MODUL 1

Himpunan dan Operasinya

Drs. Warsito, M.Pd.

PENDAHULUAN

Himpunan adalah koleksi (pengelompokan) dari objek-objek dengan karakteristik yang dinyatakan dengan jelas. Kejelasan karakteristik diperlukan agar dapat dipelajari dan dikembangkan tanpa menimbulkan keraguan. Konsep himpunan banyak digunakan dan dijumpai diberbagai bidang bukan hanya di bidang matematika tetapi juga di bidang lain. Dalam kegiatan sehari-hari, himpunan digunakan baik secara langsung maupun tidak langsung.

Teori himpunan merupakan landasan konsep matematika untuk relasi, fungsi, urutan, dan lain-lain yang banyak digunakan dalam kalkulus, analisis, aljabar, geometri, dan lain-lain. Modul ini terdiri dari dua kegiatan belajar. Pada Kegiatan Belajar 1, Anda mempelajari konsep himpunan dan pengertian-pengertian himpunan. Teorema-teorema sederhana yang menyangkut operasi-operasi himpunan diberikan yang disertai dengan pembuktiannya. Pada Kegiatan Belajar 2, Anda mempelajari gabungan, irisan dan perkalian Cartesius himpunan-himpunan sebarang. Konsep gabungan, irisan dan perkalian Cartesius untuk himpunan diberikan disertai dengan contoh-contoh dan teorema-teorema yang menyangkut operasi-operasi tersebut.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk menjelaskan himpunan dan operasinya. Lebih rinci lagi Anda diharapkan mampu:

a. menjelaskan pengertian himpunan;
b. menuliskan himpunan dengan cara mendaftarkan anggotanya;
c. menuliskan himpunan dengan cara menyebutkan ciri-ciri (penjelasan) anggotanya;
d. menjelaskan kesamaan himpunan;
e. menjelaskan himpunan bagian;
f. menjelaskan himpunan semesta;
g. menjelaskan komplemen himpunan;

h. menjelaskan himpunan kuasa;
i. menentukan himpunan bagian, komplemen, himpunan kuasa dan koleksi himpunan kuasa;
j. menjelaskan operasi gabungan, irisan, selisih, selisih simetri, dan perkalian Cartesius;
k. mengoperasikan gabungan, irisan, selisih, selisih simetri, dan perkalian Cartesius beberapa himpunan;
l. menjelaskan hukum-hukum/sifat-sifat (idempoten, asosiatif, komutatif, distributif, identitas, komplemen, De Morgan) himpunan;
m. membuktikan hukum-hukum/sifat-sifat sederhana himpunan; dan
n. menjelaskan perkalian Cartesius sebagai dasar menggambar grafik.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian-Pengertian dalam Himpunan

A. PENGERTIAN HIMPUNAN

Anda tentu sering melihat pedagang menjajakan dagangannya dengan harga ditulis di secarik kertas yang berbeda-beda. Dari kejauhan telah terlihat, misalnya dagangan buah duku, ada yang berharga Rp.30.000/kg, ada yang Rp.25.000/kg, dan ada yang Rp.20.000/kg. Para pedagang tersebut melakukan pengelompokan berdasarkan besar-kecilnya (ukuran) duku, yaitu duku besar (kualitas bagus), duku sedang (kualitas sedang), dan duku kecil (kualitas kurang bagus).

Secara tidak disadari, sebenarnya pedagang tersebut telah menggunakan konsep himpunan. Mereka membuat himpunan duku besar, himpunan duku sedang, dan himpunan duku kecil.

Secara lebih formal, himpunan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

Himpunan adalah sekumpulan atau sekelompok **objek** yang memiliki **ciri sama** yang dinyatakan dengan **jelas**.

Di sini ada penekanan berupa **ciri sama** dan **jelas**. Pada ilustrasi pedagang duku, **ciri sama** dan **jelas** adalah **kualitas** duku. Berdasarkan kualitas duku tersebut, maka memunculkan himpunan duku besar, duku sedang (kualitas sedang), dan duku kecil (kualitas kurang bagus).

Ilustrasi yang lain dapat dilihat pada contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.1.1

(a) Himpunan semua mahasiswa Universitas Terbuka (UT) yang terdiri 500 ribu orang. Di sini yang menjadi ciri sama adalah **mahasiswa UT**. Jadi mahasiswa yang berada di Medan, Makasar, Jakarta, atau di Jayapura bahkan yang berdomisili di luar negeri asalkan mereka terdaftar di UT maka mereka termasuk objek himpunan tersebut.

(b) Himpunan mahasiswa UT yang registrasi mata kuliah Pengantar Matematika yang terdiri 150 orang mahasiswa. Di sini yang menjadi anggota himpunan hanya mahasiswa yang memiliki ciri sama yaitu **mahasiswa UT yang registrasi mata kuliah Pengantar Matematika** saja. Mahasiswa yang walaupun ia terdaftar sebagai mahasiswa UT tetapi tidak registrasi mata kuliah Pengantar Matematika, maka ia tidak termasuk dalam himpunan ini.

(c) Himpunan semua bilangan **asli** yang lebih kecil dari 10. Di sini yang menjadi objek himpunan adalah bilangan $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ sedangkan $\frac{1}{2},-1,20,\ldots$ tidak termasuk objek himpunan tersebut.

(d) Himpunan huruf (abjad) dalam ejaan bahasa Indonesia yang terdiri 26 buah.

(e) Himpunan huruf hidup (vokal). Jadi anggota himpunan itu hanya terdiri dari huruf a, i, u, e, dan o. Sedangkan huruf mati (konsonan) $b,c,d,f,\ldots$ dan yang lainnya tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

B. LAMBANG DAN CARA PENULISAN HIMPUNAN

Lambang himpunan secara umum ditulis dengan huruf kapital $A,B,C,D,\ldots$ dan seterusnya. Untuk himpunan khusus yaitu himpunan bilangan prima, komposit, asli, cacah, bulat, rasional, irasional, real dan kompleks akan di berikan notasi tersendiri yaitu $\mathbb{P}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}_a$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}_r$, $\mathbb{R}$, dan $\mathbb{C}$.

Sedangkan objeknya ditulis dengan huruf kecil $a,b,c,d,e,\ldots$ dan seterusnya, bilangan 1,2,3,4,5,6, dan seterusnya, atau dengan menyebutkan nama objeknya langsung.

Cara penulisan himpunan ada dua macam, yaitu:

(1) menjelaskan berdasarkan ciri-cirinya, misalnya
$A = \{x \mid \text{penjelasan dari ciri-ciri objek } x\}$; dan

(2) mendaftarkan objeknya di dalam kurung kurawal $A = \{..,..,..,....\}$.

Contoh 1.1.2
Apabila Contoh 1.1.1 dituliskan dengan cara (1):

(a) $M = \{m \mid m \text{ mahasiswa UT}\}$

(b) $K = \{x \mid x \text{ mahasiswa UT yang registrasi Pengantar Matematika}\}$

(c) $N = \{x \mid x \text{ bilangan asli lebih kecil dari } 10\}$

(d) $H = \{x \mid x \text{ huruf (abjad)}\}$

(e) $V = \{x \mid x \text{ huruf hidup (vokal)}\}$

Apabila Contoh 1.1.1 dituliskan dengan cara (2):

(a) $M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{500}\}$. Ini kurang praktis karena harus menyebutkan satu per satu dari 500 ribu mahasiswa.

