ESPA4222
Edisi 3

Modul
01

Matriks

Dr. Wahyu Widayat, M.Ec.

Daftar Isi Modul

Pendahuluan

Sering kali kita berhadapan dengan masalah mencari solusi dari sistem persamaan linier, atau masalah optimisasi suatu fungsi dengan jumlah variabel yang banyak. Masalah-masalah tersebut dapat dibantu pemecahannya dengan menggunakan matriks. Sistem persamaan linier tersebut dapat ditulis lebih singkat dengan menggunakan matriks dan solusinya dapat diperoleh dengan metode Cramer atau menggunakan invers dari matriks. Dengan menggunakan matriks, maka penyelesaian suatu masalah ternyata akan menjadi lebih mudah. Selain itu, pengetahuan tentang matriks dapat juga diaplikasikan di dalam ekonomi dan bisnis pada banyak hal. Optimisasi suatu fungsi dengan banyak variabel akan diperoleh pemecahan dengan menggunakan matriks. Masalah input-output untuk perencanaan ekonomi juga memerlukan matriks. Tanpa menggunakan matriks, maka masalah-masalah seperti yang disebutkan di atas menjadi sangat sulit atau mungkin tidak akan memberi hasil pemecahan. Oleh sebab itu, konsep matriks seperti yang akan dijelaskan mulai modul ini merupakan konsep penting yang harus dipahami dengan baik.

Mengingat pentingnya matriks dalam kehidupan sehari-hari, maka setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu untuk menggunakan konsep matriks untuk memecahkan masalah ekonomi dan bisnis tertentu.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu untuk:

1. menjelaskan konsep matriks;
2. menghitung penjumlahan dan pengurangan matriks;
3. menghitung perkalian matriks;
4. menghitung transpose dari matriks;
5. menghitung determinan matriks;
6. menghitung akar persamaan dengan kaidah Cramer.

Kegiatan Belajar 1

Konsep Matriks

A. PENGERTIAN MATRIKS

Suatu matriks dapat didefinisikan sebagai suatu susunan angkaangka yang disebut elemen dan bentuk umumnya disusun sebagai berikut.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

atau dapat juga ditulis:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ : & : & : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Simbol untuk matriks ditulis dengan huruf besar (huruf kapital) dan dicetak tebal (*bold)*, sedangkan a_{11} a_{12} ...a_{mn} adalah elemen-elemen digunakan untuk simbol-simbol bilangan riil. Elemen-elemen matriks ditulis di antara dua tanda kurung ( ) atau dapat juga tanda kurung [ ]. Perhatikan indeks yang diberikan untuk setiap elemen. Secara umum elemen dapat diberi simbol a_{ij}. Untuk elemen a_{23} misalnya, dapat diartikan i bernilai 2 dan j bernilai 3. Lebih lanjut dapat dilihat bahwa i menunjukkan baris dan j menunjukkan kolom. Dalam hal i = 2 dan j = 3, maka elemennya adalah a_{23} dan letaknya dalam matriks dapat segera diketahui, yaitu pada baris kedua dan kolom ketiga pada matriks. Karena a_{ij} merupakan simbol dari elemen suatu matriks, adakalanya suatu matriks **A** dilukiskan sebagai:

$$(a_{ij}) \text{ atau } [a_{ij}]$$

Suatu matriks yang mempunyai baris sebanyak m dan jumlah kolomnya n sering disebut dengan matriks m x n yang dibaca **“m kali n”** atau matriks **berdimensi m x n.** Dimensi atau ukuran matriks ini ditulis di sebelah kanan bawah kurung tutupnya.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Matriks di atas jumlah barisnya 3 dan jumlah kolomnya 4. Dimensi matriks **A** adalah 3 x 4.

Bila m = n, matriksnya disebut dengan **matriks bujur sangkar.**

Contoh 1.1:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Dimensi matriks **B** adalah 2 x 2 dan matriks **B** adalah matriks bujur sangkar.

Contoh matriks bujur sangkar dengan dimensi 3 x 3

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Suatu matriks dengan dimensinya sering disimbolkan sebagai $\mathbf{A}_{mxn}$ atau $(a_{ij})_{mxn}$.

Contoh 1.2:

$$\mathbf{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Sebenarnya, tanpa ditulis dimensinya pun kita bisa melihat langsung berapa jumlah baris dan kolomnya, sehingga penulisan matriks juga dibenarkan apabila dimensinya tidak ditulis.

Contoh 1.3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Dua buah matriks dikatakan sama bila kedua matriks tersebut mempunyai dimensi yang sama dan elemen pada baris dan kolom yang sama berelemenkan suatu nilai yang sama.

Contoh 1.4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

A = **C** akan tetapi **A** ≠ **B**, **A** ≠ **D**, **B** ≠ **C, B** ≠ **D** dan **C** ≠ **D**.

Bisa terjadi, suatu matriks hanya memiliki satu kolom atau satu baris saja. Matriks yang hanya memiliki satu kolom disebut dengan **vektor kolom** dan ditulis.

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ : \\ U_m \end{pmatrix} \text{ atau } U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ : \\ U_m \end{bmatrix}$$

U_1, U_2 ... U_m disebut dengan **komponen vektor**. Suatu vektor kolom yang terdiri atas m buah baris disebut **vektor komponen m** atau **vektor baris dimensi m.** Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu baris saja disebut **vektor baris** dan dapat ditulis seperti:

$$V = (V_1, V_2 \ldots V_n)$$
atau
$$V = [V_1, \; V_2, \; \ldots\ldots\ldots, V_n]$$

V_1, V_2 ... V_n merupakan **komponen vektor**. Suatu vektor baris yang terdiri atas n buah kolom disebut **vektor komponen n** atau **vektor baris dimensi n.**

Contoh 1.5:

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks dimensi 2 x 1 atau vektor kolom 2 dimensi.

Contoh 1.6:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks dimensi 5 x 1 atau vektor kolom 5 dimensi.

Contoh 1.7:

[1, 5, 2] adalah matriks dimensi 1 x 3 atau vektor baris 3 dimensi.

Perhatikan, antara elemen yang satu dengan yang lain dipisahkan dengan koma untuk menghindari salah penafsiran sebagai suatu matriks yang hanya memiliki satu elemen seperti [152].

Contoh 1.8:

$\begin{bmatrix} -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$ adalah matriks dimensi 1 x 5 atau vektor baris 5 dimensi.

Dua buah vektor baris dikatakan sama hanya jika kedua vektor mempunyai jumlah kolom yang sama dan elemenelemen yang sepadan di kedua vektor juga sama.

Contoh 1.9:

$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \mathbf{W}$

Dua buah vektor kolom dikatakan sama hanya jika kedua vektor mempunyai jumlah baris yang sama dan elemenelemen yang sepadan di kedua vektor juga sama.

Contoh 1.10:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

B. BENTUK MATRIKS

Pada bagian ini kita akan membahas tiga bentuk matriks, yaitu matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks nol.

1. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang elemenelemennya bernilai nol kecuali elemenelemen yang terletak di diagonal utama, yaitu diagonal dari kiri atas ke kanan bawah, dan paling sedikit satu elemen tidak bernilai nol.

Jadi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$$

merupakan matriks diagonal hanya jika:

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$a_{ij} \neq 0$ untuk paling sedikit satu $i = j$.

Contoh 1.11:

Matriksmatriks berikut adalah matriks diagonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemenelemen diagonalnya bernilai satu, jadi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

merupakan matriks identitas hanya jika:

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

matriks identitas biasanya diberi simbol **I**

karena $i = j$ maka dimensinya cukup ditunjukkan oleh satu angka saja.

Contoh 1.12:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_3 merupakan matriks identitas dimensi 3 x 3.

Contoh 1.13:

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_5 merupakan matriks identitas dimensi 5 x 5.

3. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks dengan dimensi m x n yang semua elemennya bernilai nol dan diberi simbol 0.

Contoh:

$$\mathbf{O}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Bila diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, tentukanlah:

a) Dimensi matriks A.

b) Bentuk matriks B.

c) Jenis matriks C.

d) Jenis matriks D.

2) Bila diketahui:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, tentukanlah:

a) Bentuk matriks D.

b) Bentuk matriks E.

c) Bentuk matriks F.

d) Bentuk matriks G.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) Matriks A dimensinya 2 x 3.

b) Matriks B adalah matriks bujur sangkar berdimensi 3 x 3.

c) Matriks C adalah vektor baris.

d) Matriks D adalah vektor kolom

2) a) Bentuk matriks D adalah bujur sangkar.

b) Matriks E adalah matriks nol.

c) Matriks F adalah matriks diagonal.

d) Matriks G adalah matriks identitas.

