3\}$ bebas linear. Untuk itu kita periksa persamaan $s_0 1 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 = 0,\ \forall x \in R$. Dengan memasukkan nilai-nilai $x = 0, 1, -1$, dan 2 kita peroleh persamaan untuk s_0, s_1, s_2, dan s_3 sebagai berikut untuk:

$$\begin{aligned}
x = 0 &: s_0 = 0\\
x = 1 &: s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 0\\
x = -1 &: s_0 - s_1 + s_2 - s_3 = 0\\
x = 2 &: s_0 + 2s_1 + 4s_2 + 8s_3 = 0
\end{aligned}$$

Kita lakukan eliminasi Gauss pada matriks koefisien sistem persamaan ini:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{B_2-B_1\\B_3-B_1\\B_4-B_1}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&1&-1\\0&2&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{B_3+B_2\\B_4-2B_2}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&0\\0&0&2&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}B_3\\B_4-B_3}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{6}B_4]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Pada matriks eselon untuk matriks koefisien ini banyaknya *baris tak nol = banyaknya kolom,* jadi sistem persamaan homogen ini tak mempunyai jawab tak trivial, satu-satunya jawab adalah jawab trivial $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$ dan demikian P bebas linear. Karena $S = \{1, x, x^3\} \subset P$ maka menurut butir f) dalil 3, S juga bebas linear.

e) $\det([S]) = \begin{vmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\2&0&4\end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix}-1&1\\0&4\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix} = -4+4=0$,

jadi S tak bebas linear (bergantungan linear).

$\det([T]) = \begin{vmatrix}1&2&0\\-2&2&1\\3&1&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&0\\0&6&1\\0&-5&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6&1\\-5&0\end{vmatrix} = 5 \neq 0$, jadi T bebas linear.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Periksa apakah vektor **u**, **v**, **w** berikut kombinasi linear dari S bila

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2) a) Jika $\mathbf{u}_i : = x \mapsto u_i(x)$, $i = 1,2,3$, $u_1(x) = -1 + 2x + x^2$, $u_2(x) = x^3$, $u_3(x) = x + x^2 + x^3$,
$\mathbf{v} = x \mapsto v(x)$, bila $v(x) =$ i). $2 + x^2 + x^3$, ii).$1 - x + x^3$,
periksa apakah **v** kombinasi linear dari $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

b) Kerjakan seperti pada butir a. bila $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \cos 2x$, $u_3(x) = \sin 2x$, $S = \{ \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, dan $v(x)$ seperti berikut:
i) $\cos x + 2\cos x(\cos x - \sin x)$, ii) $\sin x + 2\sin x(\sin x - \cos x)$

3) a) Tunjukkan bahwa himpunan vektor

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$ merupakan ruang bagian

dari R^4 dan periksa apakah himpunan vektor berikut membangun W:

i) $P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, ii) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$,

iii) $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) Tunjukkan bahwa $W = \{u \mid u: R \to R,\ u(x) = 2\sin x\,(r\cos x + s\sin x),\ r, s \in R\}$ merupakan ruang vektor real dan periksa apakah himpunan fungsi berikut himpunan pembangun dari W: i) $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$, ii) $\{1 - \cos 2x, \sin 2x\}$.

4) Periksa apakah himpunan vektor berikut bebas linear atau tidak:

a) i) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$, ii) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$,

b) di P_2 : i) $\{1 + x^2, 1 - x, x + x^2\}$

ii) $\{1 - x, x - x^2, 1 + x - 2x^2\}$,

c) di PT_2 : i) $\{\cos^2 x, \cos x (\sin x - \cos x), \sin 2x, 1 + \cos 2x\}$,

ii) $\{\sin x (\sin x - \cos x), \cos 2x, \cos x, 1\}$,

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Lakukan eliminasi Gauss untuk memeriksa ada atau tidaknya jawab sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ untuk $A = [S]$ = matriks yang kolom-kolomnya adalah unsur-unsur dari S, dan untuk $\mathbf{b}$ diisikan masing-masing vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$.

Jawab: a) ya,

b) tidak, mengurangi baris keempat dengan baris pertama matriks lengkap menghasilkan baris yang menyimpulkan $0 = 1$.

c) ya.

2) a) i) Tidak, ii) Ya.

b) i) Ya karena:

$$\cos x + 2\cos x(\cos x - \sin x) = \cos x + 1 + \cos 2x - \sin 2x$$
$$= 1.1 + 1.\cos x + 1.\cos 2x - 1.\sin 2x,$$

berlaku untuk tiap x real.

ii) Tidak, karena dalam mencari a, b, c, d yang memenuhi $\sin x + 2\sin x(\sin x - \cos x) = \sin x + 1 - \cos 2x - \sin 2x = 1 + b.\cos x + c.\cos 2x + d.\sin 2x$, $\forall x \in R$ kita terbentur karena memasukkan nilai $x = \pi/2$ dan $x = -\pi/2$ memberikan kontradiksi, jadi $\sin x + 2\sin x(\sin x - \cos x)$ bukan kombinasi linear dari S.

3) a) Ambil

$$\mathbf{x} \in W,\ \mathbf{y} \in W,\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},\ \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0,\ y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{matrix}$$

Merupakan ruang bagian karena $\mathbf{u} = s\mathbf{x} \in W$, dan $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$. Matriks lengkap dari sistem persamaan yang dipenuhi oleh W:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ menghasilkan } W = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) membangun, (ii) membangun, (iii) tak membangun.

b) $u(x) = r\sin 2x + s(1-\cos 2x)$. Tunjukkan sifat tertutup terhadap perkalian skalar dan penjumlahan.

i) bukan himpunan pembangun, ii) himpunan pembangun.