(b) $K = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_{150}\}$. Ini kurang praktis karena harus menyebutkan satu per satu dari sekitar 150 nama mahasiswa.

(c) $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(d) $H = \{a, b, c, ..., z\}$. Ini kurang praktis karena harus menyebutkan satu per satu sebanyak 26 huruf.

(e) $V = \{a, i, u, e, o\}$

Cara penulisan himpunan dengan menggunakan cara (1) atau cara (2) sangat tergantung pada keperluan atau konteksnya.

C. ANGGOTA, BUKAN ANGGOTA, DAN HIMPUNAN KOSONG

Suatu objek yang **termasuk** didalam himpunan disebut **anggota** atau **unsur** atau **elemen** diberi notasi $\in$ (istilah anggota, unsur, atau elemen ketiganya sama-sama sering digunakan), sedangkan yang **tidak termasuk** di dalam himpunan disebut **bukan anggota** atau **bukan unsur** atau **bukan elemen** diberi notasi $\notin$. Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut **himpunan kosong**, diberi notasi $\varnothing$ atau $\{\ \}$.

Contoh 1.1.3

(a) Jika $V = \{a, i, u, e, o\}$, maka $a \in V$ dan juga $i, u, e, o \in V$, sedangkan $b \notin V$ dan juga $c, d, f, g, h, j \notin V$.

(b) Jika $N = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, maka $2 \in N$ dan juga $4, 7, 10, 100 \in N$ sedangkan $-1 \notin N$ dan juga $\frac{1}{2}, 101, -5, \notin N$.

(c) $\varnothing = \{x \mid x \text{ bilangan asli lebih kecil dari } 1\}$, karena bilangan asli paling kecil adalah 1.

D. HIMPUNAN TERHINGGA DAN TAK TERHINGGA

Pada Modul 1 ini, istilah himpunan terhingga dan tak terhingga (keterhinggaan) dibatasi pada pengertian yang sederhana yaitu dikaitkan dengan "banyaknya" anggota atau unsur himpunan tersebut. Sedangkan pembahasan **keterhinggaan** lebih mendalam akan dibahas pada Modul 8 Buku Materi Pokok (BMP) MATA4101Pengantar Matematika ini.

Suatu himpunan disebut **terhingga (**istilah lain **berhingga** atau **hingga)**, apabila banyaknya anggota terhingga.

Contoh 1.1.4

(a) $A = \{2, 4, 6, 9\}$ himpunan terhingga, banyaknya anggota ada 4 buah.

(b) $B = \{x \mid x \text{ yang memenuhi persamaan } 2x = 4\} = \{2\}$

(c) $C = \{1, 2, 3, ..., n\}$ himpunan terhingga, terdapat sebanyak n buah buah anggota.

(d) $N_g = \{2, 4, 6, ..., 20\}$ himpunan terhingga, terdapat 10 bilangan genap.

Dari beberapa contoh di atas terlihat kalau himpunan terhingga ditulis dengan cara mendaftarkan anggotanya, maka suatu saat akan berakhir.

Suatu himpunan disebut **tak terhingga**, apabila banyaknya anggota tidak terhingga (tidak terbatas).

Contoh 1.1.5

Contoh-contoh himpunan tak terhingga:

(a) $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ himpunan semua bilangan asli, di belakang 3 masih dapat diteruskan $4, 5, 6, \ldots$ dan seterusnya tidak berakhir;

(b) $H = \left\{ x \middle| x = \dfrac{1}{n} \text{ dan } n \in N \right\} = \left\{ \dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots \right\} = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots \right\}$, di belakang $\dfrac{1}{3}$ masih ada anggota lain $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \ldots$ dan seterusnya;

(c) $N_1 = \; 1,3,5,... \;$.

(d) $N_2 = \; 2,4,6,...$

(e) $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ himpunan bilangan bulat.

Dari beberapa contoh di atas terlihat kalau himpunan tak terhingga ditulis dengan cara mendaftarkan anggotanya, maka tidak pernah akan berakhir.

E. HIMPUNAN SEMESTA, HIMPUNAN BAGIAN, DAN KOMPLEMEN

Pada dasarnya himpunan **semesta** adalah himpunan yang memuat **semua** anggota yang sedang menjadi konteks (semesta) pembicaraan. Apabila didefinisikan secara formal sebagai berikut.

Definisi 1.1.1

Himpunan **semesta** diberikan notasi S adalah himpunan yang memuat **semua** anggota yang sedang menjadi konteks (semesta) pembicaraan.

Contoh 1.1.6

(a) $\mathrm{S} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ merupakan himpunan semesta jika yang dibicarakan dalam konteks semua **huruf**.

(b) $V = \{a, i, u, e, o\}$ merupakan himpunan semesta jika yang dibicarakan semua **huruf hidup**.

(c) $B = \{\text{kadal,singa,sapi,...,ular}\}$ merupakan himpunan semesta jika yang dibicarakan tentang **binatang**.

(d) $B_b = \{\text{singa,harimau,beruang,...}\}$ merupakan himpunan semesta jika yang dibicarakan tentang **binatang buas**.

(e) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ himpunan semua bilangan **asli**.

(f) $N_{ga} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ himpunan semua bilangan **ganjil** (gasal**)**.

(g) $N_3 = \{3, 9, 15, 27, 33, ...\}$ himpunan **kelipatan** 3 **bilangan ganjil**.

(h) $N_{ge} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ himpunan semua bilangan **genap**.

(i) $N_4 = \{4, 8, 12, 16, 20...\}$ himpunan kelipatan 2 bilangan **genap**.

Contoh bagian (e), (f), (g), (h), dan (i) juga dapat dianggap sebagai himpunan semesta. Misalnya, $N_4 = \{4, 8, 12, 16, 20...\}$ adalah himpunan **semesta**, apabila konteks pembicaraannya adalah semua bilangan yang merupakan **kelipatan** 2 dari bilangan genap. Tetapi kalau yang dibicarakan konteks bilangan genap, maka $N_4 = \{4, 8, 12, 16, 20...\}$ bukan himpunan semesta, karena $2, 6, 10, ... \notin N_4$.

Definisi 1.1.2 [Himpunan Sama dan Himpunan Bagian]

1. Dua himpunan A dan B dikatakan **sama**, ditulis $A = B$, jika kedua himpunan memiliki anggota-anggota yang sama.
2. Himpunan A dikatakan **himpunan bagian** dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$ apabila setiap anggota A juga anggota B.
3. Himpunan A dikatakan **himpunan bagian sejati** dari himpunan B, ditulis $A \subset B$ apabila $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.

***Catatan*:** Apabila A **bukan** himpunan bagian sejati dari himpunan B diberikan notasi $A \not\subset B$.

Dari Definisi 1.1.2 tersebut di atas, maka:

a. disebut $A = B$ jika dan hanya $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ (ini sangat penting);

b. (1) disebut $A \neq B$ jika $x \in A$ tetapi $x \notin B$ atau

(2) disebut $B \neq A$ jika $x \in B$ tetapi $x \notin A$;

c. disebut $A \not\subset B$ jika terdapat $a \in A$ tetapi $a \notin B$; dan

d. jika $A \not\subset B$, maka **bukan** $A \subseteq B$ [$A \subseteq B$ tidak dipenuhi/berlaku].