Rangkuman

Suatu matriks dapat didefinisikan sebagai suatu susunan angkaangka yang terdiri dari baris dan kolom. Suatu matriks yang mempunyai baris sebanyak m dan jumlah kolom n disebut dengan matriks berdimensi m x n. Matriks bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Matriks yang hanya memiliki satu baris saja disebut dengan vektor baris, dan matriks yang hanya memiliki satu kolom saja disebut dengan vektor kolom.

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang elemenelemennya bernilai nol kecuali elemenelemen yang terletak di diagonal utama, yaitu diagonal dari kiri atas ke kanan bawah, paling sedikit satu elemen tidak bernilai nol.

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonalnya bernilai satu. Matriks nol adalah matriks dengan dimensi m x n yang semua elemennya bernilai nol dan diberi simbol 0.

Tes Formatif 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Matriks **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks ....

A. biasa
B. nol
C. identitas
D. diagonal

2) Matriks **B** = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ adalah matriks ....

A. bujur sangkar
B. biasa dengan dimensi 3 x 4
C. identitas
D. diagonal

3) Matriks **C** = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks ....

A. identitas
B. diagonal
C. nol
D. biasa

4) Matriks **D** = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks ....

A. identitas
B. diagonal
C. nol
D. biasa

5) Matriks **E** = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$ adalah ....

A. matriks diagonal hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$
B. matriks identitas hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

C. matriks nol hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$
D. bukan matriks bujur sangkar jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

6) Matriks $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$ adalah ....

A. matriks diagonal hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk paling sedikit satu $i = j$
B. matriks identitas hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk paling sedikit satu $i = j$
C. matriks nol hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk paling sedikit satu $i = j$
D. bukan matriks bujur sangkar jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk paling sedikit satu $i = j$

7) Matriks $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan vektor ....

A. baris dengan dimensi 1 x 5
B. baris dengan dimensi 5 x 1
C. kolom dengan dimensi 1 x 5
D. kolom dengan dimensi 5 x 1

8) Matriks $\mathbf{A} = [2, \ 3, \ 1]$ adalah vektor ....
A. baris dengan dimensi 1 x 3
B. baris dengan dimensi 3 x 1
C. kolom dengan dimensi 1 x 3
D. kolom dengan dimensi 3 x 1

9) Matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks ....
A. identitas
B. diagonal
C. nol
D. biasa

10) Matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\text{x}4}$ adalah matriks ....

A. identitas
B. diagonal
C. nol
D. biasa

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100$$

Arti tingkat penguasaan

<70%	70% - 79%	80% - 89%	90% - 100%
kurang	cukup	baik	baik sekali

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Operasi Matriks

A. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

Suatu matriks dapat dioperasikan secara aritmatik, yaitu ditambah, dikurangi, dibagi, atau dikalikan. Selain itu suatu matriks dapat juga dioperasikan tetapi tidak terdapat pada operasi aritmatik, yaitu transpose, determinan, dan invers. Karena umumnya matriks bukan merupakan angka tunggal, maka operasi aritmatiknya berbeda dengan operasi pada bilanganbilangan real.

Dua buah matriks dapat dijumlahkan hanya jika kedua matriks tersebut mempunyai dimensi yang sama dan hasilnya adalah matriks lain yang setiap elemennya merupakan hasil penjumlahan elemen-elemen yang letaknya sesuai. Maksud dari letak yang sesuai adalah, kedua elemen tersebut terletak di baris dan kolom yang sama. Jadi jika ada dua matriks:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

Dua buah matriks dapat dikurangkan hanya jika kedua matriks tersebut memiliki dimensi yang sama hasilnya adalah matriks lain yang setiap elemennya merupakan hasil pengurangan elemen-elemen yang letaknya sesuai. Misalnya ada dua buah matriks, yaitu:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathbf{C} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{11}-d_{11} & c_{12}-d_{12} & c_{13}-d_{13} \\ c_{21}-d_{21} & c_{22}-d_{22} & c_{23}-d_{23} \\ c_{31}-d_{31} & c_{32}-d_{32} & c_{33}-d_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.14:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.15:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.16:

$[4, 12, 6]$ $[3, 2, 1] = [1, 10, 7]$

Contoh 1.17:

$[1, 3, 2] + [2, 1, 3] = [3, 4, 5]$

Contoh 1.18:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.19:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.20:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.21:

$[3, 4] + [2, 1] + [1, 3]$ $[5, 8] = [1, 0]$

Contoh 1.22:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.23:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks yang ditambah atau dikurangi dengan matriks nol nilainya tidak akan berubah, jadi:

$$A_{mxn} + 0_{mxn} = A_{mxn}$$

Contoh 1.24:

$$\mathbf{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{2x3} \pm \mathbf{0}_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

B. PERKALIAN MATRIKS

Suatu bilangan skalar dapat dikalikan dengan suatu matriks dimensi berapa pun, dan hasilnya adalah matriks lain yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian bilangan skalar dengan elemen matriks awalnya.

Contoh 1.25:

$$-1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.26:

$$3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 & 15 \\ 15 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.27:

$$C \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C, & 0, & 0, & 2C \end{bmatrix}$$

Contoh 1.28:

$$b\begin{bmatrix} b \\ a \\ ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 \\ ab \\ ab^2 \end{bmatrix}$$

Pada contohcontoh perkalian skalar dengan matriks di atas, skalar dapat dikalikan dengan matriks berapa pun dimensinya. Lain halnya kalau kita akan mengalikan matriks dengan matriks. Perkalian antara dua buah matriks dapat dilakukan kalau dipenuhinya suatu syarat tertentu. Misalkan ada dua matriks yaitu **A** dan **B** yang diketahui dan kita ingin mencari hasil perkaliannya. Syarat yang harus dipenuhi agar dua buah matriks dapat dikalikan adalah jumlah kolom matriks **A** harus sama dengan jumlah baris matriks B.

Jadi seandainya:

$\mathbf{A}_{1x2} = [a_{11}\ a_{12}]$

$$B_{2x3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Perkalian **A** dan **B** dapat dilakukan karena matriks **A** mempunyai dua kolom dan matriks **B** mempunyai dua baris. Hasil perkaliannya yaitu **AB** merupakan suatu matriks yang dimensinya 1 x 3. Jadi:

$$\mathbf{A}_{1x2} \cdot \mathbf{B}_{2x3} = [\mathbf{AB}]_{1x3}$$

Bila kemudian dimisalkan bahwa $[\mathbf{AB}]_{1x3} = \mathbf{C}_{1x3}$ dan $\mathbf{C}_{1x3} = [C_{11}.\ C_{12}.\ C_{13}]$, maka:

$[\mathbf{AB}]_{1x3} = \mathbf{C}_{1x3} = [C_{11}, C_{12}, C_{13}]$.

Sekarang kita akan menentukan prosedur perkalian, ketiga elemen matriks **C** merupakan jumlah hasil perkalian baris matriks **A** dengan kolom matriks **B** dengan mengikuti prosedur berikut ini:

$C_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21}$ (baris 1 matriks **A** kali kolom 1 matriks B).
$C_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22}$ (baris 1 matriks **A** kali kolom 2 matriks B).
$C_{13} = a_{11}\, b_{13} + a_{12}\, b_{23}$ (baris 1 matriks **A** kali kolom 3 matriks B).