4) a) i) tak bebas linear, ii) bebas linear.

b) i) bebas linear, ii) tak bebas linear.

c) i) tak bebas linear, ii) bebas linear

RANGKUMAN

Kegiatan belajar ini menyangkut *kombinasi linear*, *himpunan pembangun* dan *kebebasan linear*.

- Vektor $\mathbf{v} \in V$ disebut **kombinasi linear** dari himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ pada V, apabila terdapat bilangan real $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sehingga $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} s_i\, \mathbf{u}_i$.

- Jika V ruang vektor dan $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$, maka:
  a) Himpunan W dari semua kombinasi linear $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ adalah ruang bagian dari V.
  b) W ruang bagian terkecil yang memuat S. (Dalil 1).

- Jika V ruang vektor, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset V$, ruang vektor W yang merupakan himpunan semua kombinasi linear dari S disebut ruang vektor yang **dibangun oleh** atau **bentang linear** dari S, biasa dituliskan dengan notasi $W = \text{span}(S)$, dan S disebut **himpunan pembangun** (pembentang) ruang vektor W.
- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ membangun ruang vektor V dan untuk tiap $k = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{v}_k$ adalah kombinasi linear dari $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ maka T juga membangun V. (Dalil 2)
- a) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan **bebas linear** apabila $\sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi oleh $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$.
  b) Himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ dikatakan **tak bebas linear** (bergantungan linear) jika tidak bebas linear, yakni terdapat s_1, $s_2, \dots, s_m$ yang tak semuanya nol yang memenuhi $\sum_{k=1}^{m} s_k\, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.
- a) Himpunan $\{\mathbf{0}\}$ tak bebas linear. ($\mathbf{0}$ = vektor nol pada ruang vektor sebarang)
  b) Himpunan yang terdiri dari satu vektor tak nol, adalah bebas linear.
  c) Himpunan berhingga vektor yang memuat vektor nol, $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$ tak bebas linear.
  d) Himpunan dua vektor tak nol $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ tak bebas linear jika dan hanya jika terdapat $r \neq 0$ sehingga $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$
  e) Jika himpunan vektor $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ tak bebas linear, himpunan vektor $P \supset S$ juga tak bebas linear.
  f) Jika himpunan vektor $P = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \}$bebas linear maka himpunan vektor tak kosong $S \subset P$ juga bebas linear. (Dalil 3)
  g) Jika S himpunan n vektor di R^n, dan $[S]$ adalah matriks yang kolom kolomnya adalah vektor di S maka S bebas linear jika dan hanya jika $\det([S]) \neq 0$.

TES FORMATIF 2

Jawablah pertanyaan berikut ini!

1) Hubungan apakah yang harus dipenuhi oleh a, b, c, dan d supaya vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ kombinasi linear dari $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
2) Tunjukkan bahwa $V = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^4,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4 \}$ ruang vektor real dan tentukan himpunan pembangunnya yang bebas linear!
3) $V = \{u \mid u : R \to R,\ u(x) = a_1 + (a_1 - a_0)x - (a_1 + a_0)x^2 + 2a_0x^3,$ $a_0 \in R,\ a_1 \in R \}$ adalah ruang vektor real (buktikan) dan tentukan pula himpunan pembangunnya yang bebas linear.
4) Periksa bebas linear atau tidaknya himpunan vektor berikut:
   a) $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x\}$,
   b) $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin 2x\}$
5) Tentukan persyaratan untuk p supaya
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ p+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ p-1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \text{ bebas linear.}$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Basis dan Dimensi

A. BASIS

Barangkali Anda pernah mendengar bahwa garis berdimensi satu, bidang berdimensi dua, dan ruang di sekitar kita berdimensi 3. Pada bagian ini pengertian itu akan kita nyatakan secara akurat. Pengertian dimensi ini sangat berkaitan dengan pengertian basis yang akan kita bahas pada kesempatan ini.

Kita sudah mengenal himpunan pembangun dari suatu ruang vektor, seperti contoh 3a) bagian 2 Modul 1 ini telah menyimpulkan bahwa di R^3, ruang vektor U yang dibangun oleh:

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ juga dibangun oleh himpunan vektor $P = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ dan $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

P, S, dan T masing-masing adalah himpunan pembangun ruang vektor U. P dan T bebas linear karena P dan T terdiri dari 2 vektor, dan vektor yang satu bukan kelipatan dari vektor yang lainnya. (Dalil 3 bagian 2 modul ini). T tak bebas linear.

Himpunan pembangun yang bebas linear ini selanjutnya disebut *basis*, sangat penting dalam pembahasan kita selanjutnya. Pengertian basis ini kita rumuskan secara tepat dengan definisi berikut:

Definisi 1
$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset$ ruang vektor U disebut **basis** untuk U bila B bebas linear dan membangun U.

Contoh 1

a) Ruang vektor yang dibangun oleh $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, juga dibangun oleh

$P = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ dan $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

S dan *P* basis untuk *U*, karena di samping membangun *U*, juga bebas linear. *T* bukan basis karena tak bebas linear (tunjukkan bahwa *T* tak bebas linear).

b) Di R^n, $B_0 = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \}$, dengan $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$, membangun R^n dan bebas linear (Tunjukkanlah sendiri). Jadi B_0 basis dari R^n, disebut **basis baku** untuk R^n.