Dari pengertian himpunan semesta dan himpunan bagian maka sesungguhnya pengertian himpunan semesta dan himpunan bagian tersebut **relatif** (nisbi), artinya tergantung dari konteks (semesta) pembicaraannya. Misalnya himpunan $V = \{a, i, u, e, o\}$ adalah **himpunan semesta** apabila konteks pembicaraanya himpunan **huruf hidup**, tetapi sebagai **himpunan bagian** apabila konteks pembicaraannya himpunan **huruf** $\mathrm{S} = \{a, b, c, \ldots, z\}$.

Berikut ini diberikan contoh-contoh yang terkait dengan himpunan bagian dan himpunan bagian sejati.

Contoh 1.1.7a

Misalkan $A = \ 2,3,4\ $, $B = \ 1,2,3,4,5\ $, $C = \ 5,4,3,2,1\ $, dan $D = \ 1,6\ $.

Periksa, apakah:

(a) $A \subseteq B$, (b) $C \subseteq A$, (c) $B = C$, (d) $A \subset C$, (e) $D \subset B$.

Jawab:

(a) Jika diambil $x \in A$, maka $x \in B$ sehingga $A \subseteq B$.

(b) Jika diambil $y \in C$ maka $1,5 \notin A$ sehingga $C \not\subset A$, jadi tidak berlaku $C \subseteq A$.

(c) Jika diambil $x \in B$ maka $x \in C$, sehingga $B \subseteq C$.
Sebaliknya jika diambil $y \in C$ maka $y \in B$, sehingga $C \subseteq B$.
Karena $B \subseteq C$ dan $C \subseteq B$, maka $B = C$.

(d) Jika diambil $x \in A$ maka $x \in C$ sehingga $A \subseteq C$.
Jika diambil $1,5 \in C$ tetapi $1,5 \notin A$ sehingga $A \neq C$.
Karena $A \subseteq C$ dan $A \neq C$, maka $A \subset C$.

(e) Ambil $6 \in D$ tetapi $6 \notin B$, jadi $D \not\subset B$.

Contoh 1.1.7b

Diketahui $A = \ 0,2\ $, $B = \ 2,4\ $, $C = \ 2,4,6,8\ $, dan $D = \ 8,4,6,2\ $.

Tunjukkan bahwa ….

(a) $A \not\subset B$; (b) $B \not\subset A$; (c) $A \neq B$; (d) $C \neq B$; (e) $B \subseteq C$;
(f) $B \subset C$; (g) $C = D$; (h) $C \not\subset A$; (i) $D \not\subset B$; (j) $A \not\subset D$.

Jawab:

(a) Ambil $0 \in A$ ternyata $0 \notin B$, jadi $A \not\subset B$.

(b) Ambil $4 \in B$ ternyata $4 \notin A$, jadi $B \not\subset A$.

(c) Ambil $0 \in A$ ternyata $0 \notin B$, jadi $A \neq B$.

(d) Ambil $8 \in C$ ternyata $8 \notin B$, jadi $C \neq B$ berarti juga $B \neq C$.

(e) Ambil sebarang $x \in B$ ternyata $x \in C$, jadi $B \subseteq C$.

(f) Dari (e) $B \subseteq C$ dan dari (d) $B \neq C$, jadi $B \subset C$.

(g) - Ambil sebarang $x \in C$ ternyata $x \in D$, jadi $C \subseteq D$
- Ambil sebarang $y \in D$ ternyata $y \in C$, jadi $D \subseteq C$

Karena $C \subseteq D$ dan $D \subseteq C$, maka $C = D$.

(h) Ambil $4 \in C$ ternyata $4 \notin A$, jadi $C \not\subset A$.

(i) Ambil $6 \in D$ ternyata $6 \notin B$, jadi $D \not\subset B$.

(j) Ambil $0 \in A$ ternyata $0 \notin D$, jadi $A \not\subset D$.

Contoh 1.1.7c
Diketahui himpunan $H = \{a, i, u, e\}$.

(a) jika $K = \{e, u, i, a\}$, maka $K = H$;

(b) jika $M = \{e, u, i\}$, maka $M \subset H$ atau $M \subseteq H$;

(c) jika $N = \{a, i, u, e, o\}$, maka $H \subset N$ atau $H \subseteq N$;

(d) jika $L = \{a, i, o\}$, maka $L \not\subset H$ karena $o \in L$ tetapi $o \notin H$.

Contoh 1.1.7d
Buktikan, jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$.

Bukti:
Karena $A \subseteq B$, jika $x \in A$ maka $x \in B$ (*)
Karena $B \subseteq C$, jika $x \in B$ maka $x \in C$ (**)
Dari (*) dan (**), jika $x \in A$ maka $x \in C$ sehingga $A \subseteq C$ [terbukti].

Misalkan himpunan semesta $\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Apabila dibentuk himpunan bagian $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, maka himpunan bagian $B = \{2, 4, 6, 8\}$ merupakan komplemen himpunan A. Definisi lengkap himpunan komplemen sebagai berikut.

Definisi 1.1.3 [himpunan komplemen]

Himpunan **komplemen** A adalah himpunan bagian S yang anggotanya **bukan** anggota A dan diberikan notasi $A^C = \; x \mid x \in \mathrm{S} \text{ tetapi } x \notin A \;$.

Contoh 1.1.8
Misalkan, diketahui himpunan semesta $\mathrm{S} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(a) Jika $A = \{1,3,5,7,9\}$, maka $A^C = \{0,2,4,6,8\}$
(b) Jika $B = \{1,3,5\}$, maka $B^C = \{0,2,4,6,7,8,9\}$
(c) Jika $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, maka $C^C = \{9\}$
(d) Jika $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, maka $D^C = \varnothing$

Contoh 1.1.9
Misalkan $S = \{a,b,c,...,z\}$ adalah himpunan semesta huruf, maka:

(a) $V = \{a,i,u,e,o\}$ himpunan huruf hidup (vokal);
(b) $K = \{b,c,d,...,z\}$ himpunan huruf konsonan;
(c) $V = \overline{K} = \{a,i,u,e,o\}$ merupakan komplemen K ; dan
(d) $K = \overline{V} = \{b,c,d,...,z\}$ merupakan komplemen V .

F. HIMPUNAN KUASA

Himpunan **kuasa** dari himpunan A , ditulis $\mathrm{P}(A)$, adalah **koleksi** semua **himpunan bagian** dari A .

Contoh 1.1.10
(a) Jika $A = \{1,2\}$, maka himpunan kuasa $\mathrm{P}(A)$ adalah:
$\mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
(b) Jika $B = \{a,b,c\}$, maka himpunan kuasa $\mathrm{P}(B)$ adalah:
$\mathrm{P}(B) = \ \varnothing, \{a\}, \{b\}, (c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$.
(c) Jika $C = \{1,2,3,4\}$, maka himpunan kuasa $\mathrm{P}(A)$ adalah:
$\mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$.