Perhatikan bahwa indeks pada $\mathbf{C}_{ij}$ menunjukkan bahwa indeks pertama adalah baris pada matriks **A** dan indeks kedua menunjukkan kolom pada matriks B. Jadi, seandainya $\mathbf{C}_{11}$ harus merupakan jumlah hasil perkalian elemenelemen pada baris pertama matriks **A** dan kolom pertama matriks **B**, dan $\mathbf{C}_{12}$ harus merupakan jumlah hasil perkalian elemenelemen pada baris pertama matriks **A** dan kolom kedua matriks **B**. Bila baris dan kolom telah dipilih, maka elemen yang ada di dalamnya dikalikan secara berpasangan secara urut. Dengan menggunakan gambar, jumlah hasil perkalian untuk mengisi elemen $\mathbf{C}_{ij}$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Untuk C_{11}:

Pasangan pertama

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & - & - \\ b_{12} & - & - \end{bmatrix}$$

Pasangan kedua

Untuk $C_{12:}$

Pasangan pertama

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} - & b_{12} & - \\ - & b_{22} & - \end{bmatrix}$$

Pasangan kedua

Untuk $\mathbf{C}_{11}$, pada pasangan pertama a_{11} dikalikan dengan b_{11} dan pada pasangan kedua a_{12} dikalikan dengan b_{12} sehingga $\mathbf{C}_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{12}$. Untuk $\mathbf{C}_{12}$, pada pasangan pertama a_{11} dikalikan dengan b_{12} dan pada pasangan kedua a_{12} dikalikan dengan b_{22} sehingga $\mathbf{C}_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22}$. Dengan cara yang sama maka dapat diperoleh $\mathbf{C}_{13} = a_{11}\, b_{13} + a_{12}\, b_{23}$.

Contoh 1.29:

$$\mathbf{A} = [1, 2]_{1x2} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$\mathbf{A} \text{ x } \mathbf{B} = [1, 2] \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [1x1 + 2x3,\ 1x5 + 2x2]_{\ 1x2}$$
$$= [1 + 6,\ 5 + 4]_{\ 1x2}$$
$$= [7, 9]_{\ 1x2}$$

Contoh 1.30:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 0 + 3 \times 1 & -1 \times -2 + 3 \times 4 \\ 2 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times -2 + 1 \times 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Contoh 1.31:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \times 0 + 4 \times -1 & 5 \times 5 + 4 \times 3 & 5 \times -4 + 4 \times 2 \\ -1 \times 0 + 0 \times -1 & -1 \times 5 + 0 \times 3 & -1 \times -4 + 0 \times 2 \\ 0 \times 0 + 3 \times -1 & 0 \times 5 + 3 \times 3 & 0 \times -4 + 3 \times 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 37 & -12 \\ 0 & -5 & 4 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Contoh 1.32:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad \mathbf{U} = [3, 2]_{1 \times 2}$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times -2 \\ -1 \times 3 & -1 \times -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Contoh 1.33:

$$\mathbf{U} = [1, 3]_{1x2} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\,x\,1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \text{ x } \mathbf{V} &= [1 \text{ x } 5 + 3 \text{ x } 2]_{1x1} \\ &= [5 + 6]_{1x1} \\ &= [11]_{1x1} \\ &= 11 \end{aligned}$$

Pada contoh di atas dapat dilihat bahwa perkalian antara vektor baris dengan kolom akan menghasilkan skalar. Jadi secara umum dapat ditulis:

$$\mathbf{U} = [u1, \ldots\ un]_{1xn} \text{ dan } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_n \end{bmatrix}_{n\,x\,1}$$

maka: $\mathbf{U}_{1xn}\ \mathbf{V}_{nx1} = \mathbf{W}$ = skalar.
di mana $\mathbf{W} = u_1\ v_1 + u_2\ v_2 + \ldots. + u_n\ v_n$

Dalam perkalian matriks, uruturutan matriks yang dikalikan harus diperhatikan karena **A** x **B** hasilnya berbeda dengan **B** x **A**. Bila dimensi **A** adalah m x n dan **B** adalah n x m maka **A** x **B** dimensinya adalah m x m dan **B** x **A** berdimensi n x n.
Jadi secara umum **A** x **B** ≠ **B** x **A**.

Contoh 1.34:

Bila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$

maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ x } \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 4 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } -1 + 1 \text{ x } 2 & 4 \text{ x } 3 + 0 \text{ x } 6 + 1 \text{ x } 0 \\ -1 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } -1 + 3 \text{ x } 2 & -1 \text{ x } 3 + 2 \text{ x } 6 + 3 \text{ x } 0 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} \\ &= \begin{bmatrix} 4 + 0 + 2 & 12 + 0 + 0 \\ -1 - 2 + 6 & -3 + 12 + 0 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \text{ x } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \text{ x } 4 + 3 \text{ x } -1 & -1 \text{ x } -0 + 3 \text{ x } 2 & 1 \text{ x } 1 + 3 \text{ x } 3 \\ -1 \text{ x } 4 + 6 \text{ x } -1 & -1 \text{ x } -0 + 6 \text{ x } 2 & -1 \text{ x } 1 + 6 \text{ x } 3 \\ 2 \text{ x } 4 + 0 \text{ x } -1 & 2 \text{ x } 0 + 0 \text{ x } 2 & 2 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } 3 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 3 & 0 + 6 & 1 + 9 \\ -4 - 6 & 0 + 12 & -1 + 18 \\ 8 - 0 & 0 + 0 & 2 + 0 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -10 & 12 & 17 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Suatu matriks jika dikalikan dengan matriks identitas atau matriks identitas yang dikalikan dengan suatu matriks hasilnya adalah sama dengan matriks itu sendiri. Jadi:

$$\mathbf{A}_{mxn} = \mathbf{I}_m \mathbf{A}_{mxn} = \mathbf{A}_{mxn} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{mxn}$$

Contoh 1.35:

Bila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$

maka:

$$\mathbf{I.A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x3} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A.I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2x3} = \mathbf{A}$$

Sifat khusus matriks identitas adalah dalam suatu proses perkalian dapat disisipkan (atau dihapus) matriks identitas tanpa mempengaruhi hasilnya, jadi:

$$A_{mxn}\, I_{nxn}\, B_{nxp} = (AI)\, \mathbf{B} = A_{mxn}\, B_{nxp}$$

menunjukkan bahwa ada tidaknya I, hasil perkalian matriksnya tidak akan terpengaruh.

Suatu matriks yang dikalikan dengan matriks nol atau sebaliknya matriks nol dikalikan dengan suatu matriks akan menghasilkan matriks nol, jadi:

$$\mathbf{0}_{kxm}\, \mathbf{A}_{mxn} = \mathbf{0}_{kxn}$$
$$\mathbf{A}_{mxn}\, \mathbf{0}_{nx1} = \mathbf{0}_{mx1}$$

Contoh 1.35:

$$\mathbf{A}_{2x4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_{3x2}\,\mathbf{A}_{2x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}_{2x4}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x4} = \mathbf{O}_{3x4}$$

$$\mathbf{A}_{2x4}\,\mathbf{O}_{4x2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}_{2x4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = \mathbf{O}_{2x2}$$

C. KAIDAH MATRIKS

Di dalam mempelajari aljabar untuk bilangan riil, dipelajari beberapa kaidah seperti:

Kaidah jumlah komutatif	:	$a + b = b + a$
Kaidah perkalian komutatif	:	$ab \neq ba$
Kaidah jumlah asosiatif	:	$(a+b) + c = a + (b + c)$
Kaidah perkalian asosiatif	:	$(ab)c = a(bc)$
Kaidah distribusi	:	$a(b+c) = ab + ac$

Hampir semua dari kaidahkaidah tersebut dapat diterapkan dalam operasi matriks. **Hanya kaidah perkalian komutatif** yang menjadi perkecualian dan kaidah itu tidak dapat diterapkan dalam operasi matriks.

Penjumlahan matriks dapat dilakukan secara komutatif maupun asosiatif. Anda telah mempelajari bahwa penjumlahan dua buah matriks dilakukan dengan menjumlahkan elemenelemen yang berkaitan dari dua matriks. Pengurangan yang operasinya **A B** dapat dianggap sama dengan operasi penambahan **A** + (**B**) sehingga tidak diperlukan penambahan yang terpisah. Kaidah komutatif dan asosiatif dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\text{Bila } A=[a_{ij}], B=[b_{ij}] \text{ dan } C=[c_{ij}]$$

maka:

1. **Kaidah Jumlah Komutatif A + B = B + A**

   Bukti:

   $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$

   $B+\mathbf{A}=[b_{ij}+a_{ij}]$

   karena $[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]$, maka **A** + **B** = **B** + **A**.