Persyaratan untuk bebas linearnya himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ adalah sistem persamaan $[S]\mathbf{x} = \mathbf{0}$ punya jawab trivial, yang ekivalen dengan sistem persamaan $[S]\mathbf{x} = \mathbf{u}$ punya jawab tunggal untuk tiap $\mathbf{u} \in U$.
Dengan demikian dalil berikut dapat kita tuliskan.

Dalil 1

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ basis dari ruang vektor *U*, jika dan hanya jika sistem persamaan linear $[B]\,\mathbf{x} = \mathbf{u}$ punya tepat satu jawab untuk tiap $\mathbf{u} \in U$.

Dalil ini juga menyimpulkan bahwa tiap vektor $\mathbf{u} \in U$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari basis. Untuk ruang vektor *U* pada butir a) contoh 1 vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari *P* didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, eliminasi

Gauss pada matriks lengkapnya menghasilkan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan tepat satu jawab $s = 2$, $t = -1$.

Sehingga $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Sebagai kombinasi linear dari T kita selesaikan sistem $[T]\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, eliminasi Gauss pada matriks lengkapnya menghasilkan $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix}$.

Vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (t-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - (1+t)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari T dalam banyak cara.

Khususnya untuk:

$t = 0$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 1.\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$t = 1$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk himpunan pembangun S yang bukan basis, penulisan vektor **u** sebagai kombinasi linear dari S tidak tunggal, sedangkan penulisan sebagai kombinasi linear dari basis hanya dapat dilakukan dengan satu cara saja.

Contoh 2

a) Polinom berpangkat n adalah kombinasi linear dari $B_0 = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$, $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, $a_n \neq 0$. B_0 bebas linear ditunjukkan dengan $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$, $\forall\ x \in R$, berakibat $a_0 = a_1 = a_2 = . . . = a_n = 0$.

b) Begitu pula $t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos kx + b_k \sin kx]$, disebut polinom trigonometri berpangkat n bila sekurangnya satu dari a_n atau $b_n \neq 0$. Begitu pula karena $B = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$ bebas linear, B adalah basis dari PT_n = himpunan polinom trigonometri berpangkat kurang atau sama dengan n.

c) $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ adalah basis dari M_{22} = himpunan matriks real berukuran 2×2 .

Pada butir ii) Contoh 6 bagian 1 modul ini sudah dibahas bahwa himpunan solusi sistem persamaan linear homogen membentuk ruang vektor. Dengan eliminasi Gauss kita dapat langsung memperoleh solusi dan basis ruang solusi seperti pada contoh berikut.

Contoh 3

Tentukan basis ruang solusi sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad &= 0, \\ x_3 + x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Ada 2 persamaan untuk 5 bilangan yang harus dicari, 3 komponen dapat dibuat bebas, ambil $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$ maka $x_1 = r$, $x_5 = s + t$.

$$\text{Maka solusi} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ s \\ t \\ s+t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ dan basis ruang solusi:}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ karena } r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

berakibat $r = s = t = 0$.

Pada contoh di atas matriks koefisien sudah berbentuk eselon tereduksi. Untuk soal yang lebih umum kita harus melakukan eliminasi Gauss lebih dahulu untuk mendapatkan matriks eselon tereduksi.

B. DIMENSI

Sebelum membahas dimensi ruang vektor, akan kita ajukan dahulu pengertian ruang vektor berdimensi berhingga.

Definisi 2

(i) Ruang vektor real V disebut **berdimensi berhingga** bila V ruang nol atau bila basis untuk V mempunyai berhingga banyaknya unsur.

(ii) Ruang vektor real V disebut berdimensi **tak berhingga** bila V tidak berdimensi berhingga: V memuat vektor tak nol dan setiap himpunan berhingga vektor di V bukan merupakan basis untuk V.

Contoh ruang vektor yang berdimensi berhingga:

Contoh 4

Tabel berikut memperlihatkan basis baku untuk beberapa ruang vektor beserta banyaknya unsur basis baku itu.

Ruang	Basis Baku	Banyaknya Unsur
R^n	$\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \}$	n
P_n	$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$	$n+1$
PT_n	$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$	$2n + 1$
M_{22}	$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$	4

Menjadi pertanyaan apakah banyaknya unsur pada basis suatu ruang vektor sama (jadi sama dengan banyaknya unsur basis baku). Untuk membahas hal ini kita memerlukan beberapa dalil berikut.

Dalil 2

Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ basis ruang vektor V, $P = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$, dan $m > n$ maka P tak bebas linear.

Bukti:

Ambil $P = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$, dan $m > n$. Akan dibuktikan bahwa P tak bebas linear. Karena P basis, $\mathbf{w}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari P. Jadi kita dapat menuliskan:

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{u}_i \ , k = 1, 2, \ldots, m.$$

P tak bebas linear berarti $\sum_{j=1}^{m} s_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ mempunyai solusi tak trivial.

$$\sum_{j=1}^{m} s_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{m} s_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \right] \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \ t_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \ ,$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Karena B basis, $\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ mengakibatkan $t_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atau

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j = 0$, $j = 1,2, \ldots, m$, yakni sistem n persamaan dengan m bilangan yang dicari:

$$
\begin{aligned}
a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + \cdots + a_{1m}s_m &= 0 \\
a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 + \cdots + a_{2m}s_m &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}s_1 + a_{n2}s_2 + a_{n3}s_3 + \cdots + a_{nm}s_m &= 0
\end{aligned}
$$

Karena $m > n$, sistem persamaan ini mempunyai solusi tak trivial. Dengan demikian $\sum_{j=1}^{m} s_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ memberikan s_j yang tak semuanya nol , P tak bebas linear terbukti.