Perhatikan *Contoh* 1.1.10.

- Untuk (a) banyaknya anggota A adalah 2 buah dan banyaknya anggota himpunan kuasa adalah $4 = 2^2$; untuk (b) banyak anggota B adalah 3 buah dan banyaknya anggota himpunan kuasa adalah $8 = 2^3$; sedangkan untuk (c) banyaknya anggota C adalah 4 buah dan banyaknya anggota himpunan kuasa adalah $16 = 2^4$.

- Secara umum, untuk himpunan A yang terdiri dari n anggota maka banyaknya anggota koleksi himpunan adalah $|\mathrm{P}(A)| = 2^n$.

Contoh 1.1.11

Tentukan himpunan kuasa dan jumlah anggota dari himpunan-himpunan berikut ini:

(a) $K = \{5\}$

(b) $M = \{2,3\}$

(c) $L = \{1,a,2,b,3\}$

(d) $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Jawab:

(a) $\mathrm{P}(K) = \{\varnothing, \{5\}\}$; $|\mathrm{P}(K)| = 2^1 = 2$.

(b) $\mathrm{P}(M) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$; $|\mathrm{P}(M)| = 2^2 = 4$.

(c) $\mathrm{P}(L) = \{\varnothing, \{1\}, \{a\}, \{2\}, \{b\}, \{3\}, \{1,a\}, \{1,2\}, \{1,b\}, \{1,3\}, \{a,2\}, \{a,b\},$
$\{a,3\}, \{2,b\}, \{2,3\}, \{b,3\}, \{1,a,2\}, \{1,a,b\}, \{1,a,3\}, \{1,2,b\},$
$\{1,2,3\}, \{1,b,3\}, \{a,2,b\}, \{a,2,3\}, \{a,b,3\}, \{2,b,3\}, \{1,a,2,b\},$
$\{1,a,2,3\}, \{1,a,b,3\}, \{1,2,b,3\}, \{a,2,b,3\}, \{1,a,2,b,3\}\}$;
$|\mathrm{P}(L)| = 2^5 = 32$.

(d) Jumlah anggota $\mathrm{P}(N) = 2^7 = 128$. Untuk himpunan kuasa-nya, silakan diperiksa sendiri sebagai latihan, tidak sukar tetapi perlu kecermatan dan kesabaran.

Setelah menguasai meteri Himpunan dan Operasinya, silakan Anda mencoba mengerjakan soal-soal latihan berikut ini.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tuliskan himpunan berikut dengan cara: (i) mencirikan (berdasarkan ciri-cirinya); dan (ii) mendaftarkan anggotanya.
   a. Himpunan 30 orang peserta mata kuliah Pengantar Matematika yang memperoleh nilai A.
   b. Himpunan buah-buahan.
   c. Himpunan bilangan kelipatan 3.
   d. Himpunan ikan air tawar
   e. Himpunan bilangan asli di antara 1 dan 10.

2) Diketahui himpunan $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Periksa, apakah unsur-unsur berikut ini merupakan anggota atau bukan anggota N !

a. $a = 1-4$	b. $b = 3-2$	c. $c = 2-2$	d. $d = 3+5$
e. $a = 4+6$	f. $a = 2\times 4$	g. $a = 5\times 3$	h. $h = 2:4$
i. $i = 4:2$	j. $j = 2:2+4$	k. $k = 2:(2+4)$	l. $l = 2:2\times 4$

3) Buatlah contoh-contoh:
   a. himpunan terhingga
   b. himpunan tak terhingga

4) Diketahui himpunan semesta $S = \{1,3,5,7,9\}$, $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,5,9\}$, dan $C = \{1,7\}$.
   a. Periksa, apakah berlaku:
      (1) $B \subset A$; (2) $A \subset S$; (3) $C \subset B$; (4) $A \subseteq S$.
   b. Tentukan:
      (1) A^C; (2) B^C; (3) C^C.

5) Diketahui $H = \{1, a, 2\}$. Tentukan:
   a. Himpunan kuasa H.
   b. Jumlah koleksi himpunan bagian dari H.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) e. (i) $N = \ x \,|\, x$ bilangan asli di antara 1 dan 10

   (ii) $H = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

   a., b., c., dan d., silakan dicoba sendiri!

2) a. $a = 1 - 4 = -3 \notin N$ [bukan anggota N]

   d. $d = 3 + 5 = 8 \in N$ [anggota N]

   h. $h = 2 : 4 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \notin N$ [bukan anggota N]

   l. $l = 2 : 2 \times 4 = 1 \times 4 = 4 \in N$ [anggota N]

   Yang lain silakan dicoba sendiri!

3) a. $A = \{1,2,3,4,5\}$; $B = \{1,3,5,7,...,21\}$, silakan ditambah sendiri!

   b. $H = \{1,3,5,.....\}$; $Z = \{...,-3,-2,-1,0\}$, silakan ditambah sendiri!

4) a. $B = \{1,5,9\}$ dan $A = \{1,3,5,7\}$, $9 \in B$ tetapi $9 \notin A$ maka $B \not\subset A$.

   b. $\mathrm{S} = \{1,3,5,7,9\}$ dan $A = \{1,3,5,7\}$ maka $A^C = \{9\}$.

   Yang lain silakan dicoba sendiri!

5) a. $\mathrm{P}(H) = \left\{\varnothing, \{1\}, \{a\}, \{2\}, \{1,a\}, ...\right\}$ silakan dilengkapi!

   b. $|\mathrm{P}(H)| = ...$

RANGKUMAN

1. Himpunan adalah sekumpulan atau sekelompok **objek** yang memiliki **ciri sama** yang dinyatakan dengan **jelas**.
2. Cara penulisan himpunan dapat …
   a. menjelaskan berdasarkan ciri-cirinya, misalnya $A = \{x \,|\, \text{penjelasan dari ciri-ciri objek } x\}$; dan
   b. mendaftarkan objeknya didalam kurung kurawal $A = \{..,..,..,...\}$.
3. Jika a anggota A ditulis $a \in A$; a **bukan** anggota A ditulis $a \notin A$.

4. a. Himpunan A **terhingga** ditulis $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, terdapat n anggota/unsur/obyek.
   b. Himpunann A tak terhingga ditulis $A = \{1, 2, 3, ...\}$ terdapat tak terhingga anggota/unsur/obyek.
5. a. Himpunan semesta S adalah himpunan yang memuat semua anggota yang menjadi konteks pembicaraan.
   b. Himpunan A sama dengan B ditulis $A = B$.
   c. A himpunan bagian B ditulis $A \subseteq B$.
   d. A himpunan bagian sejati B ditulis $A \subset B$.
   e. Komplemen A ditulis A^C dan $A = \{x \mid x \in \mathrm{S} \text{ tetapi } x \notin A\}$.

6. Jika himpunan A terdiri n anggota, maka himpunan kuasa $\mathrm{P}(A)$ memiliki koleksi anggota sebanyak $|\mathrm{P}(A)| = 2^n$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

***Perhatikan*:** Setiap soal bernilai 3, kecuali nomor 16) bernilai 12.

Soal nomor 1) dan nomor 2).
Misalkan M himpunan mahasiswa UT yang registrasi mata kuliah MATA4101 Pengantar Matematika pada semester ganjil sebanyak 152 orang.