Contoh 1.36:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 10\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

2. **Kaidah Jumlah Asosiatif (A + B) + C = A + (B + C)**

   Bukti:

   $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=[a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}=[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$

   $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$

   Jadi:

   $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\ [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$

Contoh 1.37:

$$\mathbf{V}_1=\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_2=\begin{bmatrix}1\\9\\2\end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2)+\mathbf{V}_3=\begin{bmatrix}4-1\\0-9\\3-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\\-9\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\\-10\\7\end{bmatrix}$$

Jawaban di atas sama dengan:

$$\mathbf{V}_1\,(\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-2 \\ 9-(-1) \\ 2-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Perkalian matriks tidak komutatif berarti:

$$AB \neq BA$$

Bila **AB** dapat ditentukan maka belum tentu **BA** ditentukan dan bila BA dapat ditentukan maka kaidah umum adalah

$$AB \neq BA$$

Contoh 1.38:

Bila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 \text{ x } 3 + 0 \text{ x } -2 & -1 \text{ x } -1 + 0 \text{ x } 0 \\ 2 \text{ x } 3 + 1 \text{ x } -2 & 2 \text{ x } -1 + 1 \text{ x } 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 \text{ x } -1 + (-1) \text{ x } 2 & 3 \text{ x } 0 + (-1) \text{ x } 1 \\ -2 \text{ x } -1 + 0 \text{ x } 2 & -2 \text{ x } 0 + 0 \text{ x } 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi ternyata $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Perkalian antara skalar dan matriks mengikuti hukum komutatif, atau bila k adalah skalar maka: k.**A** = **A**.k.

Contoh 1.39:

Bila: k = 5 dan **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

maka:

$$k.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.5 \\ 5.3 & 5.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 15 & 35 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{A}.k = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ 3.5 & 7.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 15 & 35 \end{bmatrix}$$

4. **Kaidah Asosiatif (AB)C = A(BC)**

Apabila dimensi matriks **A** adalah m x n dan **C** adalah p x q, maka perkalian **ABC** dapat dilakukan bila dimensi **B** adalah n x p.

$$\mathbf{A}_{mxn}\ \mathbf{B}_{nxp}\ \mathbf{C}_{pxq}$$

Contoh 1.40:

$\mathbf{A} = [1,4]_{1x2}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}_{2x1}$

$$\mathbf{AB} = [1,4]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [0 + 4,\ 1 + 12] = [4,\ 11]$$

$$(\mathbf{AB})\ \mathbf{C} = [4,\ 11]\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}_{2X1}$$

$$= [8 + 22] = 14$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +(-2) \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\ (\mathbf{BC}) = [1,\ 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [2 + 16] = 14$$

Jadi (**AB**) **C** = **A** (**BC**)

5. **Kaidah Distributif**
A (B + C) = AB + AC dan
(B + C) = BA = CA

Contoh 1.41:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A(B{+}C)} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & +(20) \\ 1 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & +4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+16 \\ -2-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB + AC} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Jadi **A** (**B+C**) = **AB + AC**

D. TRANSPOSE

Transpose suatu matriks diperoleh dengan menukarkan kolom menjadi baris atau sebaliknya. Jadi, dengan transpose misalnya, baris pertama suatu matriks diubah menjadi kolom pertama dan baris kedua menjadi kolom kedua dan seterusnya. Simbol yang digunakan untuk transpose matriks **A** adalah **A'** atau ada juga yang menggunakan simbol $\mathbf{A}^T$.

Contoh 1.42:

Bila diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.43:

Bila diketahui:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathbf{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks **A** yang berdimensi **m x n** mempunyai transpose **A'** yang dimensinya **n x m.** Bila **m = n** atau matriksnya adalah matriks bujur sangkar, maka matriks aslinya maupun transposenya mempunyai dimensi yang sama, Jadi, jika:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = (a_{ij})_{mxn}$$

dan transpose matriks **A** adalah:

$$A'\, n \times m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ji})_{nxm} = (a_{ij})'_{mxn}$$

Berikut ini adalah contoh transpose dari matriks,

Contoh 1.44:

Bila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ -2 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}_{5x2}$, maka $\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2x5}$

Contoh 1.45:

Bila **A** = $[1, 3, 2, 7, 6]_{1x5}$, maka **A'** = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}_{5x1}$

Contoh 1.46:

Bila **A** = $\begin{bmatrix} 12 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3x3}$, maka **A'** = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3x3}$

Contoh 1.47:

A = $\begin{bmatrix} 6 & 10 & 3 & 11 & 2 \\ 7 & 1 & -1 & 9 & 6 \\ -2 & -7 & 2 & 0 & 7 \\ 5 & 9 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{5x5}$, maka **A'** = $\begin{bmatrix} 6 & 7 & -2 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & -7 & 9 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 11 & 9 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{5x5}$

Contoh 1.48:

Bila **A** = $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{5x1}$, maka **A'** = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{1x5}$

Bila suatu matriks dan transposenya bernilai sama, yaitu $a_{ij} = a'_{ji}$ untuk semua i dan j, maka matriks itu dinamakan **matriks simetris** terhadap diagonal utama.

Contoh 1.49:

Bila **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x3}$, maka **A'** = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x3}$

Karena A = **A'**, maka **A** disebut matriks simetris.

Contoh 1.50:

$$\text{Bila } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \text{, maka } \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

Karena A = **A'**, maka **A** adalah matriks simetris.

Contoh 1.51:

$$\text{Bila } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5x5} \text{, maka } \mathbf{I'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5x5}$$

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa $\mathbf{I_n = I'_n}$ dan sebaliknya $\mathbf{I'_n = I_n}$

Suatu matriks simetris yang dikalikan dengan matriks itu sendiri dan hasilnya sama dengan matriks itu sendiri, maka matriks disebut **matriks idempoten**. Jadi, suatu matriks **A** dikatakan matriks idempoten bila:

$$A' = A$$
$$\text{dan}$$
$$\mathbf{AA = A}$$

Contoh 1.52:

Matriks identitas untuk semua dimensi merupakan matriks idempoten karena

$\mathbf{I'_n = I_n}$
dan
$\mathbf{I_n I_n = I_n}$

Contoh 1.53:

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix}$ merupakan matriks idempoten karena

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{6}{15} & \frac{12}{15} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat suatu transpose:

1. Transpose dari transpose adalah matriks asalnya, atau **(A')' = A**

Contoh 1.54:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(A')'} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Transpose suatu jumlah merupakan jumlah dari suatu transpose, jadi:
   (A + B)' = A' + B'

Contoh 1.55:

Bila $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A + B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(A + B)'} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A' + B'} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, ternyata benar bahwa **(A + B)' = A' + B'**

Contoh 1.56:

Dari contoh di atas :

$$\mathbf{A\ B} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(A\ B)'} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A'\ B'} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi **(A B)' = A' B'**

3. Transpose dari satu perkalian adalah produk perkalian dari transpose yang uruturutan perkaliannya dibalik, jadi:

$$(A_{mxn}\ B_{nxp})' = B'_{pxn} A'_{nxm} = B'\ A'$$

Contoh 1.57:

Bila diketahui :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix} \text{ dan } (\mathbf{AB})' = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B'A'} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{bmatrix}$$

Jadi (**AB**)' = **B' A'**.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Bila diketahui **A** $= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan **B** $= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, maka

   a) berapakah **A - B**?
   b) berapakah **A** + **B**?
   c) berapakah **A x B**?
   d) berapakah **B** x **A**?

2) Bila diketahui $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, maka

a) berapakah **C** + **D**?
b) berapakah **C** - **D**?
c) berapakah **C** x **D**?
d) berapakah **D** x **C**?
e) berapakah **C'?**

3) Bila diketahui $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$ maka berapakah **E**' x **E?**

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, maka

a) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4-(-2) & 2-2 \\ 3-3 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4+(-2) & 2+2 \\ 3+3 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} \text{ x } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.(-2)+2.3 & 4.2+2.0 \\ 3.(-2)+1.3 & 3.2+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{B} \text{ x } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2).4+2.3 & (-2).2+2.1 \\ 3.4+0.3 & 3.2+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2. \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

2) Diketahui $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, maka

a) $\mathbf{C} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{C} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{C} \text{ x } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0.1+2.2+3.1 & 0.5+2.2+3.0 & 0.0+2.3+3.4 \\ 3.1+1.2+(-2).1 & 3.5+1.2+(-2).0 & 3.0+1.3+(-2).4 \\ 2.1+0.2+4.1 & 2.5+0.2+4.0 & 2.0+0.3+4.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4 & 18 \\ 3 & 17 & -5 \\ 6 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

d) $\mathbf{D} \text{ x } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.0+5.3+0.2 & 1.2+5.1+0.0 & 1.3+5.(-2)+0.4 \\ 2.0+2.3+3.2 & 2.2+2.1+3.0 & 2.3+2.(-2)+3.4 \\ 1.0+0.3+4.2 & 1.2+0.1+4.0 & 1.3+0.(-2)+4.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ 12 & 6 & 14 \\ 8 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

e) Bila $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

3) Bila diketahui $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$ maka $\mathbf{E}'$ x $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$

Rangkuman

Kaidah-kaidah yang berlaku pada matriks adalah:

1. Kaidah jumlah komutatif : A+B = B+A
2. Kaidah jumlah asosiatif : (A+B) = A(B+C)
3. Kaidah perkalian asosiatif : (AB) C = A(BC)
4. Kaidah distributif : A(B+C) = AB+AC

Sedangkan pada perkalian komutatif AB $\neq$ BA.