Sebagai kontraposisi dalil 2 ini dapat dituliskan

Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ basis ruang vektor V, $P = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$ dan P bebas linear maka $m \leq n$.

Sekarang ambil basis $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K\}$, dan $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_L\}$ dari ruang vektor V.

Dari hasil di atas, B_1 bebas linear, B_2 basis berakibat $K \leq L$, dan bila B_1 basis, B_2 bebas linear, $L \leq K$. Oleh karena itu $L = K$. Dengan demikian dalil berikut terbukti.

Dalil 3

Jika B_1 dan B_2 dua basis untuk ruang vektor V yang berdimensi berhingga, banyaknya vektor dalam B_1 = banyaknya vektor dalam B_2.

Dengan demikian untuk suatu ruang vektor, untuk basis yang mana pun banyaknya unsur sama. Pada contoh 4 telah didaftarkan banyaknya unsur pada basis baku beberapa ruang vektor, dengan demikian daftar ini juga menyatakan banyaknya unsur pada basis sebarang ruang vektor itu. Oleh karena itu banyaknya unsur dalam basis suatu ruang vektor berdimensi berhingga dapat mencirikan ruang vektor itu, dan sesungguhnya adalah dimensi ruang vektor itu.

Hal ini dikukuhkan dalam definisi berikut.

Definisi 3
Dimensi ruang vektor berdimensi berhingga V adalah banyaknya vektor dalam basis untuk V.

Dari tabel pada contoh 4 sudah kita peroleh:

Ruang	R^n	P_n	PT_n	M_{22}
Dimensi	n	n+1	2n+1	4

Pada ruang nol, tak ada himpunan bagian yang bebas linear karena itu basisnya adalah himpunan kosong, dan dimensinya = 0.

Contoh 5
Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi sistem persamaan linear homogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:
Eliminasi Gauss-Jordan untuk matriks lengkap:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2-2B_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1.B_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1-2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh solusi:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= \ \ 3x_3 - x_4 \\ x_3 &= \quad x_3 \\ x_4 &= \quad x_4 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $P = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ membangun ruang solusi.

Karena $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq k. \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka P bebas linear.

Jadi basis ruang solusi adalah $P = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

Dimensi ruang solusi, yakni banyaknya unsur basis ialah 2.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_m\}$ merupakan basis untuk ruang vektor V, kita harus membuktikan bahwa himpunan vektor itu bebas linear dan membentang V. Akan tetapi bila diketahui bahwa V berdimensi n, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_n\}$ mempunyai banyaknya unsur yang tepat untuk basis. Pada situasi seperti ini, ternyata yang harus diperiksa hanya salah satu saja: kebebasan linear atau membentang V. Persyaratan lainnya akan berlaku secara "otomatis". Hal ini dirumuskan pada butir (i) dan (ii) dalil berikut. Butir (iii) dalil ini menyatakan bahwa himpunan vektor yang bebas linear merupakan bagian dari suatu basis untuk ruang vektor yang memuatnya.

Dalil 4

(i) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_n\}$ himpunan n buah vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V yang berdimensi n maka B membangun V.

(ii) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_n\}$ himpunan n buah vektor yang membentang ruang vektor V yang berdimensi *n maka* B bebas linear.

(iii) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_k\}$ himpunan n buah vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V yang berdimensi n, dan $k < n$, B dapat diperluas menjadi suatu basis untuk V. (Supaya menjadi basis, dapat ditambahkan ke dalam B beberapa vektor di V).

Bukti:

(i) Karena $B \subset V$ maka V memuat semua kombinasi linear dari B.
Pandang himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . , \mathbf{u}_n\}$. Menurut dalil 2 himpunan ini tak bebas linear, jadi terdapat s_0, s_1, s_2, . . . , s_n yang tak semuanya nol sehingga $s_0\mathbf{v} + s_1\,\mathbf{u}_1 + s_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + s_n\,\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. $s_0 \neq 0$

karena kalau $s_0 = 0$, $s_1\,\mathbf{u}_1 + s_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + s_n\,\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ pula, dan karena $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bebas linear, $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$. Ini bertentangan dengan dalil 2. Jadi haruslah $s_0 \neq 0$.

Dengan demikian untuk $\mathbf{v} \in V$, terdapat $t_i = -\dfrac{s_i}{s_0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

sehingga $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{u}_i$. Jadi B membangun V terbukti.

(ii) Pandang $P = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$ suatu basis untuk V.

B membangun V, maka $\mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\mathbf{u}_j$,

Untuk $\mathbf{v} \in V$ berlaku $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n} k_j \mathbf{u}_j$.

Maka:

$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ji} r_i\right)\mathbf{u}_j$, jadi $k_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} r_i$,

$j = 1, 2, \ldots, n$.

$\sum_{j=1}^{n} k_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \Rightarrow r_i = 0, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ karena P bebas linear.

Maka $k_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} 0 = \mathbf{0}$. Jadi B bebas linear terbukti.