1) Apabila himpunan M dituliskan berdasarkan ciri-cirinya, maka
   $M = \{x \mid x \text{ mahasiswa UT yang meregistrasi MATA4101pada semester ganjil } 2018/2019\}$
   A. Salah B. Benar

2) Apabila himpunan M dituliskan dengan cara mendaftarkan anggotanya, maka
   A. $M = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_{152}\}$ B. $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ...\}$

Soal nomor 3) s.d. nomor 13).
Diketahui himpunan semesta $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{2, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{2, 6, 10\}$.

3) Jika $x = 3 - 2$, maka $x \in S$.
A. Salah
B. Benar

4) Jika $y = 2 \times 3$, maka $y \in A$.
A. Salah
B. Benar

5) Jika $z = 10 : 2$, maka $z \notin C$.
A. Salah
B. Benar

6) Berlaku $A \subset C \subset B \subset S$.
A. Salah
B. Benar

7) Berlaku $A \subset \mathrm{S}$.
A. Salah
B. Benar

8) Jika $D = \{1, 2, 3\}$ maka $D \subset \mathrm{S}$.
A. Salah
B. Benar

9) Berlaku $B \subseteq \mathrm{S}$.
A. Salah
B. Benar

10) $A^C = \{4, 6, 8, 10\}$.
A. Salah
B. Benar

11) Berlaku $A \subseteq C$.
A. Salah
B. Benar

12) $B^C = \{10\}$.
A. Salah
B. Benar

13) $C^C = ...$
A. $\{4, 8\}$
B. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

Soal nomor 14) dan nomor 15).
Diketahui $H = \{a, e, o\}$.

14) Himpunan kuasa H adalah $\mathrm{P}(H) = \ldots$.
   A. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.
   B. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

15) Banyaknya koleksi anggota himpunan kuasa adalah $|P(H)| = \ldots.$
   A. 7 B. 8

16) Diketahui $S_1 = \{0,2,4,6,8\}$, $S_2 = \{0,1,3,5,7,9\}$, dan himpunan semesta $\mathrm{S} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

   a. Periksa, apakah berlaku:
      1) $S_1 \subset S_2$; 2) $S_2 \subset S_1$; 3) $S_1 \subseteq \mathrm{S}$; 4) $S_2 \subset \mathrm{S}$.
   b. Tentukan:
      1) S_1^C; 2) S_2^C; 3) $|P(S_1)|$; 4) $|P(S_2)|$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{57} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
$<$ 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Operasi Himpunan dan Sifat-sifatnya

Pada Kegiatan Belajar 1 telah dibahas pengertian-pengertian yang terkait dengan himpunan. Selanjutnya, pada Kegiatan Belajar 2 akan dibahas mengoperasikan dua atau lebih pada himpunan secara umum. Pada bilangan, kita telah mengenal operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$). Misalnya, $2+3=5$ atau $2\times 3=6$. Sekarang, apa dan bagaimana cara mengoperasikan himpunan?

Operasi himpunan yang dibahas pada kesempatan ini adalah **gabungan**, **irisan**, **selisih**, dan **selisih simetris**. Adapun pembahasan lebih lengkap disajikan berikut ini.

A. OPERASI HIMPUNAN DAN DIAGRAM VENN

Misalkan $A \subseteq S$ dan $B \subseteq S$, maka:

1. **Gabungan** himpunan A dan B, diberi notasi $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya milik A **atau** B **atau** keduanya. Jadi ditulis,
   $A \cup B = \ x \mid x \in A, x \in B \ $.

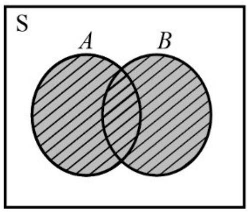


Diagram $A \cup B$

2. **Irisan** himpunan A dan B, diberi notasi $A \cap B$ adalah himpunan yang anggotanya sekaligus milik A dan milik B. Jadi ditulis,
   $A \cap B = \ x \mid x \in A, x \in B \ $.

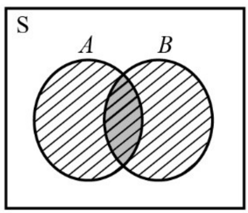


Diagram $A \cap B$

Himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika $A\cap B$ adalah himpunan kosong.

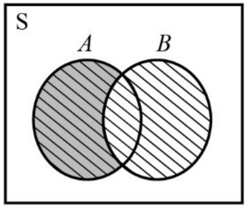
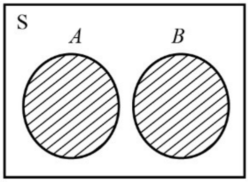


Diagram $A - B$

3. **Selisih** himpunan A dan B, ditulis:
   (1) $A-B$ adalah himpunan yang anggotanya milik A tetapi bukan milik B. Jadi,
   $A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$.



$A\cap B=\varnothing$

   (2) $B-A$ adalah himpunan yang anggotanya milik B tetapi bukan milik A. Jadi,
   $B-A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$.

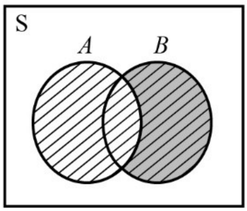


Diagram $B - A$

4. **Selisih Simetris** (penjumlahan) himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya milik A **atau** B **tetapi tidak** keduanya. Jadi ditulis sebagai
   $A+B=\{x \mid x\in (A\cup B),\ x\notin (A\cap B)\}$.

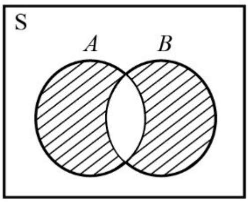
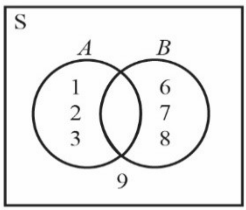


Diagram $A + B$

Contoh 1.2.1
Misalkan $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,
$A=\{1,2,3,4,5\}$ dan $B=\{4,5,6,7,8\}$, maka:

(a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
(b) $A\cap B=\{4,5\}$
(c) $A-B=\{1,2,3\}$
(d) $B-A=\{6,7,8\}$



(e) $A^C = \{6,7,8,9)$

(f) $(A \cup B)^C = \{9\}$

(g) $A + B = (A - B) \cup (B - A) = \{1,2,3\} \cup (6,7,8\} = \{1,2,3,6,7,8\}$.

Contoh 1.2.2

Diketahui $K = \{a,b,c,d,e\}$ dan $L = \{b,c,f,g,h,i\}$, maka:

(a) $K \cup L = \{a,b,c,d,e\} \cup \{b,c,f,g,h,i\} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$

(b) $K \cap L = \{a,b,c,d,e\} \cap \{b,c,f,g,h,i\} = \{b,c\}$

(c) $K - L = \{a,b,c,d,e\} - \{b,c,f,g,h,i\} = \{a,d,e\}$

(d) $L - K = \{b,c,f,g,h,i\} - \{a,b,c,d,e\} = \{f,g,h,i\}$

(e) Gunakan hasil (c) dan (d), maka:
$K + L = (K - L) \cup (L - K) = \{a,d,e\} \cup \{f,g,h,i\} = \{a,d,e,f,g,h,i\}$

B. SIFAT-SIFAT OPERASI HIMPUNAN

Di bawah ini diberikan teorema/hukum/sifat yang berkaitan dengan operasi himpunan.