Tes Formatif 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Bila diketahui:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Tentukan $(\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \mathbf{H}$

A. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2) Tentukan $(\mathbf{F} - \mathbf{G}) + \mathbf{H}$

A. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) Tentukan **FG**

A. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4) Tentukan $\mathbf{FI}_3$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) Tentukan $\mathbf{O}_3\mathbf{H}$

A. $\begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100$$

Arti tingkat penguasaan

<70%	70% - 79%	80% - 89%	90% - 100%
kurang	cukup	baik	baik sekali

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Operasi Khusus

A. DETERMINAN

Determinan suatu matriks adalah bilangan skalar yang diperoleh dari pengoperasian elemenelemen matriks secara spesifik. Simbol yang digunakan untuk menunjukkan determinan dari suatu matriks adalah | |, misalnya matriks A maka determinannya ditulis |**A**|. Determinan hanya dapat dihitung dari matriks bujur sangkar. Metode untuk memperoleh determinan suatu matriks adalah sebagai berikut:

Misalkan kita mempunyai suatu matriks dengan dimensi 2 x 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka determinannya adalah:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\ a_{22}\ a_{12}\ a_{21} = \text{bilangan skalar}$$

Contoh 1.58:

Jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4\ 3.2 = 2$

Tanda titik (.) pada contoh di atas digunakan untuk mewakili tanda perkalian.

Contoh 1.59:

Jika $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka $|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (2).3\ 0.4 = 6$

Dari contohcontoh di atas dapat dilihat bahwa determinan matriks bujur sangkar dimensi 2 x 2 diperoleh dengan mengalikan elemenelemen pada diagonal utama dan kemudian dikurangi dengan hasil kali kedua elemen yang lain. Karena dimensi dari matriks yang dihitung tersebut adalah 2 x 2, maka determinannya disebut determinan tingkat dua.

Pada penulisan determinan dapat dilihat bahwa suatu determinan diapit oleh dua garis tegak dan nilai suatu determinan merupakan skalar (angka). Jadi suatu determinan dapat disusut menjadi suatu bilangan. Berbeda dengan matriks yang tidak dapat disusut menjadi bilangan lain.

Bagaimana dengan determinan suatu matriks yang berdimensi 3 x 3. Misalkan ada suatu determinan yang dimensinya 3 x 3 berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka determinannya akan bernilai:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

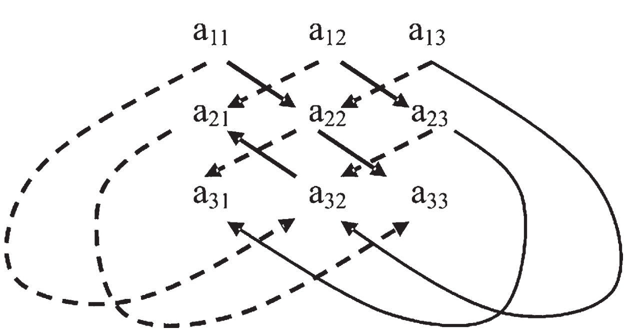
$$= \; a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{22}$$

$$a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \text{ (= skalar)}$$

Dari mana hasil tersebut diperoleh? Dengan melihat hasil akhir yang diperoleh, nilai |**A**| merupakan penjumlahan dari enam suku hasil kali dengan tiga di antaranya didahului tanda minus dan tiga yang lain dengan tanda plus. Hasil semacam itu sulit memang untuk dipikirkan jika kita hanya melihat hasil akhirnya saja. Dalam modul ini dijelaskan dua cara untuk menghitung determinan tingkat tiga, yaitu metode *short cut* dan metode uraian Laplace.

B. METODE *SHORT CUT*

Cara yang memudahkan dalam mencari pasanganpasangan elemen yang harus dikalikan, yaitu dengan menggunakan gambar seperti ditunjukkan pada gambar berikut ini.



Pada gambar di atas, setiap elemen telah dihubungkan dengan dua elemen lainnya oleh garis panah yang tidak terputusputus dan garis yang terputusputus.

Coba sekarang ikuti arah garis penghubungnya dengan cermat. Elemenelemen yang dihubungkan dengan garis yang tidak putus adalah $a_{11} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{33}$, $a_{12} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31}$ dan $a_{13} \rightarrow a_{32} \rightarrow a_{21}$. Setiap elemen yang dihubungkan dengan tanda panah dapat dikalikan dan hasil kalinya merupakan bagian dari enam suku tersebut. Sukusuku hasil perkalian tiga elemen ini diberi tanda plus di depan.

Pada pihak lain, setiap elemen yang ada di baris atas dihubungkan dengan elemenelemen lain oleh garis yang patahpatah, yaitu $a_{11} \rightarrow a_{32} \rightarrow a_{23}$, $a_{12} \rightarrow a_{21} \rightarrow a_{33}$ dan $a_{13} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{31}$. Tiga elemen dari masingmasing hubungan ini kemudian dikalikan dan diawali tanda minus. Jumlah dari tiga suku yang bertanda plus dan tiga suku terakhir yang bertanda minus merupakan nilai determinan. Untuk mengingat-ingat, perhatikan gambar panah-panah tersebut! Nampak seperti gambar jantung hati. Ini akan memudahkan kita untuk menentukan pasangan elemen-elemennya.

Contoh 1.60:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

= (1)(2)(4) + (3)(0)(1) + (2)(6)(5)-(2)(2)(1) (3) (5) (4) (1)(6)(0)
= 8 + 0 + 60 + 4 + 60 0
= 132

Contoh 1.61:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

= (1)(-5)(2) + (2)(-6)(0) + (3)(-1)(-4)-(3)(-5)(0)-(2)(-4)(2)-(1)(-1)(6)
= -10 - 0 + 12 - 0 + 16 - 6
= 12

Contoh 1.62:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

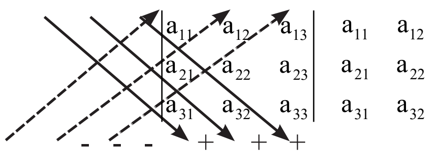
= (9)(1)(2) + (0)(0)(0) + (0)(0)(0) (0)(1)(0) (0) (0) (2) (9)(0)(0)
= 18 + 0 + 0 0 0 0
= 18

Contoh 1.63:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$= (1)(4)(5) + (2)(6)(3)+ (3)(6)(2) - (3)(4)(3)\ (2)(2)(5)\ (1)\ (6)\ (6)$
$= 20 + 36 + 36\ 36\ 20\ 36$
$= 0$

Alternatif lainnya adalah dengan jalan menuliskan kembali kolom pertama dan kedua di sebelah kanan garis tegak, kemudian elemenelemen dihubungkan dengan panah seperti gambar berikut ini:



Elemenelemen yang dihubungkan oleh garis yang turun dari kiri atas ke kanan bawah kemudian dikalikan dan masingmasing suku diberi tanda plus. Elemenelemen yang dihubungkan oleh garis yang turun dari kanan atas ke kiri bawah dikalikan dan diberi tanda minus. Keenam hasil perkalian kemudian dipindahkan dan merupakan nilai dari determinan, yaitu:

$$|\mathbf{D}| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31} a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$$

Contoh 1.64:

Berapakah determinan dari:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}$$

$= (1)(4)(9) + (2)(7)(5) + (8)(3)\ (6) -(8)(4)(5)\ (1)(7)(6)\ (2)(3)(9)$
$= 36 + 70 + 144\ 160\ 42\ 54$
$= -6$

Apabila menghitung determinan seperti yang dilakukan pada contoh di atas, dihitung lagi dengan cara sebelumnya, maka sudah barang tentu hasilnya akan sama. Cara yang mana yang akan Anda gunakan untuk menghitung determinan, nantinya diserahkan pada Anda sendiri. Tentunya, yang sebaiknya Anda gunakan adalah yang cara yang menurut Anda paling mudah.