(iii) V berdimensi n, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$dengan $k < n$ bukan basis maka terdapat $\mathbf{w} \in V$ dengan $\mathbf{w} \neq \sum_{i=1}^{k} t_i \mathbf{u}_i$ (*). $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}\}$ bebas linear karena$s_1\mathbf{u}_1 + s_1\mathbf{u}_2 + \ldots + s_k\mathbf{u}_k + s_{k+1}\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dan $s_{k+1} \neq 0$ mengakibatkan $\mathbf{w} = -\sum_{i=1}^{k} \dfrac{s_i}{s_{k+1}}\mathbf{u}_i$, bertentangan dengan (*). Jadi haruslah $s_{k+1} = 0$ maka $s_1\mathbf{u}_1 + s_1\mathbf{u}_2 + \ldots + s_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.
Karena B bebas linear, $s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0$. Maka$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}\}$ bebas linear (terbukti)

Kalau $k + 1 = n$ kerja kita selesai. Bila $k + 1 < n$ proses kita teruskan sampai $k + 1 = n$.

Contoh 6

(i) Tunjukkan bahwa himpunan vektor $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

merupakan basis untuk R^4.

Dengan butir (i) dalil 4 kita hanya perlu menunjukkan bahwa B bebas linear. Menurut butir g) dalil 3 pada bagian 2 modul ini cukup dengan menunjukkan bahwa det $([B]) \neq 0$.

$$\det([B]) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0.$$

Menurut butir g) dalil 3 pada bagian 2 modul ini B bebas linear, butir (i) dalil 4 bagian 3 ini B basis.

Cara lain: Dapat dengan mengerjakan eliminasi Gauss pada matriks $[B]$.

Contoh 7

(ii) Perlihatkan bahwa $B = \{1 + x, x + x^2, -2x^2\}$ merupakan basis untuk P_2.

Penyelesaian:

Dimensi $P_2 = 2 + 1 = 3$. Kita periksa kebebasan linear B:

$s_1(1 + x) + s_2(x + x^2) + s_3(-2x^2) = 0, \forall x \in R$, atau

$s_1.1 + (s_1 + s_2)\, x + (s_2 - 2s_3)x^2 = 0, \forall x \in R$, Karena $\{1, x, x^2\}$ bebas linear maka $s_1 = 0$, $s_1 + s_2 = 0$, dan $s_2 - 2\,s_3 = 0$, yang mengakibatkan $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Jadi B bebas linear menurut butir (i) dalil 4.

C. MENCARI BASIS UNTUK RUANG YANG DIBANGUN OLEH SUATU HIMPUNAN VEKTOR YANG TAK BEBAS LINEAR PADA R^N

Ruang vektor V dibangun oleh himpunan vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ jika dan hanya jika:

(i) $\sum_{k=1}^{m} t_k\mathbf{u}_k \in V$ bila $t_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

(ii) Jika $\mathbf{v} \in V$ terdapat $t_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sehingga $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{m} t_k\mathbf{u}_k$.

Himpunan vektor berikut
B_1 = himpunan vektor S dengan dua vektor $\mathbf{u}_p$ dan $\mathbf{u}_q$ bertukar tempat,
$B_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, r\mathbf{u}_p, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $1 \le p \le m$, $r \in R$, $r \ne 0$,
$B_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p+\mathbf{u}_q, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $1 \le p, q \le m$(pada S: $\mathbf{u}_p$ diganti dengan $\mathbf{u}_q$).juga membangun ruang vektor S.

Pembuktiannya :
Untuk B_1 cobalah Anda lakukan sendiri.
Untuk B_2:

(i) Kombinasi linear dari B_2 : $\sum_{k=1}^{p-1} t_k\mathbf{u}_k + t_p\ r\mathbf{u}_p + \sum_{k=p+1}^{m} t_k\mathbf{u}_k$ adalah kombinasi linear dari S dengan koefisien $t_1, \ldots, t_{p-1}, t_p\,r, t_{p+1}, \ldots, t_m$ semuanya real. Jadi kombinasi linear itu $\in V$.

(ii) $\mathbf{v} \in V$, terdapat $s_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sehingga $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{m} s_k\mathbf{u}_k$, yang juga merupakan kombinasi linear dari B_2 dengan koefisien untuk vektor yang ke p nya adalah s_p/r karena $s_p\mathbf{u}_p = (s_p/r)\,r\mathbf{u}_p$.

Untuk B_3**:**

(i) Kombinasi linear dari $B_3 : \sum_{k=1}^{p-1} t_k \mathbf{u}_k + t_p (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_q) + \sum_{k=p+1}^{m} t_k \mathbf{u}_k$ adalah kombinasi linear dari S dengan koefisien $t_1, \ldots, t_{p-1}, t_p, t_p+t_{p+1}, \ldots, t_m$ semuanya real. Jadi kombinasi linear itu $\in V$.

(ii) $\mathbf{v} \in V$, terdapat $s_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sehingga $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{m} s_k \mathbf{u}_k$, merupakan kombinasi linear dari B_3 dengan koefisien yang ke-q adalah $s_q - s_p$, dan koefisien ke p nya adalah s_p.

Sebelum ini kita sudah memakai matriks yang kolom kolomnya vektor-vektor dalam $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, yang kita beri notasi $[S] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m]$.

Sekarang pandang matriks yang baris barisnya adalah vektor-vektor dalam S.

Namai matriks itu U maka $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$

Ruang yang dibangun oleh baris dari matriks U disebut ruang baris dari matriks U.

Sekarang akan kita tinjau arti pengubahan himpunan vektor S menjadi B_1, B_2 dan B_3 pada matriks U.

Pengubahan S menjadi B_1 berarti mengerjakan operasi baris elementer: mempertukarkan baris ke p dengan baris ke q.

Pengubahan S menjadi B_2 berarti mengalikan baris ke p dengan r yang $\neq 0$.

Pengubahan S menjadi B_3 berarti menambahkan baris ke q pada baris ke q.

Dengan kombinasi pengubahan seperti itu pada S himpunan vektor yang baru tetap membangun V.