Teorema 1.2.1

Misalkan S himpunan semesta. Jika $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, dan $C \subseteq S$ maka berlaku:

1) a. $A \cup S = S$ b. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (hukum identitas)
   c. $A \cup \varnothing = A$ d. $A \cap S = A$

2) $A \cup A = A \cap A = A$ (hukum idempoten)

3) a. $A \cup B = B \cup A$ b. $A \cap B = B \cap A$ (hukum komutatif)

4) $\varnothing \subseteq (A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$

5) a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (hukum asosiatif)
   b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6) a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (hukum distributif)
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7) a. $A \cup A^C = S$ b. $A \cap A^C = \varnothing$ (hukum komplemen)
   c. $A(A^C)^C = A$ d. $S^C = \varnothing$ e. $\varnothing^C = S$

8) a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (hukum De Morgan)

Bukti: [hanya beberapa sifat yang akan diberikan]

5) a. Akan dibuktikan $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, dengan cara memperlihatkan $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ dan $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

Ambil sebarang $x \in A \cup (B \cup C)$, maka $x \in A$ atau $x \in B \cup C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$, yang berarti $x \in A \cup B$ atau $x \in C$. Akibatnya $x \in (A \cup B) \cup C$.

Jadi, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Ambil sebarang $x \in (A \cup B) \cup C$, maka $x \in A \cup B$ atau $x \in C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$, yang berarti $x \in A$ atau $x \in (B \cup C)$. Akibatnya $x \in A \cup (B \cup C)$.

Jadi, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Berdasarkan: ($\Rightarrow$) yaitu $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$; dan
($\Leftarrow$) yaitu $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

maka $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ [terbukti].

6) a. Menunjukkan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ambil sebarang $x \in A \cup (B \cap C)$, maka $x \in A$ atau $x \in B \cap C$.

Jika $x \in A$, maka $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$.

Akibatnya $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Jadi, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Ambil sebarang $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, maka $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in A$ atau $x \in C$, sehingga diperoleh $x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in C$.

Akibatnya $x \in A \cup (B \cap C)$.

Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Berdasarkan ($\Rightarrow$) dan ($\Leftarrow$), maka $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [terbukti].

Untuk nomor-nomor lain pada Teorema 1.2.1, silakan dibuktikan sendiri atau didiskusikan dengan kelompok belajarnya sebagai latihan.

C. PERKALIAN CARTESIUS

Perkalian Cartesius merupakan konsep yang mendasari pembuatan grafik fungsi pada bidang atau dimensi dua. Bila diketahui dua himpunan A dan B, maka pasangan terurut dua objek a dan b ditulis (a,b) untuk $a \in A$ dan $b \in B$. Dua pasangan terurut dikatakan sama, yaitu $(a,b)=(x,y)$ jika dan hanya jika $a = x$ dan $b = y$ untuk $a, x \in A$ dan $b, y \in B$.

Secara formal perkalian Cartesius didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.2.1 [Perkalian Cartesius]

> Jika A dan B dua himpunan tak kosong, maka **perkalian Cartesius** diberikan notasi $A \times B$ adalah himpunan pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$, $b \in B$ dan ditulis $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Himpunan A dapat dianggap sebagai sumbu datar dan himpunan B sebagai sumbu tegak, sehingga titik-titik pasangan terurut (a,b) menjadi titik-titik grafik antara himpunan A dan B.

Contoh 1.2.3

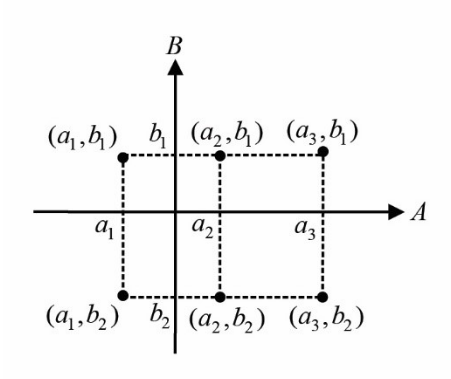
Diketahui $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $B = \{b_1, b_2\}$.

a. Tentukan perkalian Cartesius $A \times B$.
b. Tentukan perkalian Cartesius $B \times A$.
c. Buatlah grafik dari hasil perkalian Cartesius $A \times B$.
d. Buatlah grafik dari hasil perkalian Cartesius $B \times A$.

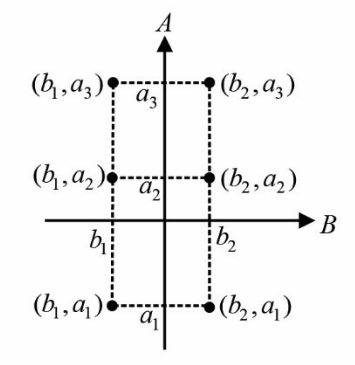
Jawab:

a. $A \times B = \{(a_1,b_1),(a_2,b_1),(a_3,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_2),(a_3,b_2)\}$
b. $B \times A = \{(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,a_3),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,a_3)\}$

c. Gambar $A \times B$:



d. Gambar $B \times A$:



Contoh 1.2.4

Diketahui $M = \{-1, 2, 4\}$ dan $N = \{-3, -2, 1, 2\}$.

(a) Tentukan $M \times N$.

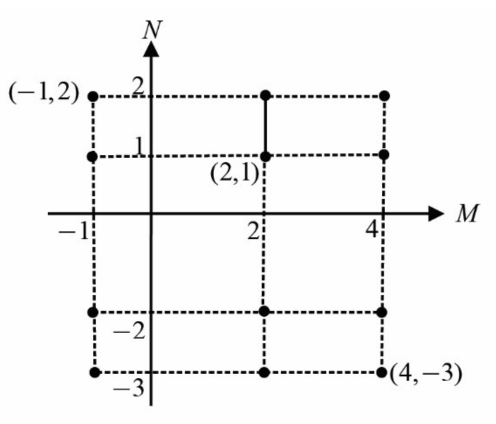
(b) Gambarkan hasil perkalian Cartesius $M \times N$.

(c) Tentukan $N \times M$.

Jawab:

(a) $M \times N = \{(-1,-3), (-1,-2), (-1,1), (-1,2), (2,-3), (2,-2), (2,1), (2,2)$
$(4,-3), (4,-2), (4,1), (4,2)\}$.

(b) Gambar grafik $M \times N$:



(c) $N \times M = \{(-3,-1),(-3,2),(-3,4),(-2,-1),(-2,2),(-2,4),$
$(1,-1),(1,2),(1,4),(2,-1),(2,2),(2,4)\}$.

Setelah selesai mempelajari materi Kegiatan Belajar 2 ini, dipersilakan mengerjakan/mendiskusikan jawaban soal-soal latihan berikut ini.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui $A = \{a,b,c\}$, $B = \{c,d,e\}$, dan $C = \{e,f,g,a\}$.
Tentukan:
a. $A \cap B$, b. $(A \cup C)$, c. $B - C$, d. $A + B$, e. $A \cap C$,
f. $A \cup B$, g. $(A \cap C)$, h. $C - B$, i. $C + B$, j. $A - C$.

2) Diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\}$ (bilangan asli) dengan $A = \quad 2,3,4,5 \quad$, $B = \quad 3,4,5,6,7 \quad$, dan $C = \quad 6,7,8,9,10 \quad$.
Tentukan:
a. $A \cup B$, b. $(A \cap B) \cup C$, c. $(A \cup B) \cap C$, d. $B - A$, e. $(B - A)^C$,
f. $A \cap B$, g. $(A \cup B) \cap C$, h. $(A - B) \cap C$, i. $B + A$, j. $(A - C)^C$.

3) Diketahui $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ (bilangan bulat), $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$, $C \subset \mathbb{Z}$, dengan $A = \quad -3,-2,-1,0 \quad$, $B = \quad -2,-1,0,1,2 \quad$ dan $C = \quad -1,0,1,2,3,4 \quad$.
Tentukan:
a. $A \cup B$, b. $(A \cap B) \cup C$, c. $(A \cup B) \cap C$, d. $B - A$, e. $A - B$,
f. $(A \cup B)^C$, g. $(A \cap B) - C$, h. $(A - B) \cap C$, i. $C - A$, j. $A \cap B$.

4) Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5) Jika diketahui $H = \{a, b, c\}$ dan $A = \{2, 4, 6\}$.

Tentukan perkalian Cartesius:

a. $H \times A$. b. $A \times H$.

6) Diketahui $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{v, w, x, y, z\}$.

Tentukan perkalian Cartesius:

a. $A \times B$. b. $B \times A$.

c. $A \times A$. d. $B \times B$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{...\}$

b. $(A \cup C) = \{a, b, c\} \cup \{c, d, e, a\} = \{...\}$

c. $B - C = \{c, d, e\} - \{e, f, g, a\} = \{...\}$

d. $A + B = (A - B) \cup (B - A)$

$= [\{a, b, c\} - \{c, d, e\}] \cup [\{c, d, e\} - \{a, b, c\}]$

$= \{a, b\} \cup \{d, e\} = \{...\}$

e. $A \cap C = \{a, b, c\} \cap \{e, f, g, a\} = \{...\}$

2) Diketahui $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

a. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \dots$.

b. $(A \cap B) = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = ...$.

$(A \cap B) \cup C = ... \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} = ...$.

c. $(A \cup B) \cap C = ...$

d. $B - A = \{3, 4, 5, 6, 7\} - \{...\} = \{6, 7\}$.

e. Dari bagian 2.d.: $B - A = \{6, 7\}$ sehingga

$(B - A)^C = \{6, 7\}^C \{1, 2, 3, 4, 5, 8, \ldots\}$

3) $A = -3, -2, -1, 0$, $B = -2, -1, 0, 1, 2$ dan $C = -1, 0, 1, 2, 3, 4$

a. $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} = ...$.

b. $(A \cap B) = \{-3, -2, -1, 0\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2\} = ...$.

$(A \cap B) \cup C = ... \cup \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = ...$.

c. $(A \cup B) \cap C = ... \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = ...$.

d. $B - A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} - \{-3, -2, -1, 0\} = ...$

e. $A - B = \{-3, -2, -1, 0\} - \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \ldots.$

4) Harus dibuktikan dua arah, yaitu:
$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$; dan
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Ambil sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$, maka $x \in A$ dan $x \in B \cup C$.
Karena $x \in B \cup C$, maka ($x \in B$ atau $x \in C$).
Dari $x \in A$ dan ($x \in B$ atau $x \in C$), memberikan $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$, sehingga $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$.
Akibatnya $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Jadi $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
Ambil sebarang $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, maka $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$.

(i) Jika $x \in A \cap B$, maka $x \in A$ dan $x \in B$. Karena $x \in B$, maka $x \in B \cup C$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \in B \cup C$, akibatnya $x \in A \cap (B \cup C)$.

(ii) Jika $x \in A \cap C$, maka $x \in A$ dan $x \in C$. Karena $x \in A$, maka $x \in (B \cup C)$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$, akibatnya $x \in A \cap (B \cup C)$.

Dari (i) dan (ii), maka $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Dari ($\Rightarrow$) yaitu $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$; dan
($\Leftarrow$) yaitu $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [terbukti].

5) a. $H \times A = \{(a,2), (a,4), (a,6), ...\}$

b. $A \times H = \{(2,a), (2,b), (2,c), ...\}$

6) Jika diketahui $A = \{2,4,6\}$ dan $B = \{v, w, x, y, z\}$, silakan dilengkapi perkalian Cartesius berikut ini.

a. $A \times B = \{(2,v),(2,w),(2,x),...\}$
b. $B \times A = \{(v,2),(v,4),(v,9),...\}$
c. $A \times A = \{(2,2),(2,4),(2,6),...\}$
d. $B \times B = \{(v,v),(v,w),(v,y),...\}$

RANGKUMAN

1. **Gabungan** himpunan A dan B ditulis $A \cup B = \ x \big| x \in A,\ x \in B\ $.
2. **Irisan** himpunan A dan B ditulis $A \cap B = \ x \big| x \in A,\ x \in B\ $.
3. **Selisih** himpunan A dan B ditulis:
   a. $A - B = \ x \big| x \in A, x \notin B\ $.
   b. $B - A = \{x \big| x \in B, x \notin A\}$.
4. **Selisih Simetris** (penjumlahan) himpunan A dan B, ditulis $A + B = \{x \mid x \in A \cup B), x \notin (B \cap A)$.
5. Sifat-sifat Operasi Himpunan.

Untuk himpunan-himpunan $A \subseteq \mathrm{S}$, $B \subseteq \mathrm{S}$, dan $C \subseteq \mathrm{S}$ dengan S himpunan semesta, maka berlaku:

1) a. $A \cup \mathrm{S} = \mathrm{S}$ c. $A \cup \varnothing = A$ (hukum identitas)
   b. $A \cap \varnothing = \varnothing$ d. $A \cap \mathrm{S} = A$
2) $A \cup A = A \cap A = A$ (hukum idempoten)
3) a. $A \cup B = B \cup A$ b. $A \cap B = B \cap A$ (hukum komutatif)
4) $\varnothing \subseteq (A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$
5) a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (hukum asosiatif)
   b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6) a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (hukum distributif)
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7) a. $A \cup A^C = \mathrm{S}$ b. $A \cap A^C = \varnothing$ (hukum komplemen)
   c. $A(A^C)^C = A$ d. $\mathrm{S}^C = \varnothing$
   e. $\varnothing^C = \mathrm{S}$
8) a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (hukum De Morgan)
   b. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

6. Perkalian Cartesius $A \times B$ adalah himpunan pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$, $b \in B$ ditulis sebagai $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

***Perhatikan*: Setiap soal bernilai 3, kecuali nomor 1) bernilai 19 dan nomor 13) bernilai 15.

1) Diketahui $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, dan $C = \{4,5,6\}$.
Tentukan:

a. $A \cup B$	b. $B \cap C$	c. $C - A$	d. $A + C$
e. $(A \cup B) \cap C$	f. $A - (B \cap C)$	g. $(C - A) \cap B$	h. $(A + C) \cap B$

Soal nomor 2) s.d. nomor 7).
Diketahui A, B, dan C himpunan bagian bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,....\}$ dengan $A = \ 1,2,3,4,5\ $, $B = \ 3,4,5,6,7,8\ $ dan $C = \ 6,7,8,9,10\ $.

2) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

A. Benar B. Salah

3) $(A \cap B) \cup C = \ldots.$

A. $\varnothing$ B. $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

4) $(A \cup B) \cap C = \ldots.$

A. $\{6,7,8\}$ B. $\{5,6,7,8,9\}$

5) $B - A = \ldots.$

A. $\{5,6,7,8,9\}$ B. $\{6,7,8\}$

6) $(A \cup B)^C = \ldots.$

A. $\{1,2,3,4,5,9,10\}$ B. $\{9,10,11,\ldots\}$

7) $B + C = ...$

A. $\{3,4,5,9,10\}$ B. $\{6,7,8\}$

Soal nomor 8) s.d. nomor 12).
Diketahui $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$, dan $C \subset \mathbb{Z}$ dengan

$A = \quad -3,-2,-1,0,1 \quad$,

$B = \quad -2,-1,0,1,2 \quad$,

$C = \quad -1,0,1,2,3,4,5 \quad$, dan

$\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.

8) $A \cup B = \ldots.$

A. $\{-2,-1,0,1\}$ B. $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$

9) $(A \cap B) \cup C = \ldots.$

A. $\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ B. $\{-3,-2,0,1,2,3,4,5\}$

10) $(A \cup B) \cap C = \ldots$

A. $\{-1,0,1,2\}$ B. $\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

11) $B - C = \ldots.$

A. $\{-2,1,0\}$ B. $\{-2\}$

12) $(A + C)^C = ...$

A. $\{...,-5,-4,-1,0,1,6,7,...\}$ B. $\{...,-2,-1,0,1,...\}$

13) Buktikan bahwa $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Soal nomor 14) dan nomor15).
Diketahui $N = \{3,5\}$ dan $A = \{a,c,e\}$.

14) Hasil perkalian Cartesius $N \times A = ...$

A. $\{(a,3),(a,5),(c,3),(c,5),(e,3),(e,5)\}$

B. $\{(3,a),(3,c),(3,e),(5,a),(5,c),(5,e)\}$

15) Hasil perkalian Cartesius $A \times N = ...$
   A. $\{(a,3),(a,5),(c,3),(c,5),(e,3),(e,5)\}$
   B. $\{(3,a),(3,c),(3,e),(5,a),(5,c),(5,e)\}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{73} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

Nilai

1)	B	11)	B
2)	A	12)	B
3)	A	13)	A
4)	B	14)	A
5)	B	15)	B
6)	A		
7)	B		
8)	A		
9)	B		
10)	A		

16) a. (1) ambil $2 \in S_1$, ternyata $2 \notin S_2$ berarti $S_1 \not\subset S_2$. 2

(2) ambil $1 \in S_2$, ternyata $1 \notin S_1$ berarti $S_2 \not\subset S_1$. 2

(3) ambil sebarang $x \in S_1$, ternyata $x \in \mathrm{S}$ berarti $S_1 \subseteq \mathrm{S}$. 2

(4) ambil sebarang $x \in S_2$, ternyata $x \in \mathrm{S}$ berarti $S_2 \subseteq \mathrm{S}$. 2

b. (1) $S_1^C = \{0,2,4,6,8\}^C = \{1,3,5,7,9\}$ 1

(2) $S_2^C = \{0,1,3,5,7,9\}^C = \{2,4,6,8\}$ 1

(3) $|P(S_1)| = 2^5 = 32$ 1

(4) $|P(S_2)| = 2^6 = 64$ 1

Tes Formatif 2

Nilai

1) a. $A \cup B = \{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$. 2

b. $B \cap C = \{2,3,4\} \cap \{4,5,6\} = \{4\}$. 2

c. $C - A = \{4,5,6\} - \{1,2,3\} = \{4,5,6\}$. 2

d. $A + C = (A - C) \cup (B - A) = [\{1,2,3\} - \{4,5,6\}] \cup \{2,3,4\} - \{1,2,3\}]$ 2

$= [\{1,2,3\} \cup \{4\}] = \{1,2,3,4\}$. 2

e. $(A \cup B) \cap C = [\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\}] \cap \{4,5,6\} = \{1,2,3,4\} \cap \{4,5,6\} = \{4\}$ 3

f. $A-(B\cap C)=\{1,2,3\}-[\{2,3,4\}\cap\{4,5,6\}]=\{1,2,3\}-\{4\}=\{1,2,3\}$ 2

g. $(C-A)\cap B=[\{4,5,6\}-\{1,2,3\}]\cap\{2,3,4\}=\{4,5,6\}\cap\{2,3,4\}=\{4\}$ 2

h. dari bagian d. telah dihitung: $A+C=\{1,2,3,4\}$, sehingga:
$(A+C)\cap B=\{1,2,3,4\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\}$. 2

2) A
3) B
4) A
5) B
6) B
7) A
8) B
9) A
10) A
11) B
12) A
13) Harus dibuktikan dua arah [($\Rightarrow$) dan ($\Leftarrow$)]:

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$. 1

Ambil sebarang $x\in A\cap(B\cap C)$, maka $x\in A$ dan $x\in B\cap C$. 1

Karena $x\in B\cap C$, maka $x\in A$ dan $x\in C$. 1

Sehingga memberikan $x\in A$ dan $x\in B$ dan $x\in C$. 1

Karena $x\in A$ dan $x\in B$, maka $x\in(A\cap B)$. 1

Untuk $x\in(A\cap B)$ dan $x\in C$, maka $x\in(A\cap B)\cap C$. 1

Jadi $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$. 1

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$. 1

Ambil sebarang $x\in(A\cap B)\cap C$, maka $x\in A\cap B$ dan $x\in C$. 1

Karena $x\in A\cap B$, maka $x\in A$ dan $x\in B$. 1

Sehingga memberikan $x\in A$ dan $x\in B$ dan $x\in C$. 1

Untuk $x\in B$ dan $x\in C$, maka $x\in B\cap C$. 1

Untuk $x\in A$ dan $x\in B\cap C$, maka $x\in A\cap(B\cap C)$. 1

Jadi $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$. 1

Karena berlaku $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$ dan
$(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$ maka
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. 1

14) B
15) A

Daftar Pustaka

Devlin, K. (2004). *Sets, functions, and logic: An introduction to abstract mathematics*, 3rd edition. London: Chapman & Hall/CRC.

Dugopolski, M. (2009). *Fundamentals of precalculus,* 2nd edition. Boston: Person Education, Inc.

Mendelson, E. (1997). *Introduction to mathematical logic*, 4th edition. London: Chapman & Hall.

Purcell, E. J. Dan Varberg, D. (1992). *Kalkulus dan geometri analitis*. Alih bahasa I Njoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh, Edisi keempat Jilid I. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its application*, 7th edition. New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Stoll, R.R. (1976). *Set theory and logic*. New Delhi: Eurasia Publishing House (PVT), Ltd.