C. URAIAN LAPLACE

Kedua cara yang dibahas di atas adalah cara mencari nilai determinan tingkat tiga. Bila Anda akan mencari nilai determinan tingkat yang lebih tinggi, maka **cara di atas tidak dapat diterapkan**. Sebagai gantinya dapat digunakan cara **Laplace** yang biasa disebut dengan **uraian Laplace**. Cara ini dapat digunakan untuk determinan tingkat tiga maupun tingkat yang lebih tinggi.

Sebagai awal dari uraian, marilah kita bahas pengertian Laplace dari suatu determinan tingkat tiga. Perhatikan determinan berikut:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan **A** di atas dapat dipandang sebagai jumlah dari tiga suku yang masingmasing suku merupakan hasil perkalian antara elemen baris pertama dengan suatu determinan tingkat dua. Proses penguraian dari |**A**| inilah yang melukiskan penguraian Laplace dari suatu determinan. Determinan tingkat dua yang disebutkan di atas tidak ditetapkan secara sembarang tetapi ditetapkan dengan menggunakan kaidah tertentu. Determinan tingkat dua yang pertama adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Merupakan determinan bagian dari |**A**| yang didapat dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertama dari |**A**|. Bagian ini disebut minor dari elemen a_{11}, yaitu elemen baris dan kolom yang dihilangkan dan ditulis $|M_{11}|$. Simbol $|\mathbf{M}_{ij}|$ dapat juga digunakan untuk menyatakan minor yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke i kolom ke j. Dengan demikian, tentu bisa ditebak bahwa dua determinan tingkat dua lainnya adalah minor $|\mathbf{M}_{12}|$ dan minor $|\mathbf{M}_{13}|$, atau:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Konsep lain yang mempunyai hubungan erat dengan minor adalah kofaktor. Kofaktor ditulis dengan $|\mathbf{C}_{ij}|$ dan didefinisikan sebagai minor dengan disertai tanda aljabar tertentu (mungkin minus atau plus). Aturan pemberian tanda adalah sebagai berikut. Jika jumlah indeks i dan j pada $|\mathbf{M}_{ij}|$ genap, maka tanda pada kofaktor sama dengan tanda minor. Jadi $|\mathbf{C}_{ij}| = |\mathbf{M}_{ij}|$. Akan tetapi jika jumlah antara i dan j ganjil, maka tanda pada kofaktor akan berlawanan dengan tanda pada minor. Jadi $|\mathbf{C}_{ij}| = - |\mathbf{M}_{ij}|$. Penentuan tanda pada kofaktor dapat dirumuskan menjadi:

$$|\mathbf{C}_{ij}|=(1)^{i+j}\,|\mathbf{M}_{ij}|$$

Di sini dapat dilihat bahwa $(1)^{i+j}$ akan positif bila i+j genap dan akan negatif bila i + j ganjil.

Contoh 1.65:

Pada determinan $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{vmatrix}$, minor dari elemen 3 adalah

$$\begin{aligned} |M_{12}| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 7 - 54 \\ &= -47 \end{aligned}$$

Kofaktor dari elemen 3 adalah:

$$|\mathbf{C}_{12}| = (1)^{1+2}\,|\mathbf{M}_{12}|$$

Karena i + j = 1 + 2 = 3 adalah ganjil, maka kofaktor:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_{12} &= |M_{12}| \\ &= 47 \end{aligned}$$

Kofaktor elemen baris pertama yang lain adalah:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_{11}| &= |M_{11}| \\ &= \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 35\ 72 = 37\text{, dan} \\ |\mathbf{C}_{13}| &= |\mathbf{M}_{13}| \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 8\ 30 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara Laplace, suatu determinan tingkat tiga dapat diuraikan menjadi:

$|A| = a_{11}\ |M_{11}|\ a_{12}|M_{12}| + a_{12}|M_{13}|$

$= a_{11}\ |\mathbf{C}_{11}| + a_{12}|\mathbf{C}_{12}| + a_{13}|\mathbf{C}_{13}|$

Nilai determinan di atas didapat dengan menguraikan baris pertama dan mengalikan elemenelemen pada baris pertama dan kofaktor pasangannya. Perbedaan tanda yang ada pada misalnya suku $a_{12}\ |\mathbf{C}_{12}|$ dan $a_{13}\ |\mathbf{C}_{13}|$ adalah karena perbedaan lebih elemen tersebut.

Bila dikehendaki, baris yang diuraikan tidak harus baris satu tetapi dapat juga baris kedua atau yang lain bahkan dapat pula yang diuraikan adalah kolomnya, yaitu kolom satu atau kolom dua atau kolom yang lain. Penulisan baris atau kolom manapun yang akan diuraikan akan memberikan hasil yang sama.

Contoh 1.66:

Determinan $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ dapat dikerjakan dengan:

1. Menguraikan baris pertama:

$$|\mathbf{A}| = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \ -2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 12\ 0\ 2\ (9\ 10)\ 1(0\ 8)$

$= 12 + 18 + 20 + 8$

$= 34$

2. Menguraikan baris kedua:

$$|\mathbf{A}| = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -3\ (6\ 0) + 4(3 + 2)\ 5(0\ 4)$

$= 18\ 4 + 20$

$= 34$

3. Menguraikan kolom pertama:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 12\ 0\ 3(6\ 0) + 2\ (10 + 4)$

$= 12 + 18 + 28$

$= 34$

Jadi dengan menguraikan kolom atau baris yang manapun akan didapat nilai determinan yang sama.

Contoh 1.67:

Nilai determinan $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ dengan

menguraikan baris pertama:

$$|\mathbf{A}| = 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\ 280 + 300 + 0$$
$$= 20$$

Hasil yang sama dapat diperoleh dengan menguraikan kolom kedua:

$$|\mathbf{A}| = \ 10 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \ 280 + 300 + 0\ 0$$
$$= \ 20$$

Dari contoh di atas, kita melihat suatu kenyataan bahwa kita mempunyai kebebasan untuk memilih baris atau kolom yang “mudah” untuk diuraikan. Suatu baris atau kolom yang mengandung elemenelemen yang paling banyak bernilai 0 atau 1 adalah yang disukai untuk tujuan penghitungan determinan. Elemen yang bernilai 0 bila dikalikan dengan kofaktornya akan sama dengan nol dan elemen yang nilainya satu dikalikan dengan kofaktornya hasilnya jelas adalah kofaktor itu sendiri. Dengan demikian kita dapat melakukan penghematan dalam melakukan perkalian.

Penguraian Laplace dapat juga digunakan untuk menghitung determinan tingkat empat atau tingkat yang lebih tinggi lagi. Dalam suatu determinan tingkat empat $|B|$ misalnya:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

Baris pertama memuat empat elemen, yaitu b_{11}, b_{12}, b_{13}, dan b_{14}. Seperti telah kita pelajari, minor dari elemen b_{11} adalah determinan $|B|$ yang dihilangkan baris dan kolom pertamanya. Karena minor bertingkat 3, maka kofaktor juga bertingkat tiga. Secara umum kita dapat menyatakan bahwa dengan penguraian Laplace, determinan tingkat n akan diciutkan menjadi n kofaktor yang masingmasing bertingkat (n1). Kemudian penguraian selanjutnya akan membawa determinan ke tingkat yang lebih rendah. Demikian seterusnya sehingga akhirnya akan didapat determinandeterminan tingkat dua yang dapat dihitung dengan mudah.

Contoh 1.68:

Berapakah nilai determinan:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Untuk menghitung nilai determinan $|A|$, maka sebaiknya kita memilih kolom 3 untuk diuraikan karena pada kolom tersebut banyak mengandung elemen yang bernilai 0. Jadi,

$$|\mathbf{A}| = 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Kemudian determinan pangkat tiga di atas diuraikan lagi, misalnya:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} \text{ kemudian baris pertama diuraikan}$$

$$|C| = 1 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 40 + 7\ 8(24 + 0) + 7(18\ 0)$$
$$= 40 + 6\ 192 + 126$$
$$= 100$$

Jadi

$$|A| = 7\ |C| = -100$$
$$= 7(100)$$
$$= 700$$

D. SIFATSIFAT DETERMINAN

Sekarang kita akan membahas sifatsifat determinan. Ada 8 sifat yang akan dibahas di sini, yaitu:

Sifat 1:
Nilai suatu determinan tidak akan berubah bila barisnya diganti dengan kolom atau sebaliknya kolom diganti baris. Padahal kita sudah mempelajari bahwa matriks yang ditukar barisnya dengan kolom atau sebaliknya merupakan transpose dari matriks tersebut. Jadi sifat ke1 ini dapat dikatakan pula bahwa determinan dari suatu matriks |**A**| mempunyai nilai yang sama dengan determinan dari transposenya, |**A'**| atau

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$$

Contoh 1.69:

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Contoh 1.70:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh 1.71:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 + 2 - 8 - 0 = 0$$

Sifat 2:
Jika dalam suatu baris (kolom) dari matriks semua elemen nilainya nol, maka nilai determinan itu juga sama dengan nol.