Dengan kombinasi operasi baris elementer yang tepat yaitu eliminasi Gauss atau Gauss–Jordan, matriks U menjadi matriks eselon atau matriks eselon tereduksi. Himpunan baris tak nol dari matriks eselon itu berkaitan dengan himpunan vektor yang bebas linear yang menjadi basis untuk V.

Dengan demikian kita dapat mencari basis dari ruang yang dibangun oleh himpunan vektor yang tak bebas linear.

Contoh 8
Cari basis dan dimensi ruang yang dibangun oleh:

$$S = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right].$$

Penyelesaian :

Kita lakukan eliminasi Gauss pada matriks yang baris-barisnya adalah vektor dalam S sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{B_4-3B_3}{\overset{B_2-2B_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \underset{B_2 \leftrightarrow B_3}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \underset{B_3-4B_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{-B_3/7 \\ B_4-B_3}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap vektor $\mathbf{v} \in V$ merupakan kombinasi linear dari vektor (1, –2, 0, 1, 0), (0, 1, 2, –1, 1), dan (0, 0, 1, –1/7, 4/7).
Ketiga vektor ini bebas linear (tunjukkanlah!)
Jadi {(1, –2, 0, 1, 0) , (0, 1, 2, –1, 1), dan (0, 0, 1, –1/7, 4/7)} adalah suatu basis untuk V. Juga S = {(1, –2, 0, 1, 0) , (0, 1, 2, –1, 1), dan (0, 0, 7, –1, 4)} merupakan basis untuk V. (Jelaskan sebab-sebabnya!)

Dimensi V, yaitu banyaknya unsur dalam basis, yaitu 3.
Terlihat bahwa vektor-vektor dalam basis tak semuanya merupakan vektor dalam himpunan pembangun ruang vektor itu.

Sekarang akan kita bahas suatu cara memperoleh basis yang merupakan himpunan bagian dari himpunan pembangun. Dengan cara ini basis suatu ruang vektor yang dibangun oleh suatu himpunan vektor yang tak bebas linear diperoleh dengan membuang semua vektor yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lainnya sehingga vektor-vektor yang tinggal juga membangun ruang vektor itu.

Contoh 9

Tunjukkan bahwa $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\5\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\8\\-8\\-3\end{bmatrix}\right\}$ tak bebas linear dan tentukan himpunan bagian dari W yang merupakan basis untuk ruang yang dibangun oleh W. Tentukan pula dimensi ruang itu.

Penyelesaian:

Dicari hubungan ketergantungan vektor-vektor dalam W: cari s_1, s_2, s_3, s_4 yang memenuhi:

$$s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}, \text{ atau } [W]\mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Kita lakukan eliminasi Gauss pada matriks koefisien sistem persamaan ini:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2 & 8\\-2 & -1 & 5 & -8\\1 & 0 & 3 & -3\end{bmatrix} \underset{\substack{B_2/2\\B_3+2B_1\\B_3\leftrightarrow B_2}}{\rightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -3\\0 & 1 & -1 & 4\\0 & 1 & 9 & -6\\1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \underset{\substack{(B_3-B_2)/10\\B_4-B_1-B_2}}{\rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -3\\0 & 1 & -1 & 4\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \overset{\substack{B_1-3B_3\\B_2+B_3}}{\rightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Kita peroleh solusi,
$s_1 = 0$, $s_2 = -3s_4$, $s_3 = s_4$, $s_4 = s_4$.

$$\begin{aligned} s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 &= -3s_4\mathbf{w}_2 + s_4\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 \\ &= s_4(-3\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $\{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ tak bebas linear, jadi juga $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$. Satu di antara $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, dan $\mathbf{w}_4$ dapat dibuang. Jika yang dibuang $\mathbf{w}_2$, akan ditunjukkan bahwa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ bebas linear sebagai berikut.

$s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$ mengakibatkan $s_1 = 0$, $s_2 = -3s_4$, $s_3 = s_4$, $s_4 = s_4$

$s_1\mathbf{w}_1 + 0.\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$ mengakibatkan $s_1= 0$ dan $s_2 = 0$, $s_2 = -3s_4$ mengakibatkan $s_4 = 0$, dan $s_3 = s_4$ mengakibatkan $s_3 = 0$.

Jadi $s_1\mathbf{w}_1 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$ mengakibatkan $s_1= s_3 = s_4 = 0$. $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ bebas linear terbukti, jadi merupakan basis dari ruang vektor yang dibangun oleh *W*, dimensi ruang itu adalah 3.

Pada umumnya *jika* salah satu dari $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, dan $\mathbf{w}_4$ dibuang dari *W maka* vektor yang lainnya membentuk basis dari ruang yang dibangun oleh *W*.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan basis dari R^4:

a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\5\\-2\end{bmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$

2) Yang manakah dari himpunan berikut yang merupakan basis dari P_3?
   a) $\{1 + x, 1 - x^2, x + x^2, x - x^2 + x^3\}$,
   b) $\{1 - x, 1 + x, x + x^2, x - x^2 + x^3\}$,
3) Tentukan basis ruang vektor yang dibangun oleh:
   a) $\{1, \cos x(\sin x - \cos x), \sin x(\sin x + \cos x), \sin x\cos x\}$,
   b) $\{1 + \cos x, \cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x\}$.
4) Tentukan basis dan dimensi ruang solusi sistem persamaan berikut

   a) $\begin{aligned} x + y - 2z + u &= 0 \\ x - z - u &= 0 \\ x - y - 3u &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - y + z - u &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ y - z + u &= 0 \end{aligned}$

5) Tentukan basis dan dimensi ruang yang dibangun oleh himpunan vektor berikut

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, b) $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

Kerjakanlah dengan dua cara mencari basis:

(i) menggunakan eliminasi Gauss pada matriks yang sesuai.

(ii) membuang beberapa vektor dalam himpunan pembangun.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Dapat dikerjakan dengan dua cara: dengan eliminasi Gauss atau menghitung determinan.
   a) bukan basis, b) basis.
2) Nyatakan kombinasi linear himpunan itu terhadap basis baku.
   a) bukan basis, b) basis.
3) a) {1, cos2x, sin2x}, b) {(1 + cos$x$, 1 + cos2x}.
4) Gunakan eliminasi Gauss.
   a) Basis = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, dimensi = 2, b) Basis = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, dimensi =1.
5) (i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, (ii) Setiap himpunan bagian dari S yang mempunyai tepat 2 unsur.

RANGKUMAN

Kegiatan belajar ini membahas *basis* dan *dimensi* dari ruang vektor.

- $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset$ ruang vektor U disebut **basis** untuk U bila B bebas linear dan membangun U.

- $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ basis dari ruang vektor U, jika dan hanya jika sistem persamaan linear $[B]\,\mathbf{x} = \mathbf{u}$ punya tepat satu jawab untuk tiap $\mathbf{u} \in U$.
- Basis untuk ruang solusi sistem persamaan linear homogen dapat diketahui langsung dari bentuk himpunan solusi yang diperoleh dengan eliminasi Gauss-Jordan.
- (i) Ruang vektor real V disebut **berdimensi berhingga** bila V ruang nol atau bila basis untuk V mempunyai berhingga banyaknya unsur.

  (ii) Ruang vektor real V disebut berdimensi **tak berhingga** bila V tidak berdimensi berhingga: V memuat vektor tak nol dan setiap himpunan berhingga vektor di V bukan merupakan basis untuk V.
- Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ basis ruang vektor V, $P = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$, dan $m > n$ *maka* P tak bebas linear.
- Jika B_1 dan B_2 dua basis untuk ruang vektor V yang berdimensi berhingga, banyaknya vektor dalam B_1 = banyaknya vektor dalam B_2.
- i) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ himpunan n buah vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V yang berdimensi n maka B membangun V.

  ii) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ himpunan n buah vektor yang membentang ruang vektor V yang berdimensi n maka B bebas linear.

  iii) Jika $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ himpunan n buah vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V yang berdimensi n, dan $k < n$, B dapat diperluas menjadi suatu basis untuk V.(Supaya menjadi basis, dapat ditambahkan ke dalam B beberapa vektor di V). (dalil 4)
- Dari butir (i) dan (ii) dalil 4 dapat disimpulkan bahwa untuk himpunan n buah vektor di R^n pengertian basis, bebas linear dan membangun adalah ekivalen.
- Basis suatu ruang vektor dengan himpunan pembangun tak bebas linear dapat dicari dengan menjadikan vektor-vektor dalam himpunan pembangun itu baris-baris suatu matriks. Dengan melakukan eliminasi Gauss pada matriks itu sehingga berbentuk matriks eselon, unsur-unsur basis adalah vektor yang berkaitan dengan baris-baris tak nol matriks eselon itu.
- Untuk mendapatkan basis yang merupakan himpunan bagian dari himpunan pembangun yang tak bebas linear dicari koefisien pada kombinasi linear vektor-vektor dalam himpunan pembangun = 0 dan

membuang semua vektor yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lainnya sehingga vektor-vektor yang masih tinggal bebas linear dan membangun ruang vektor itu.

TES FORMATIF 3

Jawablah pertanyaan berikut ini!

1) Tentukan basis ruang vektor yang dibangun oleh himpunan!
   $\{\cos 2x, \cos x(2\sin x - \cos x), \sin x(\sin x + 2\cos x), \sin^2 x\}$
   (Nyatakan dahulu setiap vektor itu dalam basis baku.)
2) Cari basis dan dimensi ruang solusi sistem persamaan linear
   $x + y - z + u = 0$
   $2x + y - 3z + 3u = 0$
   $x + 2y = 0$
3) Periksa apakah himpunan polinom berikut merupakan basis dari P^3!
   a) $\{1 - x + x^2, 1 + x^2 - x^3, -x + x^3, x^2 - x^3\}$
   b) $\{1 - x, x - x^2, x^2 + x^3\}$
   c) $\{1, x - x^2, x^2 + x^3, 2x + x^3\}$
4) Cari suatu basis ruang yang dibangun oleh:
   $$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$ dengan melakukan eliminasi Gauss pada matriks yang baris-barisnya adalah vektor-vektor dalam S. Tentukan pula dimensi ruang itu.
5) Cari basis dari ruang yang dibangun oleh;
   $$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$$ yang merupakan himpunan bagian dari himpunan pembangun itu. Tentukan pula basis ruang itu!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Sifat 1a), ketertutupan terhadap operasi `+` tak dipenuhi:
   a) Ambil $\mathbf{a} = (x, y, z, u) \in S$ dan $\mathbf{b} = (p, q, r, s) \in S$ maka $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$;
   $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x + p, y + q, z + r, u + s)$,
   dan $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = (x+ y+ z+ u+ p+ q+ r+ s) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.
   Sifat 6), ketertutupan terhadap perkalian dengan skalar juga tak dipenuhi:
   Ambil $\mathbf{a} = (x, y, z, u) \in S$ maka $2\mathbf{a} = (2x, 2y, 2z, 2u) \notin S$ karena
   $2x + 2y + 2z + 2u = 2(x+y+z+u) = 2 \neq 1$.
   Sifat-sifat lainnya berlaku, diwariskan dari R^4.
   b) Sifat 1): Ambil f dan $g \in S$ maka $f(x) = -f(1-x)$ dan $g(x) = -g(1-x)$ $\forall x \in R$.
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(1 - x) - g(1 - x) = -(f + g)(1 - x)$ $\forall x \in R$. Jadi $f + g \in S$.
   Sifat 6): Ambil $f \in S$ dan $s \in R$ maka $(sf)(x) = s(-f(1 - x)) = -sf(1 - x)$ $= -(sf)(1 - x)$.
   Karena sifat lainnya diwariskan dari R^4 maka semua sifat ruang vektor dipenuhi oleh S
2) a) tak benar. Ambil $s = 2$, $t = 1$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ maka $s\mathbf{0} = t\mathbf{0}$, akan tetapi $s \neq t$.
   b) tak benar. Ambil $s = 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$.
   c) benar, Dalil 2 butir f.
3) a) ruang bagian.
   b) bukan ruang bagian karena tak memuat vektor nol.
4) Tunjukkan bahwa himpunan itu tak memuat vektor nol.
5) $(0,0) \notin S$ karena bila $a = 0$, $a^2 - 1 = -1 \neq 0$, sedangkan bila $a^2 - 1 = 0$ maka $a \neq 0$. Jadi S bukan ruang bagian dari R^2. Hal ini tak bertentangan dengan Dalil 5 karena sifat 1) dan sifat 6) tak dipenuhi.