Contoh 1.72:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0.9\ 0.1 = 0$$

Contoh 1.73:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 0 + 0 + 0$
$= 0$

Contoh 1.74:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0\ 0 + 0$
$= 0.$

Sifat 3:
Jika setiap elemen pada suatu baris (kolom) dari suatu determinan dikalikan dengan bilangan skalar k, maka nilai determinan akan menjadi k kali nilai determinan semula.

Contoh 1.75:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 12\ 4 + 0 + 6 + 0\ 3$
$= 11$

Bila |**B**| adalah determinan |**A**| yang baris pertamanya dikalikan 5, maka:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 60\ 20 + 0 + 30 + 0 - 15$
$= 55$

maka |**B**| = 5 |**A**|

Bila |**B**| adalah determinan |**A**| yang kolom keduanya dikalikan tiga, maka:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

= 36 12 0 + 18 + 0 - 9
= 33
maka |**B**| = 3 |**A**|

Contoh 1.76:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Bila |**A***| adalah determinan |**A**| yang baris pertamanya dikalikan 4, maka:

$$|\mathrm{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi $|\mathrm{A}'| = 4\ \mathrm{A} = 0$

Bila |**A***| adalah determinan |**A**| yang kolom ketiganya dikalikan 2, maka

$$|\mathrm{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi $|\mathrm{A}'|$ = 2 |**A**| = 0

Dari contohcontoh di atas dapat dilihat bahwa perkalian antara skalar dengan suatu matriks berbeda dengan perkalian antara skalar dan determinan. Pada perkalian skalar dengan matriks, maka semua elemen pada matriks harus dikalikan dengan skalar tersebut. Akan tetapi, pada determinan seperti yang Anda lihat, perkalian skalar dengan determinan hanya dilakukan dengan mengalikan sebuah baris atau kolom dengan skalar. Sifat ini dapat digunakan untuk mengeluarkan pembagi persekutuan yang terdapat dalam suatu baris atau kolom.

Contoh 1.77:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4(1) & 4(2) \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

= 4 (5 6)
= 4

Contoh 1.78:

$$\begin{vmatrix}15 & 7\\12 & 2\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}5 & 7\\4 & 2\end{vmatrix}$$

$$3(2)\begin{vmatrix}5 & 7\\2 & 1\end{vmatrix}$$

$= 6\ (5\ 14)$
$= 54$

Sifat 4:
Bila dua buah baris atau kolom dari suatu determinan ditukar tempatnya, maka tanda determinan akan berubah. Akan tetapi, nilai mutlaknya tetap sama.

Contoh 1.79:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 4 & 1\\-2 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

$= 20\ 6 + 0 + 16\ 0\ 1$
$= 29$

Sekarang baris ke-2 ditukar tempatnya dengan baris ke-3

$$|A^{*}| = \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\-2 & 1 & 5\\0 & 4 & 1\end{vmatrix} = -29$$

Jadi $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{*}|$

Contoh 1.80:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 4 & 1\\-2 & 1 & 5\end{vmatrix} = 29$$

Sekarang kolom ke2 ditukar dengan kolom 1, maka:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\4 & 0 & 1\\1 & -2 & 5\end{vmatrix}$$

$= 0 + 1\ 16\ 0\ 20 + 6$
$= -29$

Contoh 1.81:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 0\ 12 + 6\ 0 + 8\ 60$$
$$= -58$$

Bila baris pertama ditukar dengan baris ketiga, maka:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 60 - 8 - 0 - 6 + 12 = 58$$

Sifat 5:
Jika pada suatu determinan, elemenelemen dua baris atau dua kolomnya sama, maka nilai determinannya sama dengan nol.

Contoh 1.82:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 10 + 24 + 18\ 24\ 10 - 18$$
$$= 0$$

Contoh 1.83:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + 0 + 12\ 0\ 0\ 12$$
$$= 0$$

Karena dua baris atau kolom yang sama dari suatu determinan akan menyebabkan nilai determinannya nol, maka ini juga berarti bahwa suatu determinan dengan baris atau kolom yang nilai elemenelemennya merupakan kelipatan baris atau kolom yang lain akan memberikan nilai determinan yang sama dengan nol. Hal itu mudah dimengerti karena bila kelipatannya dikeluarkan dari baris atau kolom akan menyebabkan kedua baris atau kolom menjadi sama. Sifat nomor 5 menyatakan bahwa nilai determinan itu sama dengan nol.

Contoh 1.84:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} \text{ baris ke satu merupakan 2x baris kedua}$$

$$2\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Contoh 1.85:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3c & d \\ 3c & d \end{vmatrix} \text{ baris pertama sama dengan baris kedua}$$

$$= 3\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Contoh 1.86:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ baris pertama merupakan 2x baris kedua}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

Contoh 1.87:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \text{ kolom kedua merupakan 2x kolom 1}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sifat 6:

Suatu determinan nilainya tidak akan berubah bila elemenelemen pada suatu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan konstan kemudian ditambahkan atau dikurangkan pada elemenelemen dalam baris atau kolom yang lain.

Contoh 1.88:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ad - bc$$

Baris pertama dikalikan k dan ditambahkan pada baris kedua, maka:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$$

= a(d + kb) b(c + ka)
= ad + kab bc kab
= ad bc
= |**A**|

Contoh 1.89:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4\ 15 = 11$$

Baris pertama dikalikan satu kemudian untuk mengurangi baris ke dua

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

= 1 12
= 11

Contoh 1.90:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

= 0 3 24 0 + 12 4
= -19

Baris kedua dikalikan 2 dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

= 0 + 9 24 0 4
= 19

Contoh 1.91:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

= 8 + 48 + 28 - 168 - 8 - 8
= -100

Baris pertama dikalikan 2 kemudian untuk mengurangi baris kedua

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris ketiga dikalikan 2 kemudian untuk mengurangi baris pertama

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris ketiga dikalikan 2 kemudian untuk mengurangi baris pertama

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Kolom pertama ditambahkan ke kolom 3

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{100}$$

Sifat ke6 ini terasa pentingnya jika kita akan menguraikan suatu determinan dengan cara Laplace. Elemenelemen dalam satu baris atau kolom jika mungkin dijadikan nol dengan sifat ke6 ini. Semakin banyak elemen yang bernilai nol, maka pekerjaan menghitung perkalian menjadi lebih sedikit.

Sifat 7:
Determinan dari perkalian dua buah matriks sama dengan hasil kali determinan matriksmatriks tersebut, atau

$$|AB| = |A||B|$$

Contoh 1.92:

$$\text{Misalkan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 20$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A\,B} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+6 & 4+18 \\ 4+10 & 2+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ 14 & 32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 14 & 22 \\ 14 & 32 \end{vmatrix}$$

Sifat ke6 digunakan, baris kedua dikurangi baris pertama

$$|AB| = \begin{vmatrix} 14 & 22 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$$

= 140 - 0

= 140.

Padahal |A||B| = 7 X 20 = 140

Jadi $|AB| = |A||B|$

Sifat 8:

Determinan dari matriks diagonal adalah hasil kali elemenelemen diagonalnya.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Contoh 1.93:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

= (1)(2)(4)(5)(3)

= 120

E. KAIDAH CRAMER

Dalam mencari titik ekstrem suatu fungsi biasanya kita terlibat pada pekerjaan menyelesaikan persamaan linier secara serempak. Bila jumlah variabel yang dihadapi banyak, maka penyelesaian secara serempak persamaan-persamaan tersebut akan menjadi masalah tersendiri. Untuk mengatasi masalah tersebut baiklah kita gunakan kaidah Cramer. Bila kita menghadapi n buah persamaan linier dengan n peubah yang bentuk umumnya dapat ditulis:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = c_n \end{array}$$

Dengan menggunakan matriks, persamaanpersamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}$$

Nilai x_1, x_2 ... x_n dapat dicari dengan menggunakan rasio dari determinan:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{n3} & \cdots & c_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\text{di mana} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Untuk setiap x_i pada i = 1, 2, ... n, pembilangannya merupakan suatu determinan dari matriks koefisien dengan kolom ke i diganti oleh konstan **c** yang ada di sebelah kanan tanda sama dengan pada persamaan. Bila persamaan tidak ada penyelesaiannya maka |A| akan sama dengan nol.