Tes Formatif 2

1) Jawab: $a + b = d - a$.

Penjelasan: Supaya $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ kombinasi linear dari $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

haruslah sistem persamaan linear $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ punya

Jawab.

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer pada matriks lengkap sistem persamaan itu, yakni:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \\ 1 & 2 & 1 & d \end{bmatrix}$, kita peroleh hubungan yang dimaksud.

2) Tunjukkan sifat 1) dan 6) berlaku untuk V. Himpunan pembangunnya ialah:

{(1, –1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)} diperoleh dengan mencari solusi sistem persamaan

$x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 2x_4$.

3) Tunjukkan sifat 1) dan 6) berlaku untuk V. Himpunan pembangunnya ialah:

$\{-x - x^2 + 2x^3, 1 + x - x^2\}$.

4) a) tak bebas linear b) bebas linear.

5) Jawab: $p \neq 1$ & $p \neq 3$.

Tes Formatif 3

1) Dinyatakan dalam basis baku untuk $PT3$, yakni $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ himpunan itu: $\{\cos 2x, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sin 2x, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sin 2x, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\}$.

Ruang yang dibangun oleh himpunan vektor itu juga dibangun oleh himpunan vektor $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$, yang jelas bebas linear.

Maka basis ruang vektor itu adalah $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$.

2) Melakukan eliminasi Gauss pada sistem persamaan itu, memilih z dan u bebas diperoleh solusi $(x, y, z, u) = s(2, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$.

   Basis ruang solusi adalah {(2, –1,1,0), (–2,1,0,1)}. (Jawab tergantung kepada pemilihan komponen yang dianggap bebas). Dimensi ruang ini = 2.

3) a) Bukan basis karena tak bebas linear, sebab $1 - x + x^2 = 1 + x^2 - x^3 + (-x + x^3)$.

   b) Bukan basis dari P^3 karena tak dapat membangun P^3 yang berdimensi 4, karena hanya terdiri dari 3 vektor.

   c) Basis karena himpunan 4 buah vektor yang bebas linear.

4) Beberapa langkah eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -B_1 \\ \to \\ -2B_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ +B_2 \\ +3B_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix},$$

   menghasilkan suatu basis {(1, 1, –1, 0), (0, –1, 3, 1), (0, 0, 1, 0)}.
   Dan dengan demikian dimensi ruang itu = 3.

5) Kita cari s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 yang memenuhi $s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 + s_5\mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$.

   Eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ -2B_1 \\ -B_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \infty \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Kita peroleh 2 persamaan dengan 5 bilangan yang dicari. Jadi 3 buah dapat dibuat bebas, kita ambil $s_3 = r$, $s_4 = s$, $s_5 = t$ sehingga kita peroleh

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; r, s, t \in R.$$

   Sekarang $s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3 + s_4\mathbf{w}_4 + s_5\mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$ menjadi:
   $(-r - s - t)\mathbf{w}_1 + (r - s - 2t)\mathbf{w}_2 + r\mathbf{w}_3 + s\mathbf{w}_4 + t\mathbf{w}_5 =$
   $r(-\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3) + s(-\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4) + t(-\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_5) = \mathbf{0}$, yang

berlaku untuk semua nilai r, s, $t \in R$. Dengan pemilihan dua dari nilai ini = 0 dan satu nilai $\neq 0$, kita peroleh $-\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$,
Hasil ini menunjukkan bahwa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$, $\mathbf{w}_5$, masing-masing kombinasi linear dari $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$.
Dengan demikian terlihat bahwa basis ruang kita adalah$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, dan dimensinya = 2.

Daftar Pustaka

Bernard Kolman. (1993). *Introductory Linear Algebra with Applications*. Macmillan.

Howard Anton. (1991). *Elementary Linear Algebra*. Wiley.

Wono Setya Budhi. (1995). *Aljabar Linear*. Jakarta: Gramedia.