Contoh 1.94:

Berapakah nilai x dan y yang memenuhi persamaan:

$x + 2y = 1$

$3x + 4y = 2$

Dalam bentuk matriks, persamaan di atas dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Contoh 1.95:

Berapakah x_1,x_2 dan x_3 dari persamaanpersamaan berikut:
$3x_1 + x_2\ x_3 = 2$
$x_1\ 2x_2 + x_3 = 9$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

Bentuk dalam matriks, persamaan di atas dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-30}{-30} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-90}{-30} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -9 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{60}{-30} = 2$$

Contoh 1.96:

Selesaikan persamaan berikut ini:
x 5y + 6z = 7
3x + 3y z = 8
2x + 8y 7z = 1

Dalam bentuk matriks, persamaan di atas dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{bmatrix} = 0$$

Karena $|A| = 0$, maka persamaan tersebut tidak ada penyelesaiannya.

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Hitung determinan dari matriks berikut ini:

1) $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 13 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Gunakan kaidah Cramer untuk mendapatkan akar-akar dari persamaan berikut:

6) $3x + 2y = 7$
$x + 3y = 10$

7) $2x - 3y = 4$
$x + 2y = 9$

8) $x + 2y + 3z = 10$
$2x + 3y + z = 13$
$x + y + 10z = 15$

9) $x + 2y + 3z = 14$
$x - y - 3z = 0$
$2x - 4y - 4z = 2$

10) $x + y = 8$
$y - z = 2$
$x + 3z = 10$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 2 = 33$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 24 = 12$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 9 & 12 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 16 & 1 & 3 \end{array}\right.$

$= 3.4.16 + 9.1.1 + 12.2.3 - 1.4.12 - 3.1.3 - 16.2.9 = - 72$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 13 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{vmatrix} =$ Jika elemen-elemen pada baris pertama dikalikan 2, maka nilai elemen-elemennya menjadi sama dengan baris ketiga,

maka determinannya adalah 0.

5) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

= (-4+0-12-36+8-0) – 0 + 0 – 2(-20-4+0 – 0 – 80 – 0)
= -44 + 208 = 164

6) $3x + 2y = 9$
$x + 3y = 10$
Persamaan dapat ditulis menjadi $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{27-20}{9-2} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{30-9}{9-2} = \frac{21}{7} = 3$$

Jadi, x = 1; y = 3

7) $2x - 3y = 4$
$x + 2y = 9$
Persamaan dapat ditulis menjadi $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{8+27}{4+3} = \frac{35}{7} = 5$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{18-4}{4+3} = \frac{14}{7} = 2$$

Jadi, x = 5; y =2

8) $x + 2y + 3z = 10$
$2x + 3y + z = 13$
$x + y + 10z = 15$

Persamaan dapat ditulis menjadi $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 15 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 \\ 15 & 1 & 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}} = \frac{300+30+39-135-260-10}{30+2+6-9-40-1} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 13 & 1 \\ 1 & 15 & 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}} = \frac{130+10+90-39-200-15}{30+2+6-9-40-1} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 15 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}} = \frac{45+26+20-30-60-13}{30+2+6-9-40-1} = \frac{-12}{-12} = 1$$

Jadi, $x = 3$; $y = 2$; $z = 1$

9) $x - 3y + 3z = 10$

$x - y - 3z = 0$

$2x - 4y - 4z = 2$

Persamaan dapat ditulis menjadi $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{40+18+0+6-0-120}{4+18-12+6-12-12} = \frac{-56}{-8} = 7$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{0-60+6+0+40+6}{4+18-12+6-12-12} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{-2+0-40+20+6-0}{4+18-12+6-12-12} = \frac{-16}{-8} = 2$$

Jadi, $x = 7$; $y = 1$; $z = 2$

10) $x + y = 8$

$y - z = 2$

$x + 3z = 10$

Persamaan dapat ditulis menjadi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{24-10+0+0-6-0}{3-1+0-0-0-0} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{6-8+0+0-0+10}{3-1+0-0-0-0} = \frac{8}{2} = 4$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{10+2+0-8-0-0}{3-1+0-0-0-0} = \frac{4}{2} = 2$$

Jadi, $x = 4$; $y = 4$; $z = 2$

Rangkuman

Sifat-sifat determinan

1. $|A| = |A'|$
2. Jika dalam suatu baris atau kolom elemen suatu matriks bernilai nol semua, maka nilai determinan itu juga sama dengan nol.
3. Jika setiap elemen pada suatu baris atau kolom dari suatu matriks determinan dikalikan dengan suatu skala k, maka nilai determinan akan menjadi k kali nilai determinan semula.
4. Bila dua buah baris atau kolom dari suatu determinan ditukar tempatnya, maka determinan akan berubah akan tetapi nilai mutlaknya tetap sama.
5. Jika dua baris atau kolom suatu determinan sama elemen-elemennya, maka nilai determinan sama dengan nol.
6. Suatu determinan nilainya tidak akan berubah bila elemen-elemen pada suatu baris atau kolom dikalikan dengan suatu konstan kemudian ditambahkan atau dikurangkan pada elemen-elemen dalam baris atau kolom yang lain.
7. Determinan dari perkalian dua buah matriks sama dengan hasil kali determinan matriks-matriks tersebut agar $|AB| = |A|\,|B|$.
8. Determinan dari matriks diagonal adalah hasil kali elemen-elemen diagonalnya.

Tes Formatif 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Determinan dari $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ adalah ....

A. 8
B. 2
C. 0
D. -2

2) Determinan dari $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 15 \end{vmatrix}$ adalah ....

A. 33
B. 27
C. 9
D. 0

3) Determinan dari $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 13 & 70 & 39 \\ 6 & 2 & 18 \end{vmatrix}$ adalah ....

A. 60

B. 39

C. 15

D. 0

4) Akar dari persamaan:

$3x + 5y = 32$

$4x + 2y = 26$

adalah ....

A. $x = 5; y = 4$

B. $x = 4; y = 5$

C. $x = -1; y = 7$

D. $x = 7; y =-1$

5) Akar dari persamaan:

$2x + 2y + z = 17$

$x + 3y + 4z = 18$

$y + 10z = 13$

adalah ....

A. $x = 5; y = 4; z = 1$

B. $x = 3; y = 5; z = 2$

C. $x = 5; y = 3; z = 1$

D. $x = 4; y = 1; z = 3$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100$$

Arti tingkat penguasaan

<70%	70% - 79%	80% - 89%	90% - 100%
kurang	cukup	baik	baik sekali

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D
2) B
3) D
4) C
5) B
6) A
7) D
8) A
9) B
10) D

Tes Formatif 2

1) C
2) B
3) A
4) B
5) D

Tes Formatif 3

1) D
2) A
3) D
4) B
5) C

Daftar Pustaka

Baldani, Jeffrey, James Bradfield and Robert Turne. (1996). *Mathematical Economics*. The Dryden Press, Harcourt Brace College Publisher.

Haeussler, Ernest F. and Richard S. Paul. (1996). *Introductory Mathematical Analysis for Business Economics, and The Life and Social Sciences*. Eighth Edition. Prentice Hall International Inc.

Hoy, Michael, John Livernois, Chris McKenna, Ray Rees and Thanasis Stengos. (1996). *Mathematics for Economics*. Addison-Wesley Publisher Limited.

Jacques, Ian. (1995). *Mathematics for Economics and Business*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company.

Pindyck, Robert S and Daniel L Rubinfeld. (1998). *Microeconomics*. Fourth Edition. Prentice Hall International Inc.

Prakin, Michael and Robin Bade. (1995). *Modern Macroeconomics*. Prentice Hall Canada Inc Scarborough Ontaro.

Silberberg, Eugene and Wing Suen. (2001) *The Structure of Economics a Mathematical Analysis*. Irwin McGraw-Hill.

Weber, Jean E. (1982). *Mathematical Analysis: Business and Economic Applications*. New York: Harper & Row.